

# SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

A. C. EHRESMANN

J. P. VANBREMEERSCH

## **Approche catégorique de la complexification et du choix pour les systèmes vivants**

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1986, fascicule 7

« Approche catégorique de la complexification et du choix pour les systèmes vivants », ,  
p. 1-19

[http://www.numdam.org/item?id=SPHM\\_1986\\_\\_7\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1986__7_A1_0)

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures,  
1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique  
l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute  
utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale.  
Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SÉMINAIRE de PHILOSOPHIE  
et MATHÉMATIQUES

Ecole Normale Supérieure  
Paris, 1.12.1986

## APPROCHE CATÉGORIQUE DE LA COMPLEXIFICATION ET DU CHOIX POUR LES SYSTÈMES VIVANTS

par A.C. EHRESMANN et J.-P. VANBREMEERSCH

Nous remercions MM. Caveing, Loi et Thom de nous avoir invités à faire une conférence dans ce Séminaire. Les résultats exposés ici sont développés dans <sup>(1,2)</sup>, où l'on pourra trouver des références bibliographiques.

### Introduction.

Nous allons donner un modèle pour des systèmes à différents niveaux d'organisation qui sont ouverts et évoluent dans le temps; nous parlerons de système hiérarchique évolutif (SHE). Tels sont les systèmes qui interviennent en Biologie ou en Sociologie.

L'idée n'est pas de décrire un niveau particulier, mais au contraire d'étudier les relations entre ces niveaux. Ce qui philosophiquement nous amène à un réductionnisme opérationnel où nous chercherons à décrire l'organisation interne, c'est-à-dire les relations entre éléments et leurs recollements en éléments plus complexes, ainsi que ses changements au cours du temps.

Ce modèle est basé sur la théorie des catégories, donc rentre dans le cadre de mathématiques relationnelles plutôt qualitatives que quantitatives, à la différence de la plupart des modèles déjà utilisés en Biologie où

<sup>(1)</sup> A.C. EHRESMANN & J.-P. VANBREMEERSCH, Hierarchical evolutive systems; A mathematical model for complex systems, *Bull math. Biology*, 1986 (à paraître). Résumé dans une Note, *C.R.A.S. Paris* 302, Section III, p. 475.

<sup>(2)</sup> -----, Systèmes hiérarchiques évolutifs, *Prépublications U.E.R. Math. Amiens*; Partie I, n° 86-1, 1985; Partie II, n° 86-2, 1986.



les notions quantitatives interviennent de manière essentielle. Il n'est pas possible ici de développer le formalisme mathématique; nous essaierons d'en donner une idée intuitive et de mettre en évidence les différents problèmes philosophiques rencontrés.

On étudiera d'abord l'organisation interne du système à un instant donné, puis les processus d'évolution; enfin on verra comment le modèle peut être adapté à l'étude du système relativement à un niveau particulier ou à certains agents.

## 1. Systèmes hiérarchiques. Réductionnisme.

a) *Systèmes. Catégories.* - Les systèmes hiérarchiques vont fournir un modèle mathématique d'un système formé d'éléments de différents niveaux, et de relations entre eux, où l'étude d'un niveau peut se ramener à celle des niveaux inférieurs, comme l'a proposé von Bertalanffy dès 1926.

Prenons l'exemple d'un organisme où nous allons considérer comme différents niveaux l'organisme tout entier, les organes, les tissus, les cellules, les macromolécules, les atomes (et éventuellement des niveaux intermédiaires). L'organisation sera décrite par les liens entre ces divers éléments, qu'ils soient au même niveau ou à des niveaux différents; il s'agira en particulier de liens de contiguité, de liaisons chimiques, ou hormonales...

Une cellule y apparaît schématiquement comme le recollement de toutes ses macromolécules et des relations entre elles; elle a aussi une organisation interne plus complexe, formée hiérarchiquement par ses atomes, ses molécules, les populations moléculaires, les organites et tous leurs liens.

D'une manière générale nous représenterons un tel système par une *catégorie*; c'est la donnée d'objets et de flèches (ou liens) entre ces objets, c'est-à-dire un graphe avec éventuellement plusieurs flèches entre 2 objets donnés. On suppose que pour chaque objet il existe une flèche fermée, l'identité là de cet objet, qui correspond au "soi" de l'élément. De plus si 2 flèches sont consécutives, on leur associe une nouvelle flèche

qui est leur composé. Cette composition est associative, et le "soi" d'un objet en est une unité.

