Yves Hellegouarch

L'«essai d'une nouvelle théorie de la musique» de Leonhard Euler

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1986, fascicule 8
« Une esthétique galiléenne : la théorie de la musique », , p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1986___8_A1_0>

L'"ESSAI D'UNE NOUVELLE THÉORIE DE LA MUSIQUE" DE LEONHARD EULER

YVES HELLEGOUARCH, CAEN

1) Présentation du livre
1,1) Un peu d'histoire
1,2) But et méthode
1,3) Sources d'information
2) L'esthétique musicale d'Euler
2,1) Un art de l'agrément
2,2) Peut-on construire une science de l'agrément ?
2,3) D'où vient l'agrément, comment le mesurer ?
2,4) Définition de la musique
2,5) Le concept d'harmonie selon Euler
2,6) Les objets musicaux
2,7) Le sujet

3) Les genres eulériens et le genre diatonico-chromatique
3,1) Enoncé du problème à résoudre
3,2) Définition des genres eulériens

4) Théorie de l'harmonie dans le genre diatonico-chromatique
4,1) Considérations générales
4,2) Accords
4,3) Modes

5) L'immanence de $\mathbb{Z}$
5,1) Euler et le tempérament égal
5,2) Les noms des notes

6) Composition dans le genre diatonico-chromatique
6,1) Composition dans un mode et un système donnés
6,2) Modulation

7) Deux cent cinquante ans après
7,1) La naissance de l'art des sons
7,2) L'hégémonie du tempérament égal
7,3) Le développement de la spécialisation scientifique
7,4) La rigidité de la construction eulérienne

<u>Postlude</u> : Sept cents ans après.

Références.

1) Présentation du livre.

1,1) Un peu d'histoire.

Ce travail est l'étude d'un livre de L. Euler intitulé "Tentamen novae theoricie musicae, ex cartissemis harmoniae principis delucidae expositiae" et que nous appellerons simplement "L'Essai" car cet ouvrage a été traduit en français en 1839 sous le titre d'"Essai d'une nouvelle théorie de la musique". Il n'est pas nécessaire de présenter l'auteur. Nous rappellerons toutefois que celui-ci est né en 1707 à Bâle et qu'il se rattache à la grande tradition leibnizienne des mathématiques par l'intermédiaire de son "professeur" de mathématiques, Jean Bernoulli, qui était un émule convaincu de Leibniz. Euler a passé la majeure partie de sa vie dans des académies ; à St Pétersbourgd'abord où il avait été appelé par Daniel et Nicolas Bernoulli en 1727, puis à Berlin (1740) et à nouveau à St Pétersbourg (1766).

L'ouvrage original (fig. 1) est paru à St Pétersbourg en 1739 mais il a probablement été écrit en 1731 alors que L. Euler n'avait que 24 ans ([1]. Euler). De la part d'un "jeune homme" de 24 ans, ce travail frappe par l'ampleur de la conception, la puissance de l'intuition et l'agilité quasi démoniaque avec laquelle il construit ses tables de modes et d'accords. Toute sa vie Euler s'est intéressé à la théorie de la musique et en 1760 il exprimait encore des idées analogues dans ses lettres à une princesse d'Allemagne, puis il revint 3 fois encore sur la question : deux mémoires en 1764 à l'Académie royale des sciences de Berlin et un mémoire en 1773 à l'Académie des sciences de St Pétersbourg, qui confirment la plupart des prises de position de l'Essai(voir [4]).

1,2) But et méthode.

L'étude que l'on va faire n'est pas de la critique spécialisée mais tout bonnement une analyse de la portée et de la signification de l'Essai dans les divers domaines auxquels il touche.

Pour ce faire, j'assaierai de caractériser, dans un langage qui se veut clair et moderne, la position d'Euler et son apport, en regroupant en chapitres un certain nombre d'aspects de l'Essai et en les illustrant par les citationsqui me paraissent les plus nettes.

De cette manière, j'espère rendre justice à ce travail - ce qui n'a certainement pas été fait par E. Emery dans [2] où il est dit, page 342 : "Faut-il accompagner Euler dans le détail de son exposé subséquent ? Seules quelques touches suffisent" - et montrer qu'il s'agit bel et bien d'une théorie esthétique cartésienne dans laquelle l'arithmétisation de la musique a été totalement accomplie.

Inévitablement des ombres portées apparaîtront qui placeront cet ouvrage dans le mouvement général des idées (voir ce que dit G. Gusdorf dans [3].

1,3) Sources d'information.

J'ai eu connaissance de l'Essai par le paragraphe que lui consacre E. Emery dans [2] (p.p. 338-345) et récemment j'ai découvert un autre compte-rendu de ce travail dans [1] (Physics of Music) ainsi qu'une magistrale étude en allemand(à laquelle je renvoie le lecteur [4])qui traite notamment des aspects musicologiques de l'œuvre d'Euler.

2) L'esthétique musicale d'Euler.

Je dirai dans le paragraphe 7 de quelle manière E. Emery envisage l'esthétique de L. Euler et la place qu'il lui donne dans la grande tradition pythagoricienne, mais, dans ce paragraphe, je ne le suivrai pas plus avant dans cette voie.

En effet ce qui me paraît le mieux caractériser la manière d'Euler est sa fraîcheur : j'ai dit plus haut qu'Euler n'avait probablement que 24 ans lorsqu'il a écrit l'Essai et à cette époque il n'était pas encore un grand érudit (voir [5] p. 174 "équation de Pell").

On a affaire ici à un esprit qui se trouve dans toute la force de son imagination et de son pouvoir de synthèse et qui se fie beaucoup plus à son intuition et au Zeitgeist qu'à une pesante érudition.

Comme d'autre part Euler prend les choses à la base, il est toujours intéressant de voir le cheminement d'un esprit tel que le sien. Voici comment s'ouvre l'Essai :

ch 1, § 1. Notre dessein étant de traiter la musique comme on traite les sciences exactes, où il n'est permis de rien avancer dont la vérité ne puisse être démontrée par ce qui précède, nous devons avant tout exposer la doctrine du son et de l'ouïe: le premier fournit la matière de la musique, et la seconde en embrasse le but et la fin qui est de charmer l'oreille ; car la musique enseigne comment il faut produire et combiner les sons pour qu'il en résulte une harmonie qui affecte agréablement le sens de l'ouïe. La nature des sons, leur formation et leurs variétés, voilà donc ce qu'il faut que nous examinions ; et c'est dans la physique et dans les mathématiques que nous puiserons les moyens d'en acquérir une connaissance suffisante. Si à cette connaissance nous ajoutons ensuite celle des principaux organes de l'ouïe, nous comprendrons comment se fait la perception des sons. On sentira facilement quel avantage on tirera de ces notions pour établir avec solidité les bases de la musique, si l'on réfléchit que l'agrément qu'on trouve dans les sons, dépend de la manière dont on les perçoit, et que par conséquent c'est là qu'il faut en chercher l'explication.

Et quand Euler parle de connaissance des principaux organes de l'ouïe il ne faut pas oublier qu'il avait déjà eu, à cette époque, l'occasion de faire des études approfondies sur la physiologie de l'oreille ([6] p.160).

2,1) <u>Un art de l'agrément</u>.

Nicolas Poussin a dit un jour que l'oeuvre de peinture est faite pour la délectation. D'une manière analogue, L. Euler dit que le but de l'oeuvre musicale est l'<u>agrément</u> et que, avant toute autre chose, la musique doit <u>plaire</u>.

Mais Euler n'en reste pas là et entend analyser ce concept : "Notre intention est de rechercher ce qui fait que, parmi les objets qui affectent les sens, il y en a qui nous plaisent et d'autres qui nous déplaisent".

Cette analyse des notions d'"agrément" et de "délectation" fait l'objet des remarques suivantes et fournit des éléments pour une définition a posteriori de notions qui ne sont pas aussi naïves qu'on pourrait le croire au premier abord.

2,2) Peut-on construire une science de l'agrément ?

A l'époque d'Euler le procès de Newton ([7] p.205) est encore à faire et Euler n'hésite pas à déduire du principe de raison suffisante la possibilité d'une science de l'agrément (Ch. II, §1) :

> puisqu'aujourd'hui on admet généralement comme un axiôme, que rien dans le monde ne se fait sans raison suffisante, on ne peut pas douter non plus qu'il n'y ait une raison quelconque de ce qui plaît. En partant de ce principe, on doit nécessairement rejeter l'opinion de ceux qui croient que la musique dépend de la seule volonté des hommes, que la nôtre nous plaît uniquement parce que nous sommes habitués à l'entendre, et que celle des peuples barbares nous déplaît par la raison contraire.
>
> § 2. Cependant je conviens et je prouverai même plus bas, qu'il peut arriver qu'à force de l'entendre une mélodie, qui d'abord n'offrait rien d'agréable, finisse par plaire, et réciproquement. Mais ce fait n'est pas contraire au principe de la raison suffisante; car ce n'est pas uniquement dans l'objet qu'il faut chercher la cause pour laquelle nous le trouvons agréable ou désagréable, il faut aussi avoir égard aux sens qui en représentent l'image à l'esprit, et surtout au jugement que l'esprit se forme de cette image. Or, ces choses
>
> offrant des différences marquées soit chez différentes personnes, soit chez la même personne à diverses époques, il n'est pas étonnant que ce qui plaît aux uns, puisse déplaire aux autres.

Euler prévoit donc l'objection résultant de la relativité subjective de la perception par les sens et du jugement que l'esprit porte sur cette perception :

> § 4. Nous répondrons que le musicien doit se conduire comme l'architecte qui, s'inquiétant peu des mauvais jugements que porte sur les édifices la multitude ignorante, construit suivant des lois certaines et fondées sur la nature, et se contente de l'approbation des personnes éclairées en cette matière. En musique, comme dans tous les beaux-arts en général, il faut se régler d'après l'opinion de ceux qui possèdent à la fois un excellent goût et beaucoup de jugement, et conséquemment ne tenir compte que de l'avis des personnes qui, ayant reçu de la nature une oreille délicate, perçoivent de plus avec justesse tout ce que cet organe leur transmet, et sont capables d'en juger sainement.

Euler prend parti avec une lucidité ironique : il doit y avoir une science de la musique et, conséquemment on doit rejeter les arguments fondés sur des raisons contingentes et subjectives comme l'habitude et l'accoutumance. On peut penser que cette présentation cache un raisonnement a posteriori : je vais construire un modèle mathématique de la musique, d'ailleurs celui-ci va me permettre d'expliquer beaucoup de choses, alors j'ai besoin d'un axiome pour fonder ma théorie selon le schéma hypothético-déductif. Si cela était le cas, cette démarche ne serait pas différente de celle de tous les mathématiciens depuis Pythagore (géométrie euclidienne, nombres réels, etc.) jusqu'à Gauss (non compris).

2,3) D'où vient l'agrément, comment le mesurer ?

Ces questions, qui ne concernent pas que la musique, Euler est allé les poser aux "métaphysiciens" (il ne dit pas lesquels) :

> § 7. En consultant les métaphysiciens que cette recherche concerne plus particulièrement, nous avons trouvé que tout ce qui, à notre sentiment, possède une certaine perfection, nous plait, et nous plait d'autant plus que cette perfection nous paraît plus grande; et qu'au contraire, les choses dans lesquelles nous découvrons un manque de perfection ou une imperfection, nous déplaisent. Il est certain que toute perfection fait naitre le plaisir, et que c'est une propriété commune à tous les esprits, aussi bien de se réjouir à la découverte et à la contemplation d'un objet parfait, que d'éprouver de l'aversion pour ce qui manque de perfection ou que des imperfections dégradent.
>
> § 8. Or, nous regardons une chose comme parfaite, lorsque nous la trouvons constituée de manière que tout en elle concourt vers le but de sa destination; nous y découvrons un défaut de perfection, quand il y a en elle certaines parties qui s'en éloignent; enfin, si nous y remarquons des parties qui s'opposent à l'effet des autres, nous disons qu'il y a imperfection. Dans le premier cas, la chose que nous considérons nous plaît, dans le dernier elle nous déplaît. Prenons pour exemple une horloge dont la destination est de marquer les divisions du temps; elle nous plaira au plus haut degré, si l'examen de la structure nous fait comprendre que les différentes parties en sont tellement disposées et combinées, que toutes concourent à indiquer le temps avec exactitude.
>
> § 9. Ainsi dans toute chose où il y a de la perfection, il y a nécessairement aussi de l'ordre. Car, puisque la perfection exige que toutes les parties soient disposées entre elles de manière qu'elles concourent au même but, ce but règle nécessairement la disposition des parties et assigne à chacune la place qu'elle doit occuper; or, cette disposition, c'est l'ordre. Réciproquement, on peut dire que là où il y a de l'ordre, il y a de la perfection, et que la règle ou la loi de l'ordre répond au but qui marque la perfection. Telle est la raison de l'agrément ou de l'ennui que nous trouvons dans les choses, selon qu'elles présentent de l'ordre ou qu'il n'y en a point.

Ensuite Euler étudie la manière dont la notion d'agrément peut être étendue d'un objet à un ensemble d'objets.

> § 12. Ainsi nous trouvons agréable tout objet dans lequel l'ordre se manifeste ; mais notre plaisir augmente avec le nombre de pareils objets, et il devient extrême quand, outre l'ordre qui existe dans chacun, nous découvrons en même temps celui qui règne entre les objets eux-mêmes. Il suit de là que si l'ordre de quelques-uns des objets que nous considérons, nous échappe, notre plaisir est diminué, et que si aucun ordre ne nous apparait, nous n'éprouvons non plus aucun plaisir. Enfin, quand ce dernier cas arrive, et que nous trouvons en outre qu'il existe sans raison dans l'objet certaines choses qui troublent l'ordre dont il est susceptible, alors il nous déplait et nous cause pour ainsi dire du chagrin.

Mais quel est cet ordre qui est à la base de la perfection, donc de l'agrément ?

"Dans les sons il y a deux choses principales où l'ordre peut se manifester : l'une est la hauteur des sons, représentée par le grave et l'aigu, l'autre est la durée. Une musique plaît par la hauteur des sons, si nous saisissons l'ordre qui règne dans le grave et l'aigu ; elle plaît par la durée, si nous comprenons l'ordre que présentent les sons sous ce rapport. Outre ces deux conditions, il n'y a rien dans les sons qui soit apte à contenir de l'ordre, si ce n'est peut-être leur intensité : mais quoique les musiciens emploient l'intensité de manière à rendre les sons tantôt plus faibles, tantôt plus forts, cependant ils ne cherchent à tirer aucun agrément de la perception de l'ordre qui existe dans les différents degrés d'intensité, etc".