*b) Recollements. Limites.* - Dans une catégorie, la nature des objets est quelconque. Mais dans l'exemple précédent, nous voyons que la cellule peut être considérée de deux façons différentes, soit comme un constituant simple d'un objet de niveau supérieur, par exemple d'un tissu; soit comme un système complexe caractérisé par son organisation interne. Ainsi chaque élément apparaîtra sous une double face, qu'on le considère par rapport au niveau supérieur ou au niveau inférieur, ce que Koestler appelle un Janus.

Cette situation peut être parfaitement bien décrite dans une catégorie, en y distinguant des objets de plus ou moins grande complexité à l'aide de la notion de limite (inductive) d'un système d'objets liés  $A_1$ . Cette limite représentera le recollement de tous les objets liés  $A_1$  obtenu en tenant compte des liens spécifiques entre eux. Ce sera donc un objet de la catégorie, s'il en existe, qui aura le même comportement par rapport à tout autre objet que tous les objets liés; qu'est ce que veut dire "le même comportement"?

Un *lien collectif* (ou cône) du système d'objets liés vers un objet B est formé de liens individuels entre les différents objets  $A_1, A_2$  et B, ces liens étant reliés par les liens spécifiés entre les  $A_i$ . Autrement dit, si  $A_2$  est lié à  $A_1$ , son comportement devra suivre celui de  $A_1$ , et lorsqu'il y a des liens dans les deux sens, les comportements de  $A_1$  et  $A_2$  devront être concertés. La *limite* sera un objet tel que ses liens vers un autre objet B correspondent exactement aux liens collectifs du système des objets liés vers B; en particulier on a un lien collectif "d'attachement" des objets liés vers leur limite (déterminée à un isomorphisme près).

Le système des objets liés peut être considéré comme représentant l'organisation interne de la limite. Pour pouvoir compter plusieurs fois le même objet (comme dans un mot, limite de ses lettres, où la même lettre peut revenir plusieurs fois à des places différentes), le système d'objets liés sera défini plus précisément par la donnée de sa "forme" ou "esquisse", qui sera un graphe, et d'une réalisation de cette forme, représentée

par un homomorphisme de ce graphe dans la catégorie (i.e., une application qui associe à un sommet  $i$  un objet  $A_i$ , et à une flèche entre deux sommets  $i$  et  $j$ , un lien de  $A_i$  vers  $A_j$ ). En termes d'informations, l'esquisse correspondrait au message et sa réalisation à la réception du message.

La cellule apparaît bien comme la limite (dans la catégorie de l'organisme) de ses macromolécules liées. Donnons en d'autres exemples concrets.

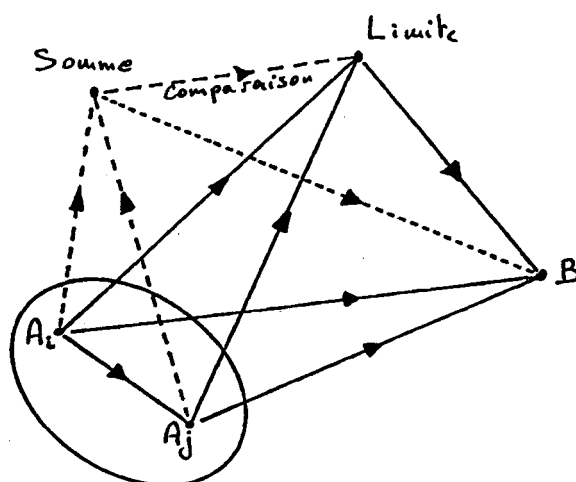
Si l'on prend une catégorie comprenant des individus et les sociétés qu'ils forment, une société correspond à la limite de ses membres avec tous les liens appropriés. Par exemple, une association est la limite de ses membres, avec leurs relations d'intérêts. Les liens collectifs de ces membres sont dictés par les règles de l'association, et le langage d'un membre en tant qu'individu privé ou en tant qu'associé peut être totalement différent; toutes les incompréhensions qu'entraîne parfois le métalangage proviennent de là. L'association pourra se faire représenter par une partie de ses membres, à condition que le sous-système d'objets liés ainsi formé ait la même limite; on dira alors que c'est un *sous-système représentatif*; on connaît des critères catégoriques (vérifiés dans les exemples concrets) pour qu'il en soit ainsi.