> § 18. Deux sons étant donnés, nous connaitrons la relation qui existe entre eux, si nous pouvons saisir le rapport du nombre de vibrations effectuées pour l'un, au nombre de vibrations effectuées pour l'autre dans le même temps. Par exemple, s'il se faisait 5 vibrations pour le premier, pendant que pour le second il y en aurait 2 ; nous connaitrions leur relation et par conséquent leur ordre, en observant le rapport des nombres 5 et 2 qui est 5 : 2. Il en serait de même si au lieu de deux sons, il fallait en comparer un plus grand nombre. Une autre source d'agrément résulte aussi de la perception des rapports entre les durées des sons, susceptibles également d'une expression numérique. Il est donc clair que tout plaisir que nous fait éprouver la musique, doit son origine à la connaissance des rapports de plusieurs nombres entre eux.
>
> § 19. L'appréciation des rapports entre les sons, est singulièrement facilitée par cette circonstance que nous percevons plusieurs vibrations de chacun, et qu'ainsi nous pouvons,

pendant leur durée, les comparer plusieurs fois l'un à l'autre. Il est donc bien plus aisé de distinguer par l'ouïe le rapport de deux sons, que de reconnaître par la vue le même rapport entre deux lignes. Il en serait du rapport des sons comme de celui des lignes, si nous ne percevions que deux vibrations pour chacun, et que nous fussions obligés de nous baser là-dessus pour juger du rapport de leurs intervalles. Mais comme pour les sons dont la durée n'est pas très-courte, il se fait un grand nombre de vibrations en peu de temps, ainsi qu'on l'a vu dans le premier chapitre où nous avons traité du nombre des vibrations d'une corde pendant une seconde, l'appréciation des rapports qu'ils présentent, en devient beaucoup plus facile. Voilà pourquoi dans la musique on peut faire usage de rapports très-compliqués, que l'œil reconnaîtrait avec la plus grande peine, s'ils étaient représentés par des lignes.

§ 20. Les sons graves donnant moins de vibrations que les sons aigus dans le même temps, il est clair que le rapport des premiers considérés entre eux doit être plus difficile à saisir que celui des seconds. Il faut donc, toutes choses égales d'ailleurs, que les sons graves aient plus de durée et se succèdent plus lentement que les sons aigus, tandis que ceux-ci peuvent se suivre avec assez de rapidité. Règle générale, il faut donner plus de durée aux sons graves qu'aux sons aigus, et les uns et les autres doivent être prolongés d'autant plus que les rapports qui existent entre eux sont plus compliqués et plus difficiles à saisir. Il peut donc aussi arriver que les sons aigus doivent se succéder avec plus de lenteur que les sons graves; tel est le cas où les rapports des derniers sont simples, tandis que ceux des premiers deviennent fort compliqués.

§ 21. Pour faire mieux comprendre comment on reconnaît l'ordre ou le rapport de deux ou de plusieurs sons, nous allons tâcher d'en faire pour la vue une figure semblable. Nous représenterons les vibrations qui frappent l'oreille, par des points placés en ligne droite, et dont les intervalles correspondront aux intervalles des vibrations, ainsi que la disposition ci-contre en offre des exemples. De cette manière deux sons égaux, c'est-à-dire deux sons qui ont le même degré de grave ou d'aigu pendant toute leur durée, seront représentés par deux suites de points équidistants, comme dans la figure 1.

Dans ces suites le rapport de l'égalité se manifestant partout aux yeux, il n'y a pas de doute qu'on ne puisse comprendre avec la plus grande facilité l'ordre qui règne entre elles. Des sons égaux ou l'unisson, suivant l'expression ordinaire, constitue donc le premier et le plus simple degré de l'ordre; nous le nommerons le premier degré d'agrément : il est exprimé numériquement par le rapport 1 : 1.

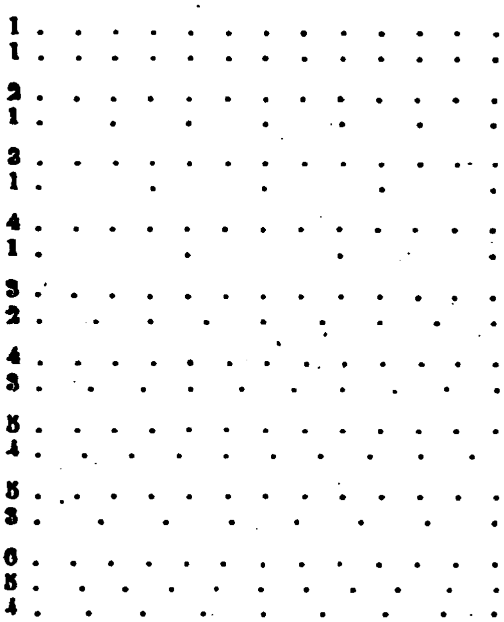


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Ensuite Euler définit, d'une manière quelque peu arbitraire le degré d'agrément d'un intervalle :

$$\begin{array}{ccc} 1/1 & \{2/1,\ 1/2\} & \{4/1,\ 1/4\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

d'une manière générale si

$$e = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$$

est un entier positif décomposé en produit de nombres premiers (les p_i), le degré d'agrément de e sera par définition :

$$d(e) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i p_i - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i + 1.$$

On voit donc que $e \longmapsto d(e)-1$ est un morphisme du monoïde $(\mathbb{N}^*, \times)$ dans $(\mathbb{N}, +)$. On peut penser que Euler a ajouté 1 pour que $d(p) = p$ lorsque p est est un nombre premier.

Remarques : 1) Cette notion est d'une extrême généralité et s'applique à tous les objets qui peuvent être mesurés par des nombres rationnels, comme les durées musicales, les proportions architecturales, etc. Euler semble bien en être conscient.

2) Beaucoup d'autres fonctions d pourraient être proposées, en ces sens la méthode d'Euler n'est pas entièrement hypothético-déductive.

2,4) Définition de la musique.

Nous avons déjà cité la première définition d'Euler, mais cette définition est incomplète et Euler la reprend plus loin : "la musique est la science de combiner les sons de manière qu'il en résulte une harmonie agréable" (les mots sont soulignés par moi).

Euler se charge donc de définir le concept d'harmonie pour qu'il en résulte de l'agrément.

La science musicale, selon Euler, sera finalement de l'arithmétique appliquée (comme nous allons le voir dans un instant) et un objet musical pour Euler sera un simple objet arithmétique.

Cette définition va à l'extrême limite de l'intellectualisation et Euler en est bien conscient :

> . § 2. On divise ordinairement la musique en deux parties : l'une théorique et l'autre pratique. La première, désignée sous le nom d'harmonie, donne des préceptes pour la composition; la seconde, qui enseigne à produire avec la voix ou à l'aide d'instruments, des sons déterminés, conserve seule, en général, le nom de musique. On comprend d'après cela que la partie théorique est la partie principale, puisque sans elle l'autre ne peut avoir d'objet; mais pour parvenir au but, qui est de charmer l'oreille, le concours de celle-ci n'est pas moins nécessaire. Comme la partie pratique n'est autre chose que l'art de se servir des instruments de musique, elle n'appartient pas à notre sujet et nous ne nous en occuperons pas.

Quant à la matière sonore elle-même, Euler en parle brièvement dans le chapitre 1. Mais il ne faut pas oublier qu'il était le plus grand acousticien du XVIIIème siècle ([1] acoustics) et que, s'il a laissé une oeuvre immense dans ce domaine, c'est ailleurs.

L'Essai n'est pas un traité d'acoustique, mais une théorie de la musique considérée comme art de l'harmonie (et non art des sons)

2,5) Le concept d'harmonie selon Euler.

L'harmonie concerne les accords, les successions d'accord, les morceaux, les modes, les rythmes.

Pour Euler les hauteurs des sons doivent être représentées par des rationnels, l'ouïe entend des rationnels. Il étend aussi ce principe aux durées.

Si on représente ces rapports par des entiers premiers entre eux dans leur ensemble (pour les hauteurs, respectivement les durées) l'ensemble sera d'autant plus harmonieux que le plus petit commun multiple de ces nombres sera petit. Euler appelle ce nombre l'exposant de l'objet musical considéré. C'est donc une fonction du point projectif associé à cet objet.

"Pour être à même de juger en parfaite connaissance de cause une oeuvre musicale proposée, il faut donc d'abord examiner tous les accords et chercher leurs exposants ; ensuite considérer les successions de deux accords quelconques ; puis s'occuper de l'ensemble des accords que renferme un mode ;

quatrièmement étudier les successions de deux modes ou le passage d'un mode à un autre ; enfin examiner l'ensemble de tous les modes qui composent l'oeuvre musicale" (chapitre 6, §26, voir aussi §15).

Ceci est en fait le plan et le programme de l'Essai. Est-ce à dire qu'une oeuvre musicale reste aussi harmonieuse lorsqu'elle est jouée à l'envers ? Euler ne paraît pas avoir pensé à cette objection, mais dans le chapitre 2, §9 il fait référence à la notion d'ordre : "Ainsi dans toute chose où il y a de la perfection, il y a nécessairement aussi de l'ordre". Quant à la notion d'ordre, il la précise ainsi dans le chapitre 3.

§8. Un morceau de musique doit être en tout point semblable à un discours en prose ou en vers. Ici il ne suffit pas de joindre ensemble des mots élégants, des phrases sonores; il faut du choix dans ces mots, de l'ordre dans les idées et de l'art dans la succession des arguments. De pareilles conditions sont aussi imposées en musique. Il n'y aurait pas grand plaisir à entendre une longue suite d'accords, lors même que chacun, pris isolément, serait assez agréable, si, comme les phrases d'un discours, ils n'étaient liés dans leurs sens. L'ordre y est donc indispensable, et pour l'obtenir il faut avoir égard au degré donné de facilité ou de difficulté à le reconnaître. Ainsi, d'après le but qu'on se propose, on ménagera avec soin les passages gais ou tristes, on renforcera telle partie et on simplifiera telle autre.

D'autre part le meilleur exposant possible est le nombre 1, mais une oeuvre musicale ne peut être bâtie sur une seule note ; elle serait absurdement monotone (surtout si le rythme devait aussi avoir un exposant égal à 1).

Dans le chapitre XIII, §26, Euler reconnaît que "la musique charme beaucoup par la variété". Donc tout l'art musical consiste en un équilibre subtil entre deux pôles : l'harmonie d'un côté (dont la caricature conduit à la monotonie et à l 'uniformité), la variété de l'autre (dont la caricature conduit à la dissonance et au chaotique).

2,6) Les objets musicaux.

Un objet musical pour Euler est donc un objet arithmétique que l'on étudie sous un angle particulier :

"Ainsi nous trouvons agréable tout objet dans lequel l'ordre se manifeste ; mais notre plaisir augmente avec le nombre de pareils objets, et il devient extrême quand, outre l'ordre qui existe dans chacun, nous découvrons en même temps celui qui règne entre les objets eux-mêmes".

Il s'agit donc d'un plaisir essentiellement intellectuel qui rappelle beaucoup ce qui dit E. Artin ([8] p.534) pour les mathématiques*:

"Nous pensons tous que les mathématiques sont un art. L'auteur d'un livre, resp. le professeur dans sa classe, essaie de transmettre à ses lecteurs, resp. auditeurs, le sens de la beauté structurelles des mathématiques. Dans cette entreprise il échouera toujours. Certes les mathématiques sont logiques : chaque conclusion est tirée des résultats qui précèdent. Cependant la totalité de l'affaire, l'oeuvre d'art véritable, n'est pas linéaire ; et, ce qui est bien pire, sa perception ne peut-être qu'instantanée. Nous avons tous éprouvé, en de rares occasions, une impression d'exaltation en réalisant que nous avions permis à nos auditeurs de voir, l'espace d'une seconde, l'architecture complète d'une question, et toutes ses ramifications. Comment peut-on y parvenir ?

Nous avons dit que pour Euler un morceau de musique doit être semblable à un discours en prose ou en vers.

Il en résulte que l'on doit pouvoir "Comprendre" une oeuvre musicale aussi bien que la démonstration d'un théorème.

Euler franchit le pas avec légèreté (ch. 6, §14) :

"La difficulté de comprendre l'exposant d'une succession de deux accords, ne doit pas être estimée d'après l'exposant même..., mais bien d'après l'ordre de succession".

Euler réduit donc le plaisir musical à des concepts intellectuels ce qui lui permet de caractériser sa méthode :

"Tout ce qui concerne la musique pouvant ainsi dériver de principes dont la vérité est suffisamment démontrée, la méthode que nous suivrons sera tout à fait rationnelle et philosophique. Personne que je sache n'a employé cette méthode avant nous".

*Ce point de vue n'aurait sans doute pas été désavoué par Novalis!

Et il fait ainsi du sensible "un simple point d'appui pour les généralisations de la connaissance abstraite" (G. Gusdorf [3] p.398).

2,7) Le sujet.

Mais Euler n'est pas assez naïf pour croire que toute personne soit également apte à "comprendre" une oeuvre musicale (ch. 6, §16) :

"Ce qui précède montre clairement comment une oeuvre musicale doit être composée pour qu'elle plaise à des auditeurs intelligents ; il fait comprendre en même temps que les morceaux de musique dans lesquels on a péché contre nos préceptes, doivent déplaire à de tels auditeurs. Il est également facile de concevoir pourquoi des morceaux imparfaits plaisent à des personnes moins intelligentes ; c'est qu'elles ne remarquent pas les imperfections et les fautes commises contre les préceptes de l'harmonie, tandis qu'elles découvrent et apprécient les passages qui sont conformes à ces préceptes". En conséquence, il vaut mieux ne pas être trop "intelligent" ! Ici Euler semble donc aller plus loin que Leibniz ("La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte - Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare).

Mais vers la fin de sa vie (en 1766) Euler revient sur cette question et apporte une précision importante, de nature topologique, à l'affirmation de Leibniz :

"Je remarque d'abord qu'il faut distinguer les proportions que nos oreilles perçoivent actuellement de celles que des sons exprimés en nombres renferment.

L'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour une proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence est quasi imperceptible.

Plus la proportion est simple, plus notre sentiment est sensible et distingue de plus petites aberrations".

Ces remarques sont à la base de la théorie que j'ai construite dans [9] en passant au quotient des proportions "que les sons renferment" modulo les "différences quasi imperceptibles".

3) Les genres eulériens et le genre diatonico-chromatique.

3,1) Enoncé du problème à résoudre.

Le problème que se pose Euler est de connaître les fréquences des sons que doit émettre un instrument pour jouer toutes les oeuvres imaginables en respectant le principe d'harmonie : il s'agit de définir les tempéraments qui seront les plus utiles aux compositeurs. Il est clair qu'Euler pense surtout aux instruments à sons fixes et même à clavier (il donne une méthode d'accord dans le ch. IX, §13 et parle de doubler les "touches" dans le ch. X, §15).

D'autre part Euler souhaite que tous les octaves aient le même nombre de notes et que leurs fréquences se correspondent modulo le groupe multiplicatif engendré par 2 .

3,2) Définition des genres eulériens.

Euler se donne un genre de musique par un exposant A qui est un élément du monoïde engendré par 3 et 5.