Le problème de l'existence de limites se pose par exemple dans la catégorie associée au cerveau d'un animal. Ses objets sont les neurones, les liens les circuits neuronaux formés d'une suite de neurones où chacun est lié au suivant par une synapse. Hubel et Wiesel ont montré qu'il existait des neurones dont l'excitation fait percevoir un segment d'une direction donnée; un tel neurone sera la limite du système lié des neurones excités par les différents points du segment. De même il existe des neurones représentant un angle, eux-mêmes limites de neurones liés représentant des segments. Par contre l'existence de neurones représentant de manière plus générale un objet familier se pose. Amari et Arbib ont démontré mathématiquement que lorsque l'on a un système lié de neurones qui est souvent excité, il se distingue un neurone particulier qui le représente (attracteur de la dynamique constituée des activités stationnaires des neurones), et qui en deviendra donc une limite. Expérimentalement, on a mis en évi-

dence de tels neurones, par exemple un neurone qui représente la main d'un singe (Gross & al, 1971). Cependant l'existence de ces "neurones-pilotes" (au sens de Nelson) a été récemment controversée, dans la mesure où la destruction du neurone limite, ou d'un grand nombre des neurones récepteurs, peut ne pas empêcher la perception de l'objet. Notre schéma explique bien comment la représentation de l'objet peut subsister dans un tel cas: une nouvelle limite (isomorphe) sera créée dès qu'il reste un système de neurones liés ayant la même limite que le système considéré (ce qu'on sait reconnaître par différents critères portant sur les systèmes liés).

*c) Emergence de nouvelles propriétés.* - Voyons comment ces résultats sont liés au problème du réductionnisme. Les propriétés de la limite (représentées par les liens de celle-ci vers un autre objet B) sont entièrement déterminées par celles des objets qu'elle recolle et des liens spécifiés entre eux. Ceci ne signifie pas qu'il s'agit de déduire brutalement les propriétés du "tout" de celles de ses éléments, comme le voudrait un réductionnisme "pur et dur". Il en est ainsi seulement lorsqu'on ne considère pas de liens entre les objets qu'on recolle, auquel cas la limite est la somme de ces objets, et ses liens vers B correspondent à toutes les familles de liens individuels vers B.

Lorsqu'on part d'un système d'objets  $A_i$  liés entre eux, on construit un lien bien déterminé de la somme des  $A_i$  (obtenue en oubliant leurs liens

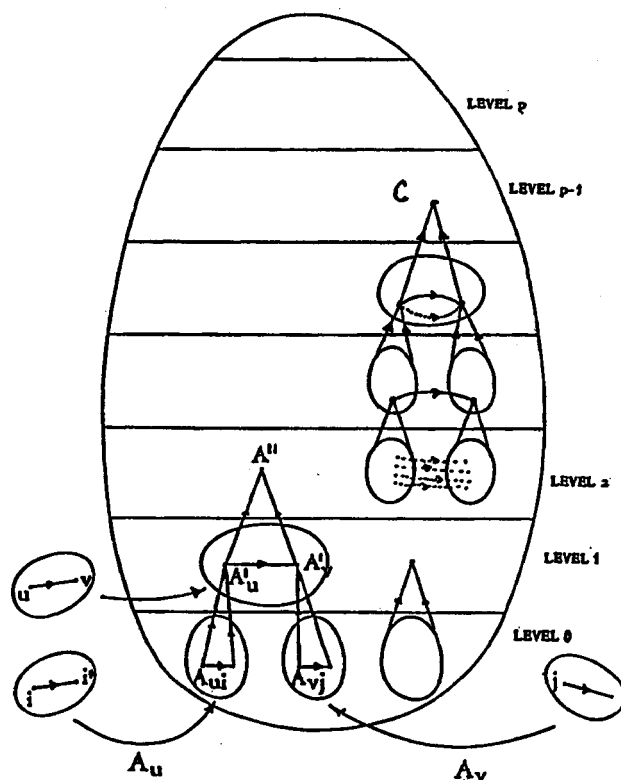


spécifiques) vers la limite du système des objets liés, qui représente la différence entre ces deux objets. L'intérêt de ce lien est qu'il mesure exactement l'émergence de nouvelles propriétés pour la limite, relativement à celles de ses composants (donc à celles de la somme). En effet, on montre que les liens de la limite (ou encore les liens collectifs du système d'objets liés) vers B correspondent aux liens de la somme vers B qui se décomposent par le lien différence. Autrement dit, les contraintes spécifiques vérifiées par un lien collectif permettent de distinguer une partie de l'ensemble des liens de la somme vers B, à savoir ceux qui sont compatibles avec le lien différence; les propriétés qui caractérisent cette partie sont des "propriétés émergentes" pour la limite. En particulier, elles peuvent conduire à la spécialisation de certains des objets liés.