Il classe ces éléments de la manière suivante :

$$1,\ \underbrace{3,\ 5,}\ \underbrace{3^2,\ 3.5,\ 5^2,}\ \underbrace{3^3,\ 3^2.5,\ 3,5^2,\ 5^3,}\ \text{etc.}$$

A étant donné, Euler définit les fréquences des notes de l'octave $[1,2[$ par une méthode qui équivaut à la suivante.

Pour chaque diviseur d de A, on considère la partie entière $n(d)$ de $\mathrm{Log}_2(d)$ et associe une note de fréquence :

$$\frac{d}{2^{n(d)}}$$

on a donc :

$$1 \leq \frac{d}{2^{n(d)}} < 2.$$

Le nombre des notes dans une octave est clairement égal à $\sigma_o(A)$:= nombre des diviseurs de A.

Si $A = 3^{\alpha} 5^{\beta}$, on a $\sigma_o(A) = (\alpha+1)(\beta+1)$.

Remarque :

En fait Euler ne considère que des fréquences entières car il multiplie toutes les fractions précédentes par leur plus petit dénominateur commun. Cela n'a aucune importance ici, car on considère en fait des points projectifs (on ne fixe pas l'unité de fréquence : fixer les unités était une opération considérée comme arbitraire à l'époque d'Euler, ne mesurait-il pas les distances en pieds du Rhin alors qu'il vivait à St Pétersbourg ?).

Puis Euler range les intervalles par ordre croissant et leur donne des noms avec une sûreté de somnambule, en se frayant un chemin à travers une véritable jungle de termes musicaux, on y reviendra... Les premiers genres qu'Euler considère sont très harmonieux mais d'une simplicité proche de l'indigence. Arrivé au dix-huitième genre, c'est-à-dire à $A = 3^3.5^2$, Euler s'émerveille (préface de l'Essai) :

"Notre dix-huitième genre est absolument le même que le genre diatonico-chromatique principalement employé aujourd'hui ; il contient en effet dans une octave douze sons séparés l'un de l'autre par des intervalles presqu'égaux qui sont des demi-tons et des limmas majeurs et mineurs..

Bien que depuis longtemps ce genre soit consacré par l'usage, cependant les musiciens n'ont cessé d'y faire des changements afin de le rendre plus agréable à l'oreille, et ils ont si bien réussi que la disposition de sons qui obtient le plus d'approbation, ne s'éloigne de la vraie harmonie que par le seul son marqué la$^{\#}$ = si^{b}, et qu'ainsi ils sont parvenus à un degré de concordance auquel on aurait à peine pu espérer d'atteindre avec le secours seul de l'ouïe".

Voici le dix-huitième genre d'Euler (dans notre notation et celle d'Euler) : ici $A = 3^3.5^2$. Les fréquences sont rangées dans l'ordre croissant.

d	1	$3^3.5$	3^2	3.5^2	5	$3^3.5^2$	$3^2.5$	3	5^2	3^3	$3^2.5^2$	3.5
$n(d)$	0	7	3	6	2	9	5	1	3	4	7	2
$d/_2n(d)$	1	$3^3.5/2^7$	$3^2/2^3$	$3.5^2/2^6$	$5/2^2$	$3^3 5^2/2^9$	$3^2.5/2^5$	$3/2$	$5^2/2^3$	$3^3/2^4$	$3^2.5^2/2^7$	$3.5/2$
fréquence entière d'Euler	2^9	$2^2.3^3.5$	$2^6.3^2$	$2^3.3.5^2$	$2^7.5$	$3^3.5^2$	$2^4.3^2.5$	$2^8.3$	$2^6.5^2$	$2^5.3^3$	$2^2.3^2.5^2$	$2^8.3.5$

Euler est tellement content d'avoir trouvé ce genre, qu'il lui donne un nom nouveau, il l'appelle le genre diatonico-chromatique car il contient le genre chromatique (d'exposant $A = 3^2.5^2$) et le genre diatonique (d'exposant $A = 3^3.5$).

Par acquis de conscience Euler examine quelques genres de rang plus élevé et constate qu'ils ne présentent aucun avantage décisif sur le dix-huitième genre (au passage il rencontre des intervalles nouveaux qu'il continue à désigner avec la même sûreté de somnambule).

Notons toutefois le genre d'exposant $A = 3^7.5^2$ qui jouera un rôle dans la suite.

Ici $\sigma_o(A) = 24$, donc il y a 24 notes dans une octave. Euler constate que chaque note se trouve doublée par une note très voisine et que ce genre ne diffère du genre diatonico-chromatique que de manière imperceptible. Nous reviendrons plus loin sur la manière dont Euler a donné un nom aux notes de ce genre.

Voici les notes du genre d'exposant $3^7.5^2$ ("extension du genre diatonico-chromatique") classées en paires par Euler :

$\frac{d}{2^{n(d)}}$	1	$\frac{3^3.5}{2^7}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3.5^2}{2^6}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3^3.5^2}{2^9}$	$\frac{3^2.5}{2^5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^2.5^2}{2^7}$	$\frac{3.5}{2^3}$
$\frac{d'}{2^{n(d')}}$	$\frac{3^4.5^2}{2^{11}}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^6.5^2}{2^{14}}$	$\frac{3^5.5}{2^{10}}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^7.5}{2^{12}}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^5.5^2}{2^{12}}$	$\frac{3^4.5}{2^8}$	$\frac{3^7.5^2}{2^{15}}$	$\frac{3^6.5}{2^{11}}$	$\frac{3^5}{2^7}$

Si un instrument était construit conformément à ce genre, il faudrait "qu'à chaque touche répondent deux sons".

Remarque :

Pour une méthode d'accord (celle d'Euler) dans le genre diatonico-chromatique voir le §5.

4) Théorie de l'harmonie dans le genre diatonico-chromatique.

4,1) Considérations générales.

La théorie eulérienne de l'harmonie comporte une partie que j'appellerai "pure", c'est-à-dire sujette à aucune restriction autre que celle du principe d'harmonie, et une partie "impure", c'est-à-dire proprement humaine, où interviennent des limites liées à la physiologie de l'ouïe ("tout ce qui affecte les sens repousse l'idée de l'infini") :

a) On choisit le genre diatonico-chromatique.

b) Le registre des voix ou instruments est limité à 4 octaves.

c) Le degré d'agrément des accords est limité au douzième : "nous considérons tous les accords qui dépassent le 12ème degré comme illicites et bannis d'une bonne musique".

Remarques :

1) Euler prend des libertés avec la partie "impure" de sa théorie et il lui arrive de recommander des accords de degré supérieur à 12 (ch. XIII,§29).

2) Toute cette théorie est indépendante du choix des noms des notes et de la notation musicale. Si on utilise cette dernière ce n'est que pour des raisons de commodité.

4,2) Accords.

Un genre d'accord (dans le genre diatonico-chromatique sera defini par un exposant A divisant l'exposant du genre :

$$A \text{ divise } 3^3.5^2$$

(Euler utilise la notation $2^n.3^3.5^2$ avec n indéterminé).

Il y a donc $\sigma_0(3^3.5^2) = 12$ genres d'accords. Les accords d'un même genre auront des exposants du type :

$$A,\ 2A,\ 2^2A,\ \text{etc.}$$

où l'exposant de 2 ne devra pas dépasser certaines limites "humaines".

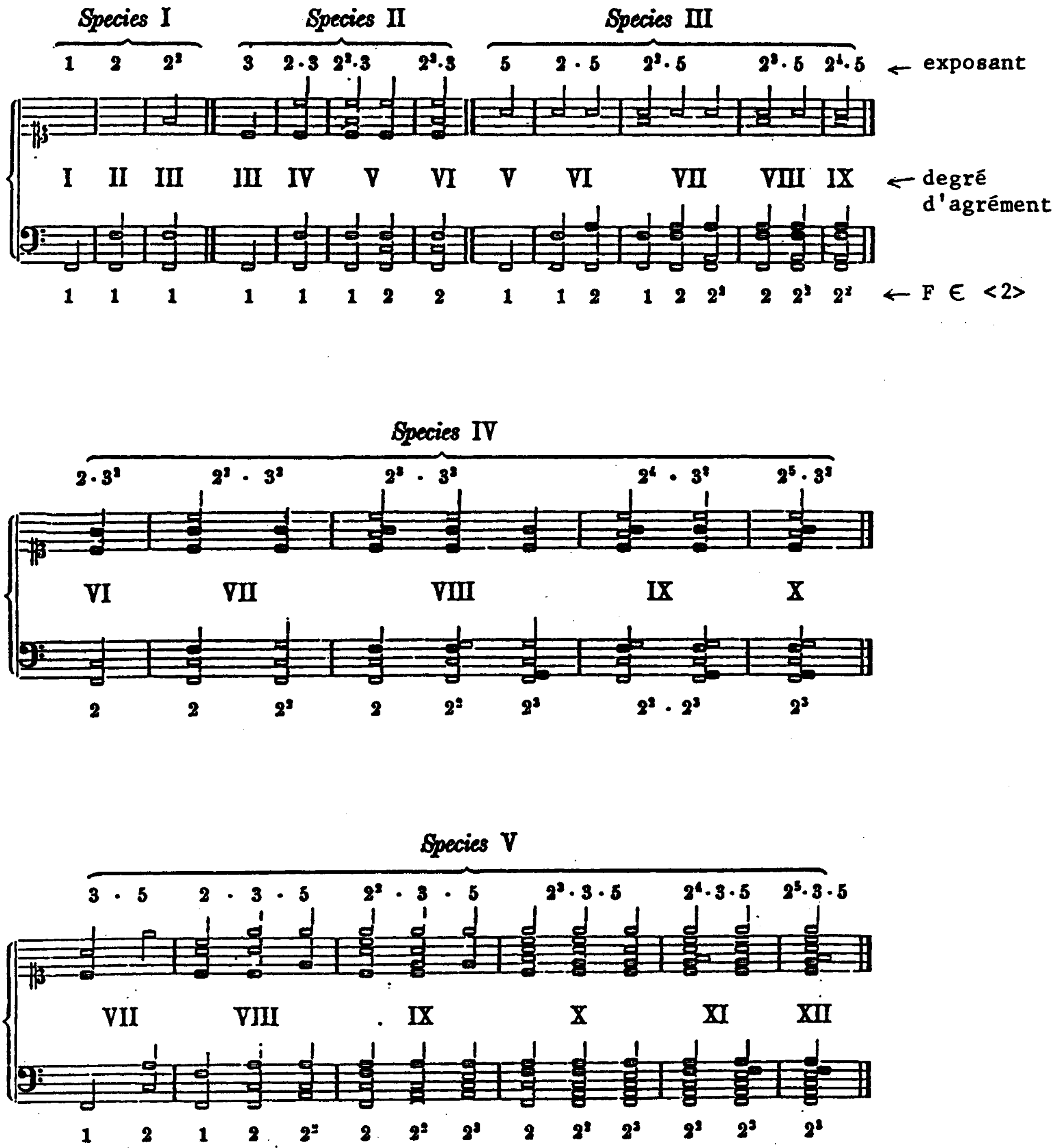
Chaque accord pourra être "varié" c'est-à-dire transposé. On pourra donc représenter un accord par le symbole $2^nA(i)$ où 2^nA est l'exposant de l'accord et où i, l'<u>indice</u> de l'accord, est un nombre entier qui repère la fréquence de la base de l'accord.

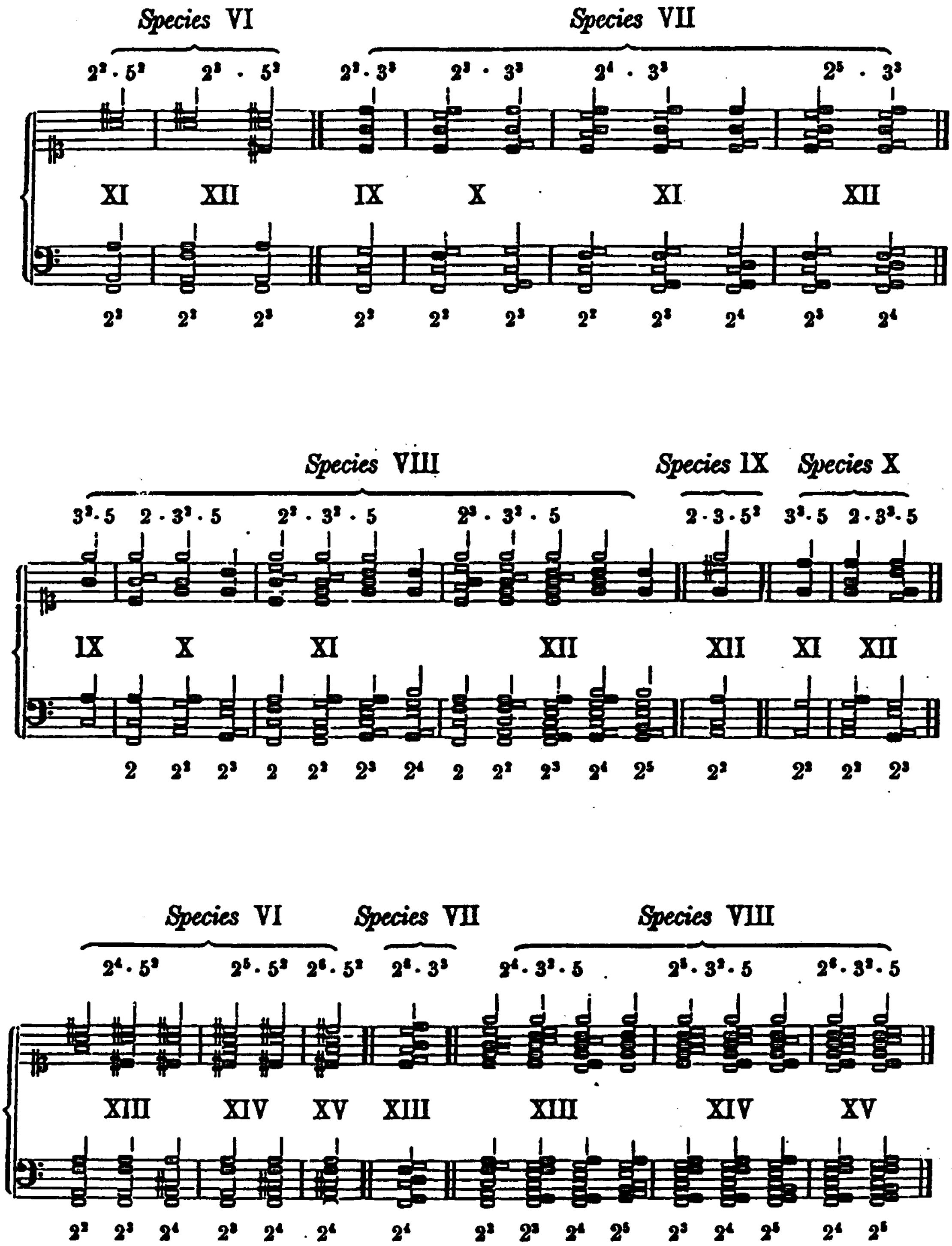
Euler impose une règle d'harmonie : Ai doit diviser $3^7.5^2$ (exposant de l'extension du genre diatonico-chromatique) à une puissance de 2 près.