Ainsi l'étude d'un objet complexe, recollant le système d'objets liés formant son organisation intérieure, est bien réduite à celle de ses constituants, mais à condition de tenir compte de leurs liens spécifiques. Remarquons que la limite est entièrement déterminée par la seule donnée de ces objets liés, et l'on peut en indiquer des constructions précises à partir de ceux-ci. Cependant, une fois obtenue, elle joue aussi un rôle holistique, puisque son comportement par rapport à n'importe quel autre objet de la catégorie est alors connu (d'après sa propriété "universelle"). C'est ce qui explique que le réductionnisme auquel conduit cette notion n'est pas "pur et dur", mais plus adapté à l'étude des systèmes complexes. On dira que c'est un *réductionnisme opérationnel*.

d) *Systèmes hiérarchiques (SH)*. - Dans l'exemple de l'organisme, les objets se répartissent en différents niveaux de "complexité", les objets du niveau n étant homogènes entre eux, mais plus complexes que ceux des niveaux inférieurs; plus précisément, chaque objet de niveau n recolle un système d'objets liés du niveau n-1 (par exemple, la cellule recolle ses macromolécules liées). Cette situation se décrit facilement dans une catégorie quelconque, ce qui nous donne la notion d'un *système hiérarchique* (abrégé en SH).

Ainsi, dans un SH, un objet du niveau  $n \neq 0$  est limite d'un système d'objets liés du niveau  $n-1$ ; chacun de ces objets est lui-même limite de son organisation du niveau  $n-2$  etc...; on décrira cette situation en disant qu'un objet du niveau  $n$  est une *limite itérée* d'ordre  $k$  d'objets liés du niveau  $n-k$  pour tout  $k < n$ . Par suite l'organisation interne de tout objet paraît de plus en plus complexe au fur et à mesure qu'on la considère à un niveau plus bas, de sorte que le niveau d'un objet mesure sa complexité dans le SH relativement aux niveaux inférieurs. Au contraire un objet paraît simple lorsqu'on le compare aux niveaux supérieurs, en oubliant les niveaux inférieurs. Cette notion de complexité est donc relative au cadre où l'objet est étudié. En particulier, on peut former un nouveau SH basé sur le niveau  $k$  en "supprimant" tous les niveaux inférieurs à  $k$ .



Pour les liens entre objets du niveau  $n$ , la situation est un peu plus compliquée parce qu'ils peuvent recoller des liens du niveau inférieur, mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Par exemple les molécules d'un cristal peuvent être reliées par des liaisons entre les atomes qui les joignent (liaisons de covalence), ou de manière plus diffuse par des nuages



d'électrons (liaisons métalliques); nous voyons bien que dans le premier cas, le lien entre les molécules est le recollement de liens entre leurs atomes (modélisé dans une catégorie par la notion de "faisceau" entre systèmes d'objets liés); par contre dans le second cas, les liens proviennent de structures complexes d'un niveau encore inférieur et ne sont pas directement médiatisés au niveau des atomes. Lorsque les liens sont médiatisés au niveau inférieur, une limite itérée d'ordre  $k$  peut s'exprimer comme une limite simple, mais dont la forme (ou esquisse) est beaucoup plus grande, ce qui conduit à une "algèbre des formes".

D'une façon générale, dire que le SH est basé sur le niveau 0 signifie qu'il est engendré (dans un sens bien précis) par les liens entre objets du niveau 0 et par les liens d'attachement des différents constituants à leur limite.

Citons des exemples naturels de SH (nous en verrons d'autres plus loin).

On associe à un écosystème le SH ayant pour niveaux successifs ses molécules, les êtres vivants qui l'habitent, les espèces.

Le SH des objets physiques aurait pour niveaux successifs les particules élémentaires et les interactions entre elles, les atomes, les molécules, les corps physiques. On peut le compléter en prenant ensuite les organismes biologiques, puis les sociétés animales ou humaines. Ou au contraire en prenant les corps célestes, les galaxies, les amas, ...

## 2. Systèmes évolutifs. Identité. Choix.

Les systèmes, biologiques en particulier, évoluent avec le temps, et de plus sont ouverts, c'est-à-dire qu'ils ont des échanges avec l'extérieur. Comment représenter cette situation à l'aide de catégories? Nous allons définir pour cela la notion de système évolutif.

*a) Systèmes évolutifs.* - Pour chaque instant  $t$  considéré, on se donnera l'état du système en  $t$ , qui sera une certaine catégorie (éventuellement un

SH). Ainsi pour un organisme ce sera la catégorie formée de tous ses organes, cellules, ... tels qu'ils existent à cet instant.

On va modéliser le changement entre  $t$  et un instant postérieur  $t'$  par un foncteur entre les états en  $t$  et  $t'$ , appelé foncteur *évolution*. Un foncteur est une application entre catégories qui a la propriété de conserver leurs structures de graphes et leurs compositions. On suppose qu'il y a composition des foncteurs évolution. Le transformé d'un objet en  $t$  par l'évolution de  $t$  à  $t'$  représente l'état en  $t'$  de cet objet.

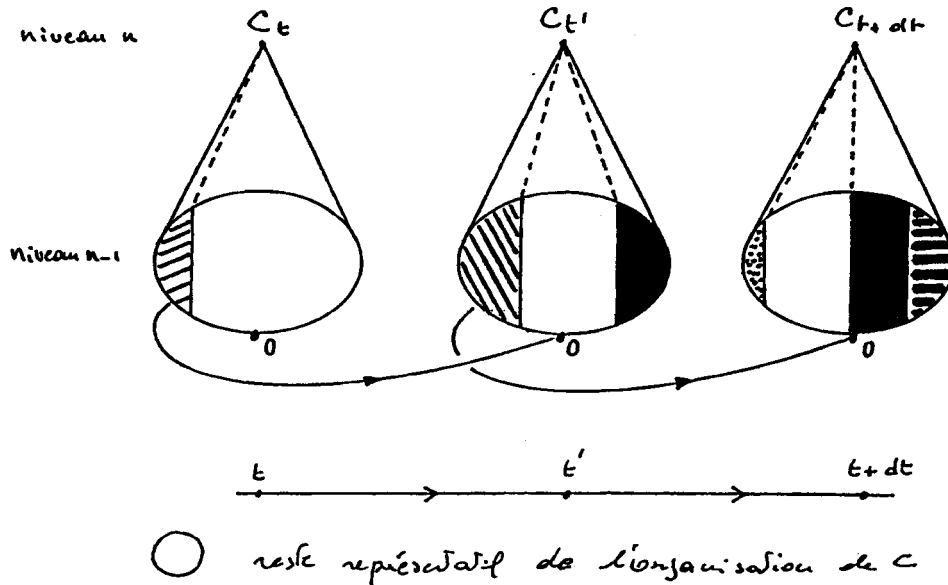
Le fait que le système soit ouvert signifie qu'il peut y avoir apparition ou disparition d'objets à l'instant suivant. La disparition va être modélisée par l'adjonction d'un *objet zero* (objet initial) dans chaque catégorie état; cet objet permet de représenter les objets et les liens ayant disparu après avoir existé antérieurement. On suppose qu'un objet ayant disparu ne réapparaît pas plus tard (l'évolution préserve donc les objets 0). On obtient ainsi la notion de *système évolutif* (abrégé en SE).

Un SE est un SHE si son état à chaque instant est un SH et si l'évolution n'augmente pas le niveau d'un objet. Tous les exemples de SH donnés précédemment sont en fait des SHE.

**b) Identité d'un objet complexe.** - Dans un SE la trajectoire d'un objet sera formée de tous les états antérieurs ou postérieurs de cet objet, de l'instant de son apparition à l'instant de sa disparition: la trajectoire d'un organisme (dans le SHE des systèmes biologiques) représenterait son histoire, de sa naissance à sa mort. Mais parler de l'organisme soulève le problème philosophique de définir son identité au cours du temps, alors que l'organisation interne qui le caractérise, par exemple au niveau cellulaire, se modifie sans cesse: ses cellules disparaissent et se renouvellent les unes après les autres, et de même pour tous leurs constituants.