Tableau des genres :

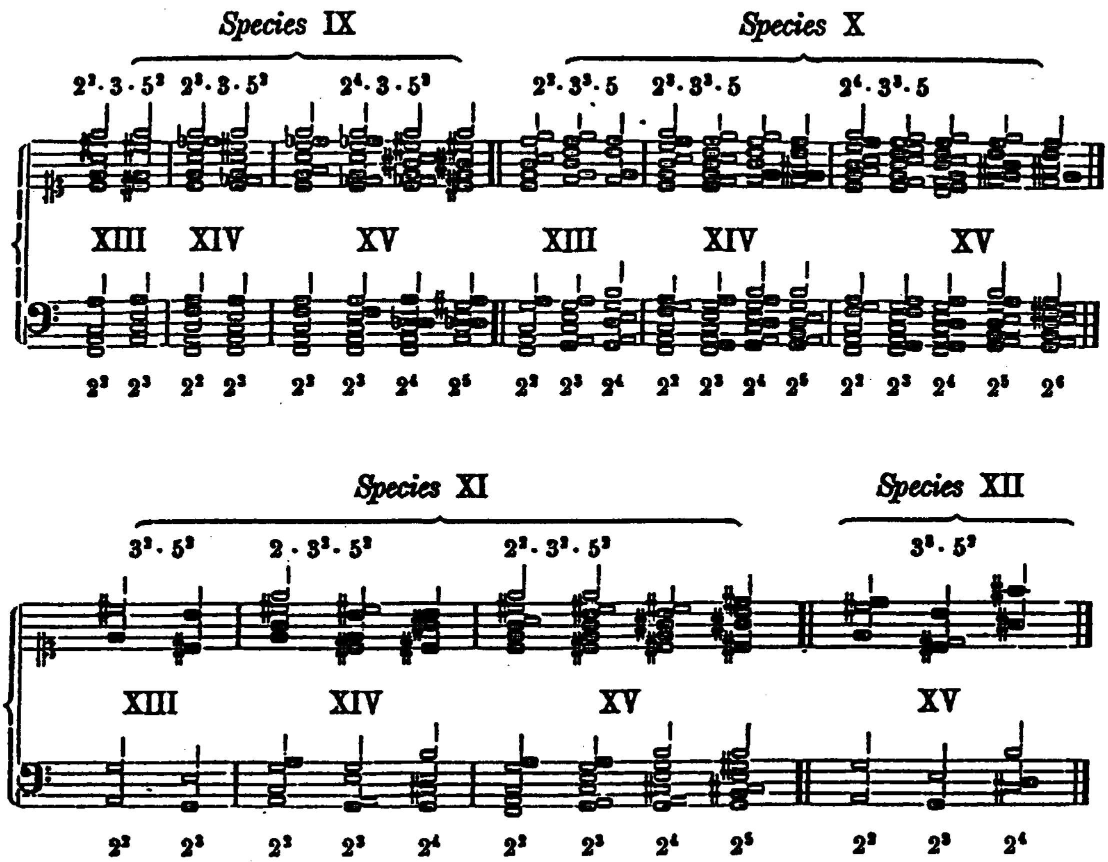
	Exposant	caractéristiques musicales	
I	1	trivial car dépourvu de variété	musique
II	3	recommandé pour l'accord des instruments	à deux voix
III	5	analogue	
IV	3^2	usage fréquent	musique
V	3.5	triades harmoniques	à plusieurs voix
VI	5^2	accords très durs	
VII	3^3	plus supportables	
VIII	$3^2.5$		
IX	3.5^2	durs	
X	$3^3.5$		
XI	$3^2.5^2$	dépassent le douzième degré d'agrément	
XII	$3^3.5^2$		

Et Euler donne le tableau de tous les accords possibles jusqu'au douzième genre dans la limite de quatre octaves.


Species I
Species II
Species III
1 2 2^2 3 $2\cdot3$ $2^2\cdot3$ $2^3\cdot3$ 5 $2\cdot5$ $2^2\cdot5$ $2^3\cdot5$ $2^4\cdot5$
← exposant
I II III III IV V VI V VI VII VIII IX
← degré d'agrément
1 1 1 1 1 1 2 2 1 1 2 1 2 2^2 2 2^2 2^2
← F ∈ <2>
Species IV
$2\cdot3^2$ $2^2\cdot3^2$ $2^3\cdot3^2$ $2^4\cdot3^2$ $2^5\cdot3^2$
VI VII VIII IX X
2 2 2^2 2 2^2 2^3 $2^2\cdot2^3$ 2^3
Species V
$3\cdot5$ $2\cdot3\cdot5$ $2^2\cdot3\cdot5$ $2^3\cdot3\cdot5$ $2^4\cdot3\cdot5$ $2^5\cdot3\cdot5$
VII VIII IX X XI XII
1 2 1 2 2^2 2 2^2 2^3 2 2^2 2^3 2^2 2^3 2^3


Species VI
Species VII
2²·5² 2³ · 5² 2²·3³ 2³ · 3³ 2⁴ · 3³ 2⁵ · 3³
XI XII IX X XI XII
2³ 2³ 2³ 2² 2² 2³ 2² 2³ 2⁴ 2³ 2⁴
Species VIII
Species IX
Species X
3²·5 2·3²·5 2²·3²·5 2³·3²·5 2·3·5² 3²·5 2·3²·5
IX X XI XII XII XI XII
2 2² 2³ 2 2² 2³ 2⁴ 2 2² 2³ 2⁴ 2⁵ 2² 2² 2² 2³
Species VI
Species VII
Species VIII
2⁴·5² 2⁵·5² 2⁶·5² 2⁶·3³ 2⁴·3²·5 2⁵·3²·5 2⁶·3²·5
XIII XIV XV XIII XIII XIV XV
2² 2³ 2⁴ 2³ 2⁴ 2⁴ 2⁴ 2² 2³ 2⁴ 2⁵ 2³ 2⁴ 2⁵ 2⁴ 2⁵

DE CONSONANTIIS IN GENERE DIATONICO-CHROMATICO 343



Remarque :

Le traité d'Euler contient aussi quelques considérations simples sur la manière de réaliser une basse chiffrée.

4,3) Modes.

Un mode, selon Euler, n'est autre chose que l'exposant d'une série d'accords (à 2^n près). Si cette série est formée d'accords appartenant aux genres $A_1,\dots,A_s$, M est donc le plus petit commun multiple de $A_1,\dots,A_s$:

$$M = [A_1,\dots,A_s]$$

Dans le genre diatonico-chromatique Euler impose une règle d'harmonie suivante : M divise $3^3.5^2$.

Il n'y a donc que douze modes possibles :

M		caractéristiques	
1			
3			
5		trop simples	
2^3			
3.5			
5^2			
3^3	I		
$3^2 5$	II	plain-chant	
3.5^2	III		
$3^3.5$	IV	mode majeur	
$3^2.5^2$	V	mode mineur	musique moderne
$3^3.5^2$	VI	toute la gamme chromatique	

Naturellement il faut pouvoir transposer les modes, d'où l'écriture M(i) où M est l'exposant du mode et où i désigne la fréquence de la <u>tonique</u> du mode (à 2^n près).

Dans le genre diatonico-chromatique, Euler impose la <u>règle d'harmonie</u> suivante : Mi divise $3^7.5^2$ (si Mi divise $3^3.5^2$, Euler dit que la transposition est "pure"). On verra plus loin (paragraphe 6) comment Euler envisage la théorie de la transposition.

Un mode d'exposant M étant donné, sa réalisation conduit à choisir une <u>espèce</u> qui lui appartienne, c'est-à-dire un exposant $2^n M$ avec n donné.

Une espèce étant donnée, Euler s'intéresse à sa réalisation dans les limites "humaines" : comment choisir la fréquence du F fondamental (fa fondamental) dans le monoïde engendré par 2, pour que l'ensemble $[C,\overset{\equiv}{c}] \cap$ espèce ne soit pas vide (ici $[C,\overset{\equiv}{c}]$ représente l'intervalle de référence de 4 octaves) : cela conduit à étudier les <u>systèmes</u> appartenant à l'espèce donnée.

Naturellement tous les systèmes appartenant à une espèce donnée n'ont pas le même nombre de notes et Euler établit le tableau de tous les systèmes possibles pour tous les douze modes possibles.

Il faut remarquer que ce tableau peut aussi être interpréter comme le tableau des accords possibles dans les mêmes limites.

Pour donner une idée de l'étendue du travail d'Euler on se borne à donner la partie de ce tableau qui est relative à $M = 3.5$.

Si on interprète 3.5 comme un genre d'accords, alors c'est celui des triades harmoniques.

<u>Remarque sur le nom des notes</u> :

Euler désigne les noms des notes comme on le fait en Allemagne. Voici une traduction française :

Dénomination française.	1re *Octave.*	2me *Octave*	3me *Octave.*	4me *Octave.*	5me *Octave.*	6me *Octave.*
Ut	*C*	*c*	$\overline{c}$	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{\overline{c}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}}$
Ut dièse	*Cs*	*cs*	$\overline{cs}$	$\overline{\overline{cs}}$	$\overline{\overline{\overline{cs}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{cs}}}}$
Ré	*D*	*d*	$\overline{d}$	$\overline{\overline{d}}$	$\overline{\overline{\overline{d}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{d}}}}$
Ré dièse	*Ds*	*ds*	$\overline{ds}$	$\overline{\overline{ds}}$	$\overline{\overline{\overline{ds}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{ds}}}}$
Mi	*E*	*e*	$\overline{e}$	$\overline{\overline{e}}$	$\overline{\overline{\overline{e}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{e}}}}$
Fa	*F*	*f*	$\overline{f}$	$\overline{\overline{f}}$	$\overline{\overline{\overline{f}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{f}}}}$
Fa dièse	*Fs*	*fs*	$\overline{fs}$	$\overline{\overline{fs}}$	$\overline{\overline{\overline{fs}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{fs}}}}$
Sol	*G*	*g*	$\overline{g}$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{\overline{g}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{g}}}}$
Sol dièse	*Gs*	*gs*	$\overline{gs}$	$\overline{\overline{gs}}$	$\overline{\overline{\overline{gs}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{gs}}}}$
La	*A*	*a*	$\overline{a}$	$\overline{\overline{a}}$	$\overline{\overline{\overline{a}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{a}}}}$
La dièse	*B*	*b*	$\overline{b}$	$\overline{\overline{b}}$	$\overline{\overline{\overline{b}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{b}}}}$
Si	*H*	*h*	$\overline{h}$	$\overline{\overline{h}}$	$\overline{\overline{\overline{h}}}$	$\overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}$

CONSONANTIAE $2^n\cdot3\cdot5$

Variationes $2^n\cdot3\cdot5(1)$ *Species*	*Formae*
	Si F = 1
$3\cdot5(1)$	$F:\bar{c}:\bar{a}$
$2\cdot3\cdot5(1)$	$F:f:\bar{c}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{a}}$
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$F:f:\bar{c}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$F:f:\bar{c}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{f}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$.
	Si F = 2
$3\cdot5(1)$	$c:a:\bar{\bar{e}}$
$2\cdot3\cdot5(1)$	$F:c:a:\bar{c}:\bar{a}:\bar{\bar{e}}$
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$F:c:f:a:\bar{c}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$F:c:f:a:\bar{c}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$
$2^4\cdot3\cdot5(1)$	$F:c:f:a:\bar{c}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{f}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$.
	Si F = 4
$3\cdot5(1)$	$C:A:\bar{e}$
$2\cdot3\cdot5(1)$	$C:A:c:a:\bar{e}:\bar{\bar{e}}$
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{e}}$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}$
$2^4\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$
$2^5\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{f}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$.
	Si F = 8
$2\cdot3\cdot5(1)$	$C:A:e:\bar{e}$
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$C:A:c:e:a:\bar{e}:\bar{\bar{e}}$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:e:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{e}}$
$2^4\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:e:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}$
$2^5\cdot3\cdot5(1)$	$C:F:A:c:e:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{f}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}:\bar{\bar{\bar{c}}}$.
	Si F = 16
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$C:E:A:e:\bar{e}$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$C:E:A:c:e:a:\bar{e}:\bar{\bar{e}}$
$2^4\cdot3\cdot5(1)$	$C:E:F:A:c:e:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{e}}$
$2^5\cdot3\cdot5(1)$	$C:E:F:A:c:e:f:a:\bar{c}:\bar{e}:\bar{a}:\bar{\bar{c}}:\bar{\bar{e}}:\bar{\bar{a}}$.

Variationes $2^n \cdot 3 \cdot 5(3)$ *Species*	*Formae*
	Si F = 2
$3 \cdot 5(3)$	$c : \bar{g} : \bar{\bar{e}}$
$2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$c : \bar{c} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}}$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$c : \bar{c} : \bar{g} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}}$.
	Si F = 4
$3 \cdot 5(3)$	$C : g : \bar{e} : \bar{\bar{h}}$
$2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : c : g : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : c : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : c : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
	Si F = 8
$3 \cdot 5(3)$	$G : e : \bar{h}$
$2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : G : e : g : \bar{e} : \bar{h} : \bar{\bar{h}}$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
	Si F = 16
$2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$E : G : e : h : \bar{h}$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : e : g : h : \bar{e} : \bar{h} : \bar{\bar{h}}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : c : e : g : h : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : c : e : g : h : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : c : e : g : h : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
	Si F = 32
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$E : G : H : e : h : \bar{h}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : H : e : g : h : \bar{e} : \bar{h} : \bar{\bar{h}}$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : H : c : e : g : h : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5(3)$	$C : E : G : H : c : e : g : h : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.