D'une manière générale, nous pourrions définir l'identité d'un objet complexe du niveau  $n$  dans un SHE, en le considérant à chaque instant comme la limite de son organisation du niveau  $n-1$ . Entre 2 instants, certains de ses constituants ont disparu, d'autres au contraire sont rajoutés. Pour qu'il y ait conservation de l'identité, il suffit que durant une

certaine durée, disons de  $t$  à  $t+dt$ , l'état de l'objet reste la limite des seuls constituants préservés depuis l'instant  $t$ , de sorte que ceux-ci déterminent un sous-système représentatif de l'ensemble des constituants à chaque instant entre  $t$  et  $t+dt$ .



Mais au fur et à mesure, il va y avoir de plus en plus de pertes et des changements de plus en plus rapides des constituants et de leurs liens, de sorte que cette durée  $dt$  pendant laquelle l'organisation se maintient ainsi va diminuer et éventuellement tendre vers 0. Pour un organisme vivant, la cellule par exemple, ceci correspond à la vieillesse et à la mort. Cette manière de considérer la vieillesse permettrait de préciser des résultats de Rosen (1981) selon lesquels vieillesse et mort peuvent résulter d'une défaillance globale de l'organisme et non d'une accumulation de défauts ponctuels. En effet on connaît des critères "globaux" de perte de représentativité d'un sous-système d'objets liés par simple modification des liens spécifiques entre les objets.

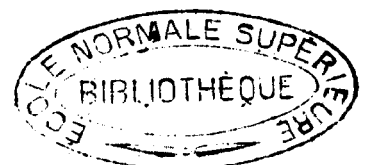
*c) Processus d'évolution.* - Revenons au SHE associé à un organisme. Le processus d'évolution pour une cellule résulte du fait que de nouvelles molécules sont absorbées par la cellule (par endocytose, ...), des composants de la cellule sont détruits ou décomposés (scindage d'un RNA, ...),

des synthèses de nouvelles macromolécules sont faites (par recollement de divers ions, ...). On décrit des opérations analogues aux autres niveaux; par exemple la mitose cellulaire s'obtient par absorption de nouvelles molécules, suivie de diverses synthèses, conduisant finalement à la disparition de la cellule en même temps qu'apparaissent deux cellules-filles. (Ce schéma, suggéré par Rashevsky (1967), n'envisage pas la reproduction comme maintien d'une cellule-mère et formation d'une cellule-fille.)

Dans la plupart des systèmes naturels, l'évolution résulte de même d'absorptions, destructions ou recollements de divers éléments. Nous allons modéliser ce processus pour un système ouvert quelconque (représenté par une catégorie à objet zéro). Pour cela, il faut d'abord choisir de nouveaux objets à absorber, des objets et des liens de la catégorie à détruire, des limites à préserver, et des systèmes d'objets liés à recoller; un tel choix sera appelé une *stratégie* sur la catégorie. Ensuite il faut voir comment appliquer cette stratégie, c'est-à-dire décrire comment modifier la catégorie de sorte à engendrer une nouvelle catégorie où les buts fixés soient atteints, et ce de la manière la plus économique possible. Le *Théorème de transition* donne la réponse: en termes catégoriques, il permet d'obtenir la solution universelle du problème posé par la stratégie. Ce résultat essentiel repose sur les théorèmes de complétion d'une catégorie par adjonctions de limites, sous la forme donnée par A. et C. Ehresmann (1972).

Comme le montrent les divers exemples que nous avons indiqués, l'évolution d'un SE se fait souvent par étapes successives, chaque étape étant décrite par le processus précédent. Autrement dit, le passage entre l'état à un instant  $t$  et le nouvel état à l'instant suivant consiste à choisir une stratégie en  $t$ , puis à l'appliquer comme plus haut (Théorème de transition). Dans le cas d'un SHE, l'évolution peut introduire des niveaux de plus en plus élevés au cours du temps, de sorte que la "flèche du temps" se lit sur l'ordre croissant des limites itérées obtenues.

Ce processus semble s'appliquer pour décrire la formation de l'algèbre des objets mentaux (au sens de Changeux, 1983) d'un homme: on part de la catégorie des neurones (déjà considérée) à la naissance; ses limites correspondraient peut-être aux formes biologiquement prégnantes (au sens de



Thom). Au cours de la vie, des niveaux supérieurs de complexité sont ajoutés par la formation de percepts, images mentales et concepts, qui sont des limites de certains systèmes de neurones liés; puis des concepts de concepts, ...