Variationes $2^n \cdot 3 \cdot 5\,(5)$ *Species*	*Formae*
	Si F — 4
$3 \cdot 5\,(5)$	A : ē : c̿s
$2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : a : ē : c̿s : e̿
$2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : a : ē : ā : c̿s : e̿
$2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : a : ē : ā : c̿s : e̿ : a̿.
	Si F — 8
$3 \cdot 5\,(5)$	e : c̄s : g̿s
$2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : e : c̄s : ē : c̿s : g̿s
$2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : e : a : c̄s : ē : c̿s : e̿ : g̿s
$2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : e : a : c̄s : ē : ā : c̿s : e̿ : g̿s
$2^4 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	A : e : a : c̄s : ē : ā : c̿s : e̿ : g̿s : a̿.
	Si F — 16
$3 \cdot 5\,(5)$	E : cs : ḡs
$2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	E : cs : e : c̄s : ḡs : g̿s
$2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	E : A : cs : e : c̄s : ē : ḡs : c̿s : g̿s
$2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	E : A : cs : e : a : c̄s : ē : ḡs : c̿s : e̿ : g̿s
$2^4 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	E : A : cs : e : a : c̄s : ē : ḡs : ā : c̿s : e̿ : g̿s
$2^5 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	E : A : cs : e : a : c̄s : ē : ḡs : ā : c̿s : e̿ : g̿s : a̿.
	Si F — 32
$2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : cs : gs : ḡs
$2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : cs : e : gs : c̄s : ḡs : g̿s
$2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : A : cs : e : gs : c̄s : ē : ḡs : c̿s : g̿s
$2^4 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : A : cs : e : gs : a : c̄s : ē : ḡs : c̿s : e̿ : g̿s
$2^5 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : A : cs : e : gs : a : c̄s : ē : ḡs : ā : c̿s : e̿ : g̿s.
	Si F — 64
$2^2 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : Gs : cs : gs : ḡs
$2^3 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : Gs : cs : e : gs : c̄s : ḡs : g̿s
$2^4 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : Gs : A : cs : e : gs : c̄s : ē : ḡs : c̿s : g̿s
$2^5 \cdot 3 \cdot 5\,(5)$	Cs : E : Gs : A : cs : e : gs : a : c̄s : ē : ḡs : c̿s : e̿ : g̿s.

Variationes $2^n\cdot3\cdot5(3^2)$ *Species*	*Formae*
	Si F — 4
$3\cdot5(3^2)$	*g*:*đ*:*ħ*
$2\cdot3\cdot5(3^2)$	*g*:*ḡ*:*đ*:*ħ*
$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$	*g*:*ḡ*:*đ*:*ḡ*:*ħ*.
	Si F — 8
$3\cdot5(3^2)$	G:*đ*:*ħ*
$2\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*g*:*d*:*ħ*:*đ*:*ħ*
$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*g*:*d*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*ħ*
$2^3\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*g*:*d*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*ḡ*:*ħ*.
	Si F — 16
$3\cdot5(3^2)$	*d*:*h*:*f̄s*
$2\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*d*:*h*:*đ*:*ħ*:*f̄s*
$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*d*:*g*:*h*:*đ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*
$2^3\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*d*:*g*:*h*:*đ*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*
$2^4\cdot3\cdot5(3^2)$	G:*d*:*g*:*h*:*đ*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ḡ*:*ħ*.
	Si F — 32
$3\cdot5(3^2)$	D:H:*f̄s*
$2\cdot3\cdot5(3^2)$	D:H:*d*:*h*:*f̄s*:*f̄s*
$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ħ*:*f̄s*
$2^3\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*g*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*
$2^4\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*g*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*
$2^5\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*g*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ḡ*:*ħ*.
	Si F — 64
$2\cdot3\cdot5(3^2)$	D:H:*fs*:*f̄s*
$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$	D:H:*d*:*fs*:*h*:*f̄s*:*f̄s*
$2^3\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*fs*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ħ*:*f̄s*
$2^4\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*fs*:*g*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*
$2^5\cdot3\cdot5(3^2)$	D:G:H:*d*:*fs*:*g*:*h*:*đ*:*f̄s*:*ḡ*:*ħ*:*đ*:*f̄s*:*ħ*.

	Si F — 128
$2^2\cdot3\cdot5(3^7)$	$D:Fs:H:fs:\bar{f}s$
$2^3\cdot3\cdot5(3^7)$	$D:Fs:H:d:fs:h:\bar{f}s:\bar{f}s$
$2^4\cdot3\cdot5(3^7)$	$D:Fs:G:H:d:fs:h:\bar{d}:\bar{f}s:\bar{h}:\bar{f}s$
$2^5\cdot3\cdot5(3^7)$	$D:Fs:G:H:d:fs:g:h:\bar{d}:\bar{f}s:\bar{h}:\bar{d}:\bar{f}s:\bar{h}.$

Variationes $2^n\cdot3\cdot5(3\cdot5)$ *Species*	*Formae*
	Si F — 8
$3\cdot5(3\cdot5)$	$e:\bar{h}:\bar{g}s$
$2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$e:\bar{e}:\bar{h}:\bar{g}s:\bar{h}$
$2^2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$e:\bar{e}:\bar{h}:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}.$
	Si F — 16
$3\cdot5(3\cdot5)$	$E:h:\bar{g}s$
$2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:e:h:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{g}s$
$2^2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:e:h:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{g}s:\bar{h}$
$2^3\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:e:h:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}.$
	Si F — 32
$3\cdot5(3\cdot5)$	$H:gs:\bar{d}s$
$2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:H:gs:h:\bar{g}s:\bar{d}s$
$2^2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:H:e:gs:h:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{g}s$
$2^3\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:H:e:gs:h:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{g}s:\bar{h}$
$2^4\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:H:e:gs:h:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}.$
	Si F — 64
$2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$Gs:H:gs:\bar{d}s:\bar{d}s$
$2^2\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:Gs:H:gs:h:\bar{d}s:\bar{g}s:\bar{d}s$
$2^3\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:Gs:H:e:gs:h:ds:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{g}s$
$2^4\cdot3\cdot5(3\cdot5)$	$E:Gs:H:e:gs:h:ds\,\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{g}s:\bar{h}$
$2^5\cdot3:5(3\cdot5)$	$E:Gs:H:e:gs:h:ds:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}:\bar{d}s:\bar{e}:\bar{g}s:\bar{h}.$

227—228] DE RATIONE COMPOSITIONIS IN DATO MODO 397

	Si F — 128
$2^2 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	Gs : H : *ds* : *gs* : $\bar{d}s$: $\bar{\bar{d}}s$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	E : Gs : H : *ds* : *gs* : *h* : $\bar{d}s$: $\bar{g}s$: $\bar{\bar{d}}s$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	E : Gs : H : *ds* : *e* : *gs* : *h* : $\bar{d}s$: $\bar{g}s$: $\bar{h}$: $\bar{\bar{d}}s$: $\bar{\bar{g}}s$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	E : Gs : H : *ds* : *e* : *gs* : *h* : $\bar{d}s$: $\bar{e}$: $\bar{g}s$: $\bar{h}$: $\bar{\bar{d}}s$: $\bar{\bar{g}}s$: $\bar{\bar{h}}$.
	Si F — 256
$2^3 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	Ds : Gs : H : *ds* : *gs* : $\bar{d}s$: $\bar{\bar{d}}s$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	Ds : E : Gs : H : *ds* : *gs* : *h* : $\bar{d}s$: $\bar{g}s$: $\bar{\bar{d}}s$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5(3 \cdot 5)$	Ds : E : Gs : H : *ds* : *e* : *gs* : *h* : $\bar{d}s$: $\bar{g}s$: $\bar{h}$: $\bar{\bar{d}}s$: $\bar{\bar{g}}s$.

5) L'immanence du groupe **Z**.

5,1) Euler et le tempérament égal.

Lorsque L. Euler découvre les propriétés des dix-huitièmes genre il trouve dans une octave "douze sons séparés l'une de l'autre par des intervalles presqu'égaux" c'est-à-dire une échelle presque "tempérée".

L'intervention de l'échelle tempérée, c'est-à-dire du groupe multiplicatif engendré par $2^{1/12}$, est généralement attribuée à Werckmeister (1645-1706) mais en fait il n'y a rien de moins sûr et il est probable qu'elle était "dans l'air", depuis déjà longtemps, à l'époque de Werckmeister (voir 7,2 plus loin). L'échelle tempérée constitue un modèle mathématique puissant mais rigide pour mettre de l'ordre dans la théorie des intervalles ; malheureusement les seuls intervalles qui soient "parfaits" (c'est-à-dire "justes" pour une oreille divine) sont ceux du groupe engendré par 2. La quinte tempérée $2^{7/12}$ sonne faux pour des oreilles divines (qui souhaitent 3/2) et la tierce majeure tempérée $2^{4/12} = 2^{1/3}$ sonne faux pour des oreilles humaines (qui souhaitent 5/4). Voici ce qu'en dit Euler :

"En effectuant cette nouvelle division de l'octave (comme dans le dix-huitième genre) les musiciens ont agi, non pas seulement d'après leur fantaisie, mais aussi guidés involontairement par les principes de l'harmonie ; car les sons qu'ils ont trouvé bon d'ajouter ont donné naissance à un genre de musique assez parfait. Il est donc vrai de dire que cette heureuse invention est due au hasard plutôt qu'à la connaissance de la véritable harmonie ; car on n'a pas pu prévoir que le genre diatonico-chromatique naturel (le dix-huitième genre) comprendrait douze sons, dont deux voisins quelconques diffèrent l'un de l'autre d'un demi-ton.

Ce qui le prouve davantage encore, c'est que beaucoup de musiciens ont cru que la véritable harmonie consistait dans l'égalité des intervalles plutôt que dans leur simplicité, et, voulant avant tout faire triompher leur opinion, ils n'ont pas balancé à diviser l'octave en douze parties égales, et à créer ainsi les douze sons habituels. Ils furent d'autant plus affermis dans leur opinion que, cette division rendant tous les intervalles égaux, un morceau de musique quelconque peut être exécuté, sans aucun changement (c'est-à-dire sur un instrument à sons fixes), dans tous les modes, et être transposé du mode primitif dans un autre quelconque.

A cet égard ils ne se sont pas trompés ; mais ils n'ont pas remarqué que l'égalité des intervalles ne laissait pas un seul mode où il ne fût porté atteinte à l'harmonie".

En somme Euler préfère garder l'harmonie et perdre la structure de groupe...

"Et cependant elle tourne..." ; Euler la réintroduit quasi inconsciemment à son tour en donnant des noms aux intervalles - une bonne centaine d'intervalles - et en ne faisant qu'une seule erreur !

5,2) Les noms des notes.

Comment s'y prend-il ? Ce n'est pas bien clair et il n'est pas très bavard sur ce point :

"Jusqu'ici les musiciens ne se sont pas encore accordés sur la division de l'octave, et ils la font de plusieurs manières. Cependant, dans les écrits de quelques-uns, j'en ai trouvé entre autres une qui paraît réunir le plus d'opinions en sa faveur. Elle présente ses intervalles dans l'ordre suivant, en commençant par le son fa :

fa fa#	limma mineur	si do	demi-ton majeur
sol	demi-ton majeur	do#	demi-ton mineur
sol#	demi-ton mineur	ré	limma majeur
la	demi-ton majeur	ré#	demi-ton mineur
la#	limma majeur	mi#	demi-ton majeur
si	demi-ton mineur	fa	demi-ton majeur

Ces intervalles ont été extraits de l'ouvrage de Mattheson intitulé "Die General-Bass Schule". Mais il est certain qu'Euler est ici trop modeste, car il étudie aussi le genre d'exposant $3^3.5^2.7$, que Mattheson n'a sûrement pas connu (à cause de la présence du nombre 7) et ne fait pas une seule erreur pour nommer les intervalles de ce genre.

Comment peut-on savoir que les dénominations choisies par Euler sont cohérentes (à une exception près) ? Voici une petite histoire à ce sujet. Il y a quelques années, en lisant "The language of Music" de Deryck Cooke j'avais été frappé par la réflexion suivante concernant la spirale des quintes (voir la figure 2) :

"... whereas musically we want the equation :

$$3^{12}/2^{19} = 1$$

the correct mathematical equation is $3^{12}/_{2^{19}} = 1{,}014...$"

Cette réflexion me choquait par son parti pris archimédien (le second membre représente un nombre réel en écriture décimale, pourquoi diable un nombre réel et pas un nombre 2-adique ou 3-adique ?) et je m'étais dit que l'opération effectuée par les musiciens était en fait purement algébrique et qu'elle revenait simplement à imposer la relation :

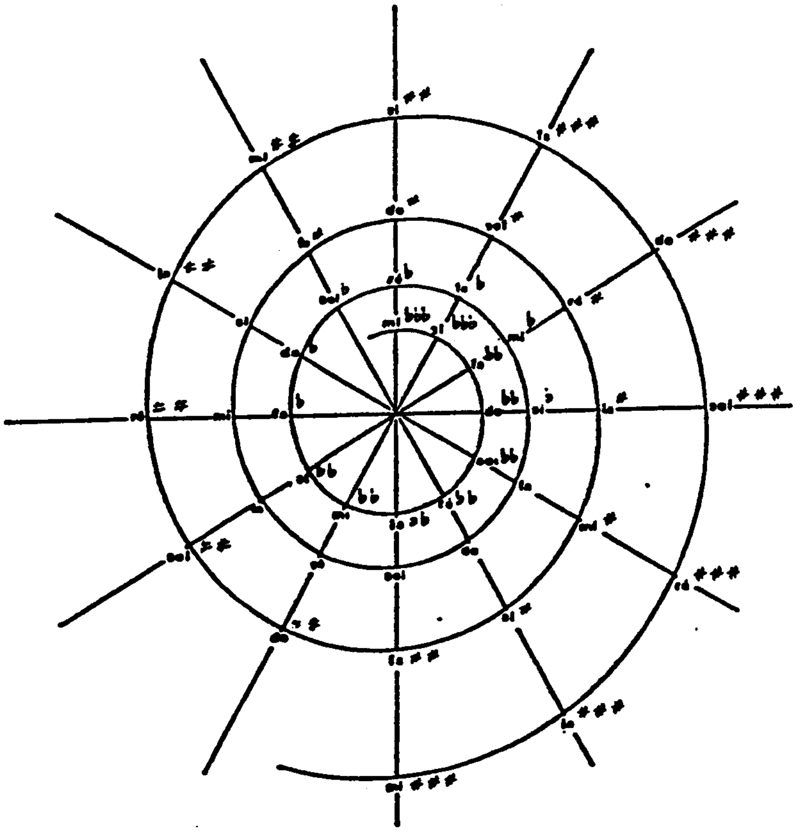
$$3^{12} = 2^{19}$$

dans le groupe abélien libre $<2,3>$, c'est-à-dire à construire l'épimorphisme :

$$<2,3> \xrightarrow{\varphi_o} <2,3> / <3^{12}:2^{19}>$$

Spirale des quintes

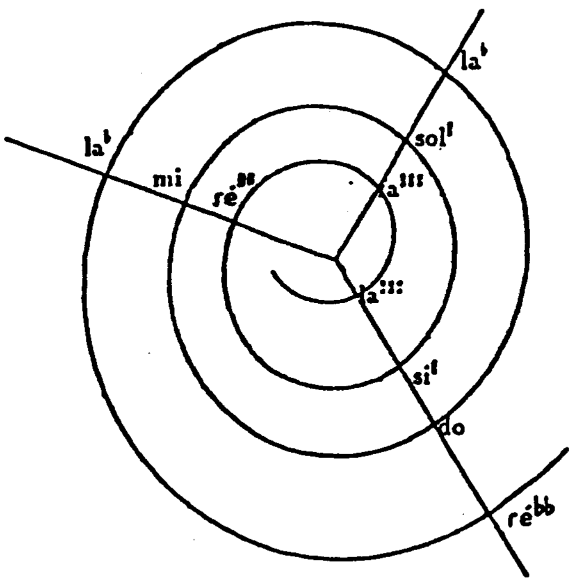
$$\boxed{\text{quinte} = \frac{3}{2}}$$



Remarquons, c'est essentiel, que sur un même rayon de la spirale se trouvent des notes qui correspondent à une seule touche sur un piano (mais que les violonistes ne jouent pas nécessairement à la même hauteur).

Spirale des tierces

$$\boxed{\text{tierce} = \frac{5}{4}}$$



En regardant de plus près on voit que l'image de φ_o est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que $\varphi_o(<2>)$ est un sous-groupe d'indice 12 (voir [9] et [10]) de l'image de φ_o.

Si l'on considère maintenant la spirale des tierces (voir la figure 2) on est conduit à imposer la relation :

$$5^3 = 2^7$$

dans le groupe abélien libre $<2,5>$, c'est-à-dire à construire l'épimorphisme :

$$<2,5> \xrightarrow{\varphi_1} <2,5> \Big/ <5^3.2^7>$$

L'image de φ_1 est encore isomorphe à $\mathbb{Z}$ mais $\varphi_1(<2>)$ est un sous-groupe d'indice 3 de l'image de φ_1.

En fait φ_o et φ_1 se prolongent en un épimorphisme :

$$<2,3,5> \xrightarrow{\varphi_2} <2,3,5> \Big/ <3^{12}:2^{19}, 5^3:2^7>$$

qui possède les mêmes propriétés que φ_o. Et on peut aller encore plus loin en construisant :

$$<2,3,5,7> \xrightarrow{\varphi} <2,3,5,7> \Big/ <3^{12}:2^{19}, 5^3:2^7, 3^2.5^2:2^5.7>$$

qui possède encore les mêmes propriétés que φ_o. Or ce que j'ai constaté récemment - et avec beaucoup d'étonnement - c'est que, à une exception près, le nom donné par Euler à l'intervalle x est invariablement $\varphi(x)$!

Exemple :

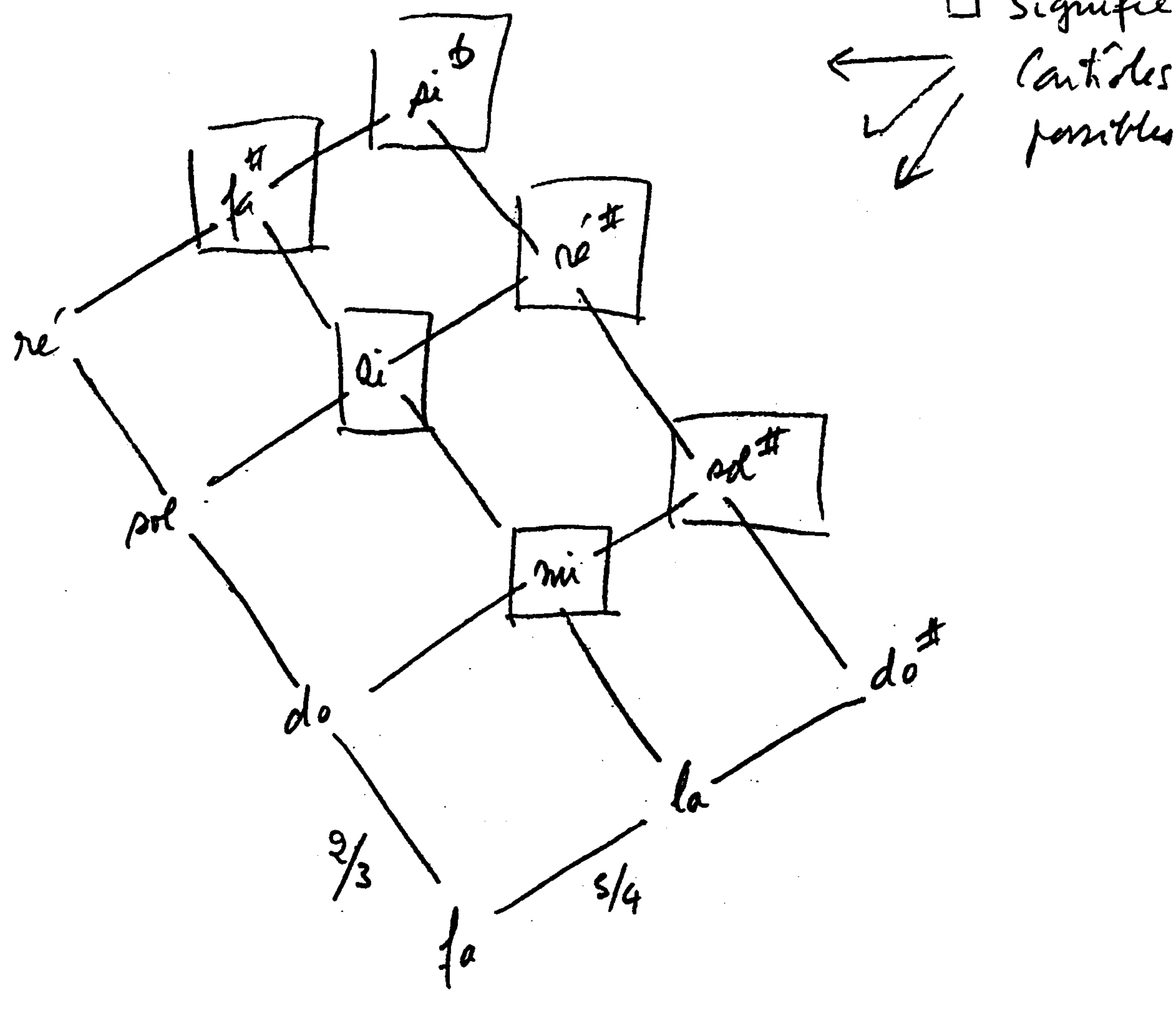
Reprenons le dix-huitième genre (Euler en a étudié 25).

nom de l'intervalle	x	$\varphi(x)$
demi-tons	$^{25}/_{24}$, $^{27}/_{25}$, $^{16}/_{15}$, $^{135}/_{128}$	1
tons	9/8, 10/9, 256/225	2
tierces mineures	$^{75}/_{64}$, $^{6}/_{5}$, $^{32}/_{27}$	3
tierces majeures	$^{5}/_{4}$, $^{32}/_{25}$	4
quartes	$^{675}/_{512}$, $^{4}/_{3}$, $^{27}/_{20}$	5
quartes augmentées	$^{25}/_{18}$, $^{45}/_{32}$, $^{64}/_{45}$, $^{36}/_{25}$	6
quintes	$^{40}/_{27}$, $^{3}/_{2}$, $^{1024}/_{675}$	7
sixtes mineures	$^{25}/_{16}$, $^{8}/_{5}$	8
sixtes majeures	$^{5}/_{3}$, $^{27}/_{16}$, $^{128}/_{75}$	9
septièmes mineures	$^{9}/_{5}$, $^{16}/_{9}$, $^{225}/_{128}$	10
septièmes majeures	$^{15}/_{8}$, $^{48}/_{25}$, $^{50}/_{27}$, $^{256}/_{135}$	11

Quelle est donc cette "erreur" commise par Euler ? Elle concerne une note astérisquée (non connue du "vulgaire") du quatorzième genre (genre d'exposant $A = 3.5^3$).

Euler classe l'intervalle $x = 3.5^3/2^8$ que cette note fait avec la tonique dans les quartes augmentées (tritons), mais on trouve que $\varphi(3.5^3/2^8) = \varphi(3/2) = 7$, c'est donc une quinte !

Appendice : Méthode d'accord.



6) Composition dans le genre diatonico-chromatique.

L'exposé d'Euler dans le chapitre XIII est remarquablement cartésien. Il explique :

a) comment on peut composer dans un mode et système donnés,

b) comment on peut changer de systèmes et de modes.

6,1) Composition dans un mode et un système donnés.

Le compositeur doit choisir un mode (M), puis une espèce $(2^n M)$ et un système (F) en vertu des principes énoncés (et des tables contenues) dans la théorie de l'harmonie, et Euler remarque que ses tableaux laissent un très grand choix au compositeur.

Le système étant choisi, le compositeur doit choisir des successions d'accords en évitant la monotonie (tous les accords ont le même exposant) et les successions trop dures (sauf pour les passages lugubres) et il doit utiliser de préférence les sons qui appartiennent à des systèmes plus simples.

Etant donné un genre d'accord A (par exemple A = 3.5) il n'y a qu'un nombre fini d'accords $2^n A(i)$ qui se trouvent dans une espèce donnée d'exposant $2^{n_o}M$, car $2^n Ai$ doit diviser $2^{n_o}M$.

Si par exemple $2^{n_o}M = 2^5.3^3.5$ (mode majeur) alors $2^n i$ doit diviser $2^5.3^2$ ce qui donne 63 valeurs du couple (n,i).

$3\cdot5(1)$	$3\cdot5(3)$	$3\cdot5(3^2)$
$3\cdot5(2)$	$3\cdot5(2\cdot3)$	$3\cdot5(2\cdot3^2)$
$3\cdot5(2^2)$	$3\cdot5(2^2\cdot3)$	$3\cdot5(2^2\cdot3^2)$
$3\cdot5(2^3)$	$3\cdot5(2^3\cdot3)$	$3\cdot5(2^3\cdot3^2)$
$3\cdot5(2^4)$	$3\cdot5(2^4\cdot3)$	$3\cdot5(2^4\cdot3^2)$
$3\cdot5(2^5)$	$3\cdot5(2^5\cdot3)$	$3\cdot5(2^5\cdot3^2)$
$2\cdot3\cdot5(1)$	$2\cdot3\cdot5(3)$	$2\cdot3.5(3^2)$
$2\cdot3\cdot5(2)$	$2\cdot3\cdot5(2\cdot3)$	$2\cdot3\cdot5(2\cdot3^2)$
$2\cdot3\cdot5(2^2)$	$2\cdot3\cdot5(2^2\cdot3)$	$2\cdot3\cdot5(2^2\cdot3^2)$
$2\cdot3\cdot5(2^3)$	$2\cdot3\cdot5(2^3\cdot3)$	$2\cdot3\cdot5(2^3\cdot3^2)$
$2\cdot3\cdot5(2^4)$	$2\cdot3\cdot5(2^4\cdot3)$	$2\cdot3\cdot5(2^4\cdot3^2)$
$2^2\cdot3\cdot5(1)$	$2^2\cdot3\cdot5(3)$	$2^2\cdot3\cdot5(3^2)$
$2^2\cdot3\cdot5(2)$	$2^2\cdot3\cdot5(2\cdot3)$	$2^2\cdot3\cdot5(2\cdot3^2)$
$2^2\cdot3\cdot5(2^2)$	$2^2\cdot3\cdot5(2^2\cdot3)$	$2^2\cdot3\cdot5(2^2\cdot3^2)$
$2^2\cdot3\cdot5(2^3)$	$2^2\cdot3\cdot5(2^3\cdot3)$	$2^2\cdot3\cdot5(2^3\cdot3^2)$
$2^3\cdot3\cdot5(1)$	$2^3\cdot3\cdot5(3)$	$2^3\cdot3\cdot5(3^2)$
$2^3\cdot3\cdot5(2)$	$2^3\cdot3\cdot5(2\cdot3)$	$2^3\cdot3\cdot5(2\cdot3^2)$
$2^3\cdot3\cdot5(2^2)$	$2^3\cdot3\cdot5(2^2\cdot3)$	$2^3\cdot3\cdot5(2^2\cdot3^2)$
$2^4\cdot3\cdot5(1)$	$2^4\cdot3\cdot5(3)$	$2^4\cdot3\cdot5(3^2)$
$2^4\cdot3\cdot5(2)$	$2^4\cdot3\cdot5(2\cdot3)$	$2^4\cdot3\cdot5(2\cdot3^2)$
$2^5\cdot3\cdot5(1)$	$2^5\cdot3\cdot5(3)$	$2^5\cdot3\cdot5(3^2)$

Mais tous ces accords ne sont pas représentables dans les limites "humaines" si on prend F =8.

En regardant dans la table du paragraphe 4 les accords pour lesquels $F = 8$, on ne trouve que les 38 accords suivants :

$3.5\,(2)$	$C : A : \bar{e}$.
$3.5\,(2^2)$	$c : a : \bar{\bar{e}}$.
$3.5\,(2^3)$	$F : \bar{c} : \bar{a}$.
$3.5\,(2^4)$	$f : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{a}}$.
$2.3.5\,(1)$	$C : A : c : \bar{c}$.
$2.3.5\,(2)$	$C : A : c : a : \bar{e} : \bar{\bar{e}}$.
$2.3.5\,(2^2)$	$F : c : a : \bar{c} : \bar{a} : \bar{\bar{e}}$.
$2.3.5\,(2^3)$	$F : f : \bar{c} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{a}}$.
$2.3.5\,(2^4)$	$f : \bar{f} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{a}}$.
$2^2.3.5\,(1)$	$C : A : c : e : a : \bar{e} : \bar{\bar{e}}$.
$2^2.3.5\,(2)$	$C : F : A : c : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{a} : \bar{\bar{e}}$.
$2^2.3.5\,(2^2)$	$F : c : f : a : \bar{c} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}}$.
$2^2.3.5\,(2^3)$	$F : f : \bar{c} : \bar{f} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{a}}$.
$2^3.3.5\,(1)$	$C : F : A : c : e : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{a} : \bar{\bar{e}}$.
$2^3.3.5\,(2)$	$C : F : A : c : f : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}}$.
$2^3.3.5\,(2^2)$	$F : c : f : a : \bar{c} : \bar{f} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}} : \bar{\bar{\bar{c}}}$.
$2^4.3.5\,(1)$	$C : F : A : c : e : f : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}}$.
$2^4.3.5\,(2)$	$C : F : A : c : f : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{f} : \bar{a} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}} : \bar{\bar{\bar{c}}}$.
$2^5.3.5\,(1)$	$C : F : A : c : e : f : a : \bar{c} : \bar{e} : \bar{f} : \bar{a} . \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{a}} : \bar{\bar{\bar{c}}}$.