Une réflexion sur ce processus d'évolution par étapes pour un SH nous ramène au problème du réductionnisme: à un instant donné ou pendant la durée d'une étape, le comportement d'un objet d'un certain niveau est entièrement déterminé par son organisation interne des niveaux inférieurs (c'est le réductionnisme opérationnel vu plus haut). Par contre, les phénomènes activant le changement d'étapes et le choix des stratégies qui en résulte (choix qui reste le vrai problème pratique) peuvent faire intervenir tous les niveaux. En particulier, les niveaux supérieurs peuvent "commander" le comportement des niveaux inférieurs à l'instant suivant; ainsi une trop grande densité de population aura des répercussions organiques au niveau de ses membres. Nous allons dans la suite relativiser notre modèle pour préciser comment la situation se présente de manière différente suivant le niveau d'organisation auquel on se place.

### **3. Modèle relatif à des agents.**

Jusqu'ici, nous avons cherché à modéliser la structure complète d'un système; mais en général, on étudiera un SH à partir d'un niveau particulier (par exemple, pour un organisme, le niveau moléculaire en Biologie moléculaire, le niveau des organes en Physiologie, ...); ou en fonction de certains constituants (ou agents) en interaction dynamique avec le système (par exemple, les populations de lymphocytes T pour l'étude du système immunitaire). Pour rendre compte de cette situation nous allons déterminer la représentation partielle, plus ou moins déformée, que l'on peut se faire du système et de son évolution à partir d'une telle sous-catégorie privilégiée.

a) *Champ d'un agent.* - Pensons par exemple à un animal dans un écosystème; il ne percevra que certains objets de l'écosystème; et même ceux-ci ne lui apparaîtront pas dans leur totalité, mais sous des aspects particuliers. Ainsi il ne verra éventuellement d'un autre animal que ses traces, sans distinguer nécessairement si deux traces différentes proviennent du même animal. Tous les aspects de son milieu qu'il perçoit ainsi forment ce que Uexküll appelle son "Umwelt", que nous traduirons par champ. Et il pourra transmettre des informations sur son champ aux animaux avec lesquels il est lié (cris d'alarme, émission de phéromones, ...).

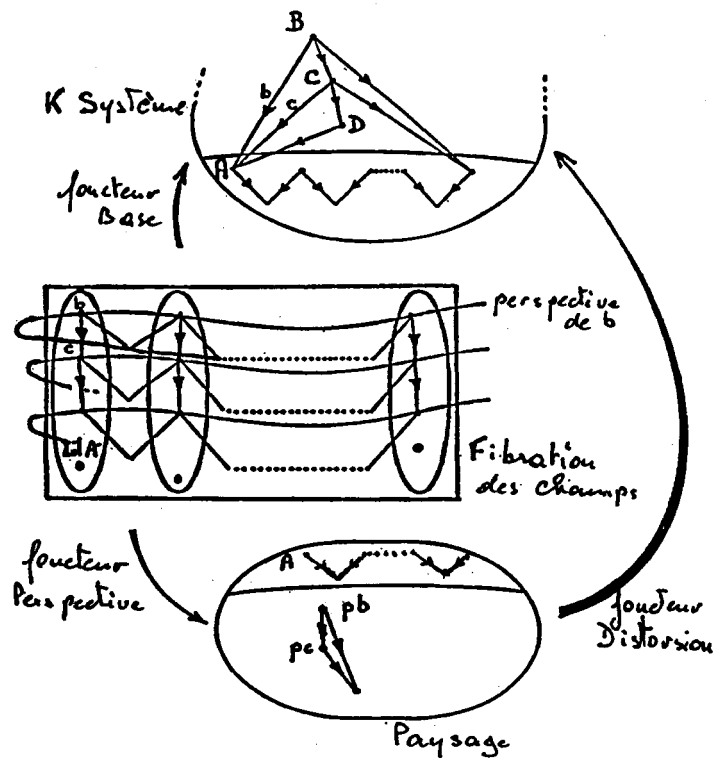
Cette situation sera modélisée par la fibration des champs associée à un système et à un sous-système, représentés par une catégorie et une sous-catégorie (dont les objets sont appelés agents). On appellera le système global le *K(rypto)-système* pour bien spécifier que sa structure ne sera que partiellement connue par l'intermédiaire des agents, et ainsi ne pas confondre ce modèle "externe" complet avec le modèle relatif aux agents que nous allons construire.