$3.5\,(3)$	$G : e : \bar{h}$.
$3.5\,(2.3)$	$C : g : \bar{e} : \bar{\bar{h}}$.
$3.5\,(2^2.3)$	$c : \bar{g} : \bar{\bar{e}}$.
$2.3.5\,(3)$	$C : G : e : g : \bar{e} : \bar{h} : \bar{\bar{h}}$.
$2.3.5\,(2.3)$	$C : c : g : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$.
$2.3.5\,(2^2.3)$	$C : \bar{c} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}}$.
$2^2.3.5\,(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^2.3.5\,(2.3)$	$C : c : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^2.3.5\,(2^2.3)$	$c : \bar{c} : \bar{g} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}}$.
$2^3.3.5\,(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^3.3.5\,(2.3)$	$C : c : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^4.3.5\,(3)$	$C : G : c : e : g : \bar{c} : \bar{e} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{c}} : \bar{\bar{e}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
$3.5\,(3^2)$	$G : \bar{d} : \bar{h}$.
$3.5\,(2.3^2)$	$g : \bar{\bar{d}} : \bar{\bar{h}}$.
$2.3.5\,(3^2)$	$G : g : \bar{d} : \bar{h} : \bar{\bar{d}} : \bar{\bar{h}}$.
$2.3.5\,(2.3^2)$	$g : \bar{g} : \bar{d} : \bar{\bar{h}}$.
$2^2.3.5\,(3^2)$	$G : g : \bar{d} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{d}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^2.3.5\,(2.3^2)$	$g : \bar{g} : \bar{\bar{d}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.
$2^3.3.5\,(3^2)$	$G : g : \bar{d} : \bar{g} : \bar{h} : \bar{\bar{d}} : \bar{\bar{g}} : \bar{\bar{h}}$.

Ce raisonnement montre que dans une espèce donnée il n'y a qu'un nombre fini d'accords à considérer.

Pour déterminer ces accords, Euler propose la méthode suivante :

a) déterminer le genre A (en se limitant aux 10 premiers genres) : A doit diviser M.

b) déterminer l'exposant de l'accord, c'est-à-dire les valeurs de n telles que $2^n A$ divise l'exposant $2^{n_o} M$ du système donné.

c) déterminer l'indice i de l'accord : i doit diviser $2^{n_o - n}\frac{M}{A}$.

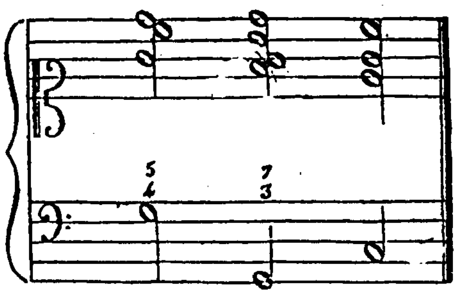
Pour les chants à deux ou trois voix, Euler recommande $A \in \{1,3,5\}$.

Pour les chants à plusieurs voix, Euler recommande $A = 3.5$.

Mais il remarque que l'on utilise aussi $A \in \{3^2, 3^3, 3^2.5\}$.

Finalement Euler note qu'il est souhaitable que l'exposant total du début de l'oeuvre et celui de la fin soient égaux à celui du système. Et il donne, dans le chapitre XIII et après l'exemple qui suit, des explications qui prouvent à quel point il était familier avec les règles de l'écriture musicale (rapport entre rythme et harmonie).

Cette conclusion qui est représentée ci-contre, fait voir que si le second accord ne contenait pas le son $\bar{f}$, qui est une septième par rapport à la basse *G*, les exposants des trois accords de la conclusion seraient respectivement $2^3.3^2(2.5)$, $2^2.3.5.(3^2)$, $2^3.3.5\,(2.3)$. L'exposant général de ces accords, considérés dans leur ensemble, serait alors $2^4.3^2.5$, parceque tous les indices sont divisibles par 3, et par conséquent il serait beaucoup plus simple que l'exposant $2^3.3^3.5$ du système. Mais, d'après la règle prescrite, on emploie le son $\bar{f}$ dont l'exposant est 2^3, parce que l'addition de ce son donne à la conclusion l'exposant $2^3.3^3.5$, qui fait connaître à l'oreille tout le caractère et toute la nature du système.



§ 29. Cependant, dans le cas dont il s'agit, l'emploi du son $\bar{f}$ pourrait paraître trop hardi et contraire aux règles d'harmonie établies jusqu'à présent ; car il est cause que l'exposant du deuxième accord de la conclusion devient $2^4.5^3.5$, et s'élève ainsi jusqu'au 16^e degré d'agrément, qui rend cet accord presque inadmissible. Mais, outre la raison que nous venons de donner de cet emploi, il se fonde encore sur un autre principe que les musiciens observent à l'égard des dissonances, et dont nous ne nous sommes pas encore occupés. Car jusqu'à présent nous n'avons traité que des accords principaux, à considérer chacun pour lui-même, et nous n'avons pas encore touché aux accords moins importants.

§ 30. Cette différence entre les accords prend surtout sa source dans la nature de la *mesure*, dont certaines parties sont regardées comme principales et les autres comme secondaires ; celles-là sont appelées *temps forts* et celles-ci *temps faibles*. C'est à ces derniers qu'on emploie les accords moins importants ; leurs degrés d'agrément peuvent donc, sans porter aucune atteinte à l'harmonie, surpasser de beaucoup ceux des accords principaux, pourvu que leur emploi se fasse avec discernement ; car ce n'est pas tant à leur degré d'agrément que l'on doit s'attacher, qu'à la connexion des accords principaux.

§ 31. Cette connexion s'opère en interpolant des sons convenables entre deux sons des accords principaux ; c'est ce qui a été fait dans l'exemple cité, par l'insertion du son $\bar{f}$ entre les sons $\bar{g}$ et $\bar{e}$. De telles interpolations qui n'appartiennent pas proprement aux accords, se font par transition, et de cette manière elles deviennent supportables. Dans les diminutions des notes de musique on emploie fréquemment aussi, sans que l'harmonie en souffre, des sons qui ne font pas partie des accords.

§ 32. Bien que l'emploi de pareils sons appartienne particulièrement à la composition poétique, cependant il convient ici de remarquer que le système adopté contient des sons de cette espèce, et qu'il faut les employer aux temps faibles de la mesure. S'ils ne troublent pas l'harmonie, c'est qu'ils font partie du système, et que leur emploi donne de celui-ci une idée plus complète, que ne le feraient les consonnances seules. Quant aux règles qu'il faut observer à leur égard, les musiciens les ont données dans tous leurs détails.

6,2) Modulation.

La monotonie engendre l'ennui, il faut donc varier les accords, changer de système, transposer, etc.

Les éléments du choix sont les suivants :

exposant M du mode, exposant n de l'espèce $2^n M$, choix de la fondamentale $F \in \langle 2\rangle$ du système, choix de l'indice i ($\langle 2\rangle$ désigne le monoïde engendré par 2).

En principe F est fixe dans l'oeuvre, mais tous les systèmes de fondamentale F_i divisant F sont encore valables.

Si l'on retranche les modes les plus simples, on est conduit à considérer essentiellement $M = 3^3.5$ (mode majeur) et $M = 3^2.5^2$ (mode mineur).

Les transpositions "pures" de ces modes auront des indices i tels que

$$\begin{cases} 3^3.5\ i \text{ divise } 3^3.5^2 \Rightarrow i \text{ divise } 5 \\ 3^2.5\ i \text{ divise } 3^3.5^2 \Rightarrow i \text{ divise } 3 \end{cases}$$

On trouve donc do et mi majeur, la et mi mineur. Euler pense qu'il n'est pas "bien nécessaire" d'aller au-delà de ces quatre tonalités, car elles permettent d'obtenir une variété très grande dans une très grande harmonie. Comme c'est insuffisant pour la pratique, Euler considère la relation moins restrictive : Mi divise $3^7.5^2$ et il trouve :

TONS DURS OU MAJEURS.

$2^n.3^3.5\ (2^m)$	*C*	dur	ou	*ut*	majeur.
$2^n.3^3.5\ (2^m.3)$	*G*	»	»	*sol*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.5)$	*E*	»	»	*mi*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^2)$	*D*	»	»	*ré*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3.5)$	*H*	»	»	*si*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^3)$	*A*	»	»	*la*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^2.5)$	*Fs*	»	»	*fa* dièse	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^4)$	*E*	»	»	*mi*	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^3.5)$	*Cs*	»	»	*ut* dièse	»
$2^n.3^3.5\ (2^m.3^4.5)$	*Gs*	»	»	*sol* dièse	»

TONS MOLS OU MINEURS.

$2^n.3^2.5^2\ (2^m)$	*A*	mol	ou	*la*	mineur.
$2\ .3^2.5^2\ (2^m.3)$	*E*	»	»	*mi*	»
$2^n.3^2.5^2\ (2^m.3^2)$	*H*	»	»	*si*	»
$2^n.3^2.5^2\ (2^m.3^3)$	*Fs*	»	»	*fa* dièse	»
$2^n.3^2.5^2\ (2^m.3^4)$	*Cs*	»	»	*ut* dièse	»
$2^n.3^2.5^2\ (2^m.3^5)$	*Gs*	»	»	*sol* dièse	»

Mais déjà ce système de tonalités lui paraît trop riche il se limite aux modulations contenues dans l'exposant $3^4.5^2$, c'est-à-dire à :

Variations de modes ou Tons.	*Exposants.*	*Triades harmoniques.*
C dur ou *Ut* majeur.	$2^n.3^3.5\ (2^m)$	$3.5\ (1)$ $3.5\ (3)$ $3.5\ (3^2)$
G dur ou *Sol* majeur.	$2^n.3^4.5\ (2^m\ 3)$	$3.5\ (3)$ $3.5\ (3^2)$ $3.5\ (3^3)$
E dur ou *Mi* majeur.	$2^n.3^4.5\ (2^m.5)$	$3.5\ (5)$ $3.5\ (3.5)$ $3.5\ (3^2.5)$
H dur ou *Si* majeur.	$2^n.3^3.5\ (2^m.3.5)$	$3.5\ (3.5)$ $3.5\ (3^2.5)$ $3.5\ (3^3.5)$
A mol ou *La* mineur.	$2^n.3^2.5^2\ (2^m)$	$3.5\ (1)$ $3.5\ (3)$ $3.5\ (5)$ $3.5\ (3.5)$
E mol ou *Mi* mineur.	$2^n.3^3.5^2\ (2^m.3)$	$3.5\ (3)$ $3.5\ (3^2)$ $3.5\ (3.5)$ $3.5\ (3^2.5)$
H mol ou *Si* mineur.	$2^n.3^3.5^2\ (2^m.3^2)$	$3.5\ (3^2)$ $3.5\ (3^3)$ $3.5\ (3^2.5)$ $3.5\ (3^3.5)$

Euler dit, et c'est très surprenant, que les musiciens ne vont pas plus loin et qu'il est superflu de prendre les autres diviseurs de $3^7.5^2$; on pourrait penser le contraire, et je reviendrai sur ce point plus loin. Mais les arguments qu'il utilise pour expliquer la théorie de la modulation sont exactement ceux qu'utilise P. Barbaud dans [11] :

"Dans la réunion de diverses tonalités, il faut que les transitions de l'une à l'autre se fassent de manière à flatter l'oreille" et les 2 tonalités qui se suivent doivent avoir un ou plusieurs accords en commun "en effet lorsqu'on sera arrivé à un accord commun aux deux tonalités, alors la première pourra finir et la deuxième commencer sans que l'on s'aperçoive d'un saut ou d'une lacune qui serait insupportable".

Comme les triades harmoniques contenues dans $2^n.3.5$ sont les principaux accords employés par les musiciens, il faut examiner quels sont les tonalités qui ont des triades communes.

	C dur ou *Ut* majeur.	*G* dur ou *Sol* majeur.	*E* dur ou *Mi* majeur.	*H* dur ou *Si* majeur.	*A* mol ou *La* mineur.	*E* mol ou, *Mi* mineur.	*H* mol ou *Si* mineur.
C dur ou *Ut* majeur.	»	facile.	nul.	nul.	facile.	facile.	difficile.
G dur ou *Sol* majeur.	facile.	»	nul.	nul.	difficile.	facile.	facile.
E dur ou *Mi* majeur.	nul.	nul.	»	facile.	facile.	facile.	difficile.
H dur ou *Si* majeur.	nul.	nul.	facile.	»	difficile.	facile.	facile.
A mol ou *La* mineur.	facile.	difficile.	facile.	difficile.	»	facile.	nul.
E mol ou *Mi* mineur.	facile.	facile.	facile.	facile.	facile.	»	facile.
H mol ou *Si* mineur.	difficile.	facile.	difficile.	facile.	nul.	facile.	»

On voit donc que, par un choix discutable de l'exposant, Euler laisse échapper la théorie "moderne" de la modulation : do majeur et sol majeur sont des tonalités voisines pour lui, mais pas do majeur et fa majeur.

Une critique constructive de son travail doit simplement montrer qu'il est facile de l'adapter aux normes actuelles. Cela est possible de trois manières différentes (au moins) sans faire usage du système tempéré.

a) On peut utiliser une remarque d'Euler lui-même (ch. X, §10) où il dit que les genres d'exposant $3^n.5^2$ avec $n > 7$ diffèrent peu du genre diatonico-chromatique (bien que le nombre des notes soit $3(n+1)$). Si on prend $n = 3+12 = 15$, toutes les transpositions du cycle des quintes sont contenues dans le nouvel exposant et l'"hyperextension" du genre diatonico-chromatique que l'on obtient possède 48 notes : chaque touche d'un clavier diatonico-chromatique doit être divisée en quatre.

b) On peut remarquer que ce qui manque à la théorie d'Euler est l'invariance par l'involution $x \longmapsto \frac{1}{x}$ puisque l'on veut que les intervalles harmoniques (do,sol) et (do,fa) soient les mêmes.

On peut construire un genre diatonico-chromatique plus symétrique en cherchant les fractions $2^n\ 3^a\ 5^b$ avec a et $b \in \mathbb{Z}$, $|a|<2$ et $|b|<1$, telles que leurs images par φ soient distinctes, on trouverait :

$\varphi(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	1	$\frac{2^4}{3.5}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2.3}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^2.5}{2^5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3}$	$\frac{3.5}{2^3}$	2

Et on voit que, à part l'"affreux triton" ($\varphi(x) = 6$), tous les intervalles présenteraient la symétrie fondamentale.

c) On peut tout simplement prendre l'image homomorphe des objets de la théorie d'Euler par l'homomorphisme φ du paragraphe 5 et travailler sur des "notes abstraites" [12].

7) <u>Deux cent cinquante ans après</u>.

E. Emery accorde (à juste titre) à Euler de développer "jusqu'à l'extrême limites des possibilités" une arithmétisation qui remonte à la grande tradition pythagoricienne et qui passe par Platon, Plotin, Saint-Augustin, Al-Farabi, Avicenne, Saint-Thomas, Zarlino, Mersenne, Descartes, Rameau et d'Alembert.

Il subordonne (à juste titre également) le point de vue d'Euler à celui de Leibniz : "si l'on veut lire Euler correctement, il faut garder en mémoire l'exposé de Leibniz : le travail du musicien n'est en aucun cas celui d'un calculateur conscient des rapports numériques sur lesquels son esprit opère".

Mais la théorie d'Euler semble surtout éveiller sa verve critique : "Faut-il accompagner Euler dans le détail de son exposé subséquent ? Seules quelques touches suffisent".

Il y a ici un mystère que E. Emery passe sous silence : comment se fait-il que "l'extrême limite" d'une théorie aussi ancienne et prestigieuse ait eu aussi peu d'impact sur le développement de la musicologie et de la théorie de la musique ?

Je vois quatre raisons principales au naufrage de la théorie d'Euler :

a) la naissance de l'art des sons.
b) l'hégémonie du tempérament égal.
c) le développement de la spécialisation scientifique.
d) la rigidité de la construction eulérienne.

7,1) <u>La naissance de l'art des sons</u>.

Pour Euler, ainsi que nous l'avons vu, le sensible n'était qu'un simple point d'appui pour la construction d'une théorie hypothético-déductive.

Ce parti pris intellectualiste ne signifiait pas qu'Euler ignorait l'importance de la "matière" sonore en tant que telle. Ne dit-il pas : "La nature des instruments a d'ailleurs une si grande influence dans les charmes de la musique, qu'il importe beaucoup de savoir lequel, pour une composition donnée, mérite la préférence. Aussi ce choix a-t-il généralement lieu, et d'ordinaire l'auteur d'une mélodie indique l'instrument pour lequel il l'a écrite".

Cependant ce côté "pratique" de la musique n'est pas son affaire : "Comme la partie pratique de la musique n'est autre chose que l'art de se servir des instruments de musique, elle n'appartient pas à notre sujet et nous ne nous en occuperons pas".

A. Einstein [13] caractérise cette attitude avec netteté : "nous discutons souvent du médium le plus approprié aux oeuvres pour clavier de J.S. Bach ; mais peu importe, au fond, que nous en confiions l'exécution au clavecin, au clavicorde, à notre piano moderne ou à l'orgue - encore que le piano risque de leur conférer quelque chose d'exagérément matériel".

Cependant, du vivant d'Euler déjà, le préromantisme se taillait un chemin dans les consciences et commençait à instruire le fameux "procès de Newton" (procès bien mal dénommé d'ailleurs). Comme le dit G. Gusdorf [3] : "la réaction contre la pensée galiléenne consistera à faire du sensible, jusque là simple point d'appui pour les généralisations de la connaissance abstraite, une instance de vérité qui possède en soi-même sa propre justification" ce qui se traduit, dans le domaine musical, par une mutation du sens de la musique instrumentale : "elle perd son caractère d'art mondain et devient le moyen par excellence de communiquer l'indicible, d'exprimer des sentiments plus profonds que ne peut le faire la parole" [13] . Pour un Novalis "l'univers est une musique pétrifiée et le vrai savant réveillera cette musique endormie. D'où l'importance symbolique de la flûte de Pan, de la harpe éolienne, du glasharmonika dans la poésie, la peinture et la musique romantiques ; ces instruments et d'autres encore ont la vertu de faire parler les éléments, l'air et le vent ou l'eau" [7] .

Mozart, déjà, écrit un quintette avec Glasharmonika, un quintette avec clarinette et... "La flûte enchantée". Cette quête s'amplifie chez Weber, Schubert, Berlioz (traité d'orchestration), etc.

Quant à la recherche de sonorités nouvelles ou "inouïes" elle constitue une sorte de partie "obligato" dans la musique contemporaine (Dictionnaire des objets musicaux de P. Schaeffer, sans hélicoïdaux de J.C. Risset, etc.).

7,2) L'hégémonie du tempérament égal.

Les logarithmes et le tempérament égal furent inventés simultanément au XVIème siècle et ceci ne peut surprendre puisque le tempérament égal est une simple application de la notion de logarithme. Dans ce système la gamme chromatique est représentée par le groupe engendré par $2^{1/12}$. Il est naturellement difficile de savoir qui a pu inventer le tempérament égal (? , S. Stevin, Chou Tsai Yu, Werckmeister) mais il est clair que ce ne fut pas J.S. Bach bien que son fils C.P.E. Bach ait été un fervent promoteur de ce système ([14] p.154). Il ne faut pas du tout croire que l'appui de C.P.E. Bach ait rendu la progression du tempérament égal irrésistible ; en 1851 pas un seul des orgues anglais présentés à la Grande Exposition de Londres n'était accordé dans ce tempérament. Nous avons dit au paragraphe 5 qu'Euler trouvait le tempérament égal absurde au sens étymologique du terme, c'est-à-dire impuissant à rendre compte des faits musicaux. Outre L. Euler, d'autres voix autorisées se sont élevées contre l'imposition du tempérament égal comme base de l'enseignement de la musique en particulier . H. Von Helmholtz dans la seconde moitié du XIXème siècle :

"Je pense que beaucoup de nos meilleurs exécutions musicales doivent leur beauté à une introduction inconsciente du système naturel, et que nous pourrions plus souvent apprécier leurs charmes si ce système était enseigné de manière pédagogique en le mettant à la base de tout l'enseignement musical, à la place de l'intonation tempérée qui empêche la voix humaine et les instruments à cordes de développer leur pleine harmonie dans le seul but de ne pas perturber les habitudes des pianistes et des organistes".

Mais cela n'empêchera pas un certain nombre de théoriciens de la musique (comme A. Schönberg) de vouloir baser sur une conception uniquement algébrique du groupe $<2^{1/12}>$ une théorie de la composition encore plus extrémale dans on algébrisation que celle d'Euler pouvait l'être dans son arithmétisation. Selon cette tendance contradictoire, la musique cesse d'être un art de l'harmonie ou un art des sons, pour devenir un art des structures combinatoires.

7,3) Le développement de la spécialisation scientifique.

Il n'est pas arrivé non plus à Euler l'aventure survenue à Farey ([1]) dans des conditions similaires et que je vais prendre comme exemple du compartimentage sans cesse croissant des connaissances. Le nom de Farey est associé aux suites croissantes :

$$\mathcal{F}_n = \{\frac{p}{q} \in [0,1] \ ; \ (p,q) = 1, \ 0 < p < n \quad 1 < q < n\}$$

que j'ai découvertes jadis dans la classique:

"Introduction to the Theory of Numbers" de Hardy et Wright.

Les auteurs notent que l'histoire de ces suites est fort curieuse : le théorème principal qui porte le nom de Farey est paru en 1816 dans le "Philosophical Magazine" sans aucune preuve et Farey n'est connu que par 2o lignes dans le "Dictionary of natural biography", où on le présente comme un géologue et où son biographe oublie de parler de la seule chose qui lui survit.

En fait j'ai toujours pensé que Farey devait jouer d'un instrument à cordes car les suites de Farey évoquaient pour moi les harmoniques que l'on trouve sur une corde violon [12].

Aussi, au hasard d'une lecture de H. Von Helmholtz en traduction anglaise [15], n'ai-je pas douté que le Farey dont parlait le traducteur était bien celui de Hardy et Wright. La confirmation m'a ensuite été fournie par le "Grove Dictionary" où on le présente (en 46 lignes !) comme géologue, musicien (ténor) et théoricien de la musique. C'est bien l'étude du problème du tempérament qui le conduisit à ses théorèmes d'arithmétique. Il est intéressant de noter que Farey s'estimait incapable de comprendre pourquoi tant de musiciens étaient ignorants ou se désintéressaient de cet aspect de la musicologie ; aspect qui lui paraissait si important et si fondamental.

Le témoignage de Farey ne fait que souligner le mystère qui entoure l'évolution de la musique, mais on peut remarquer que son travail a néanmoins laissé une trace en mathématiques alors que les "suites d'Euler", je veux dire les suites croissantes :

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta} = \{\frac{3^a 5^b}{2^n} \in [1,2] ; \ 0 \leq a \leq \alpha, \ 0 \leq b \leq \beta, \ n \in \mathbb{N}\}$$

n'ont pas eu cette chance, malgré les "merveilleuses propriétés" de $\mathcal{E}_{3,2}$.

7,4) La rigidité de la construction eulérienne.

On a vu dans le paragraphe 6 que la théorie de la modulation d'Euler ne paraît incomplète que faute d'un passage au quotient. Si l'on considère non plus le groupe <2,3,5> mais son image par φ comme système de référence d'une "nouvelle" théorie de la musique tout devient limpide et conforme à l'essentiel de la pratique actuelle ("notes abstraites", voir [12]). La théorie "spécialisée" que l'on obtient par l'application de l'homomorphisme φ fournit la structure de groupe chère à J.S. Bach, mais peut conserver la trace des conceptions harmoniques d'Euler. Naturellement la notion d'exposant d'un accord ne "passe pas au quotient", mais rien n'empêche de définir l'exposant de $(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))$ par la formule :

$$e(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) := \inf_{x_1,\ldots,x_n} \{e(x_1,\ldots,x_n) \ ; \ \varphi(x_i) = \bar{x}_i, \ \ i=1,\ldots,n\}$$

(voir aussi la définition de la "distance harmonique" dans [9]).

Postlude : Sept cents ans après.

Il est possible de se faire une idée de ce que les gens de l'an 2400 pensaient de la tradition à laquelle appartenait Euler dans un livre étrange intitulé "Das Glassperlenspiel" ("Le jeu des perles de verre).

Le livre commence fort naturellement par une longue description de ce jeu à laquelle on renvoie le lecteur. Les premières formes de ce jeu se trouvent ça et là, éparpillées dans l'histoire culturelle mondiale, depuis Pythagore jusqu'aux urnes de Novalis en passant par les chinois et les arabes. Sa protohistoire le retrouve parmi les scholastiques, les humanistes et les académies de mathématiciens des XVIIème et XVIIIème siècle. Le narrateur dit que des hommes comme Abélard, Leibniz et Hegel étaient des familiers du rêve consistant à associer la beauté vivante de l'art à la magie de la forme des objets des sciences exactes. Mais le développement le plus important de ce jeu eut lieu à l'époque du Feuilleton (XXème siècle) un âge durant lequel l'esprit humain libéré de la tutelle de l'Eglise et de celle de la Raison, jouissait d'une liberté si illimitée qu'elle obscurcissait l'idée même de culture.

Par exemple les professeurs d'université donnaient volontiers des conférences sur des sujets tels que :

"Friedrich Nietzsche et la mode féminine dans les années 1870"
ou
"Le Rôle du Chien de Manchon dans les Vies des Grandes Courtisanes", etc.

Bref c'était une période où la vie était mécanisée, la moralité avilie, la confiance entre les états déclinait et l'art perdait son authenticité.

Deux groupes résistaient à cette décadence générale : un groupe de musicologues et la Confrérie de la Ligue des Voyageurs vers l'Orient.

Le narrateur remarque que beaucoup d'auteurs de la Chine légendaire avaient déjà parlé du pouvoir de la musique et il cite longuement "Printemps et Automne" de Lu Bu We :

"Les origines de la musique se perdent dans le passé. La musique nait de la mesure et prend racine dans le Grand Un. Le Grand Un engendre deux pôles ; les deux pôles engendrent les puissances des Ténèbres et de la Lumière. Lorsque le monde repose en paix, lorsque toutes les choses sont tranquilles et que tous les hommes obéissent à leurs supérieurs, la musique peut être cultivée vers la perfection. Lorsque désirs et passions ne suivent pas des chemins néfastes, la musique peut être cultivée vers la perfection. La musique parfaite a une cause. Elle naît de l'équilibre. L'équilibre naît de la vertu et la vertu naît du sens du cosmos" etc.

"Ainsi la musique d'une époque bien ordonnée est calme et réconfortante, et telle est son gouvernement. La musique d'une époque agitée est excitée et sauvage, et son gouvernement est perverti. La musique d'une époque de décadence et triste et sentimentale, et son gouvernement est vacillant". (Il est amusant de comparer ce point de vue à celui de J. Attali [16]).

L'inventeur du jeu était Bastian Perrot de Calw, un musicologue qui utilisait des perles de verre sur une sorte d'abaque à la place de notes de musique, de chiffres ou d'autres symboles pour décrire la manière dont les formes musicales se combinent. Incidemment le narrateur nous dit que Bastian Perrot jouait du violon baroque et je ne serais pas surpris d'apprendre un jour qu'il n'utilisait pas le tempérament égal.

C'était en premier lieu un jeu pour musicologues, puis il fut repris par les mathématiciens, les linguistes, les plasticiens, etc., et finalement Joculator Basiliensis en fit l'outil universel (sorte d'avatar de la caractéristique universelle de Leibniz) que nous connaissons maintenant (2400 A.D.) : "la quintessence de l'intellectualité dans l'art, le culte le plus sublime, l'unio mystica de tous les membres séparés de l'Universitas Litterarum".
La pénétration et la discipline intellectuelles que ce jeu exigeait contribuèrent au déclin de l'Age du Feuilleton, purifièrent les esprits et permirent la restauration d'une société où la compétence et la responsabilité trouvèrent à nouveau leur vertu : "on avait redécouvert le secret de ce que l'on appelle maintenant la musique classique, on avait compris l'esprit, la vertu et la piété des générations passées (du XVème au XVIIIème siècle) et on les prenait comme modèles. Aujourd'hui, par exemple, nous ne nous faisons pas une haute idée de la théologie et de la culture éclésiastique du XVIIIème siècle, ni de la philosophie des lumières, mais nous considérons les cantates, passions et préludes de Bach comme l'ultime quintessence de la culture chrétienne".

Je vous ai caché jusqu'ici le nom du narrateur, mais naturellement vous avez reconnu Hermann Hesse de Calw et vous ne serez sans doute pas davantage surpris si je vous raconte que sa première femme, Maria Bernoulli, était bien une descendante des protecteurs d'Euler ([17] p. 120)...

[1] New Grove Dictionary of Music and Musicians.

[2] E. Emery "Temps et Musique". L'Age d'Homme, 1975.

[3] G. Gusdorf, "Naissance de la conscience romantique au siècle des lumières", Payot, 1976.

[4] H.R. Busch, "Leonhard Eulers Beitrag zur Musiktheorie". Gustav Bosse, 1970.

[5] A. Weil, Number Theory, Birkhaüser, 1984.

[6] E.T. Bell, "Les grands mathématiciens", Payot, 1950.

[7] G. Gusdorf, "Fondements du savoir romantique", Payot, 1982.

[8] E. Artin, "The Collected papers", Addison-Wesley.

[9] B. Parzysz, Y. Hellegouarch, "Musique et Mathématique", A.P.M.E.P. Publication N° 53.

[10] Y. Hellegouarch, "Sales" C.R. Math. Acad. Sc. Canada, Vol. IV, n° 5, oct. 1982, vol. V, n° 2, avril 1983.

[11] P. Barbaud, "La musique, discipline scientifique", Dunod, 1968.

[12] Y. Hellegouarch, "Kreisleriana", IREM Basse-Normandie, 1985.

[13] A. Einstein, "La musique romantique", Gallimard, 1959.

[14] C. Bunting, "Essay on the craft of 'Cello playing", t.2, Cambridge, 1982.

[15] H. Von Helmholtz, "On the sensations of tone", Dover, 1954.

[16] J. Attali, "Bruits", P.U.F. 1977.

[17] R. Freedman, "H. Hesse, pilgrim of crisis", Abacus, 1979.