Le *champ d'un agent* A sera la catégorie ayant pour objets les aspects des objets du système perçus par A, et dont les flèches entre deux aspects seront définis par les liens du K-système compatibles avec ces aspects. Ces aspects sont modélisés par les flèches issues des objets du K-système et allant vers A. En particulier, le champ a un objet final, à savoir l'aspect "identité de A" (son "Soi").

Dans le champ de A, il n'est pas possible de déterminer si deux aspects différents proviennent du même objet du K-système ou de deux objets différents ; il peut aussi y avoir des objets du K-système qui ne sont représentés par aucun aspect. Il y a donc une déformation du système due à la restriction au champ; elle peut être théoriquement mesurée (dans le modèle complet) par le *foncteur base* qui associe à un aspect l'objet du K-système correspondant. Pour qu'il n'y ait pas de déformation, il faudrait que ce foncteur soit un isomorphisme, c'est-à-dire que l'agent soit un objet final du système.

Si  $A'$  est un autre agent et s'il y a un lien de  $A$  à  $A'$ , chaque aspect pour  $A$  est transmis à  $A'$  sous forme de son composé avec le lien. Nous définissons ainsi un foncteur *Information* du champ de  $A$  vers le champ de  $A'$ . Les foncteurs Informations se composent, de sorte que les champs des différents agents et les foncteurs Informations entre eux forment ce qu'on appelle une fibration en théorie des catégories.

b) *Paysage des agents.* - Cette *fibration des champs* contient toutes les informations obtenues sur le K-système quand on l'étudie par l'intermédiaire des agents. Elle permet non pas de reconstruire le K-système lui-même, mais d'en élaborer un modèle, plus ou moins déformé, relatif aux agents. Ce modèle relatif, qu'on appelle le *paysage* de la fibration, recolle les différents champs en tenant compte des foncteurs informations (c'est la limite dans la catégorie des catégories de la fibration). La déformation qui en résulte et que l'on pourra explicitement mesurer dans le modèle "externe" ne peut pas être reconnue au niveau des seuls agents.



De même que Russell propose de définir une chose par les différents aspects sous lesquels elle peut être perçue, un objet du paysage, appelé *perspective*, sera formé de tous les aspects qui se déduisent de l'un d'entre eux par des foncteurs information, directement ou via un zig-zag de tels foncteurs. Ce sont donc tous les aspects qui, grâce aux liens entre agents, peuvent être reconnus comme aspects d'un même objet du K-système. Naturellement, ce même objet peut avoir plusieurs perspectives différentes, sans que l'on puisse distinguer, au niveau des agents, qu'elles ont le même référent. Les liens entre perspectives sont définis de manière analogue.

Si le K-système est un SH ou un SE, le paysage (ou espace de perspective au sens de Russell) l'est aussi.

La catégorie des agents se retrouve dans le paysage, en identifiant l'agent A à la perspective de son "soi". Un résultat essentiel est que *le paysage est la "plus petite" catégorie contenant les agents et dans lequel ils ont la même fibration des champs que dans le K-système.*

Autrement dit, il n'y a pas de redondance dans les informations fournies par le paysage, et, au niveau des agents, on ne peut distinguer aucune différence entre le paysage et le K-système. Pourtant, il y a une distorsion, mesurée par un foncteur entre les deux; ce foncteur est un isomorphisme (i.e. le modèle relatif aux agents n'est pas déformant) dans le seul cas où les agents forment un sous-système représentatif du système global, c'est-à-dire lorsque l'on prend le "paysage du paysage".

*c) Interaction dynamique entre le K-système et les agents.*- La distorsion du modèle relatif pourra être reconnue au niveau des agents eux-mêmes par les erreurs qu'elle entraînera au cours de l'évolution du système. Pensons par exemple à la détérioration d'un écosystème par l'homme sous l'effet accumulé de changements mal conçus. Pour analyser cette situation on va reprendre le processus d'évolution par étapes d'un SE en y précisant le rôle des agents dans le passage d'une étape à la suivante.

Ainsi dans un organisme à un instant donné, différents phénomènes peuvent activer le processus de changement, soit pour maintenir l'homéo-



stasie en compensant une perturbation externe ou un déséquilibre interne provenant de changements antérieurs mal adaptés, ou pour effectuer un mouvement volontaire. Comme les informations reçues ne sont que partielles, la réaction peut ne pas avoir l'effet prévu, d'où de nouveaux changements, éventuellement à un autre niveau.

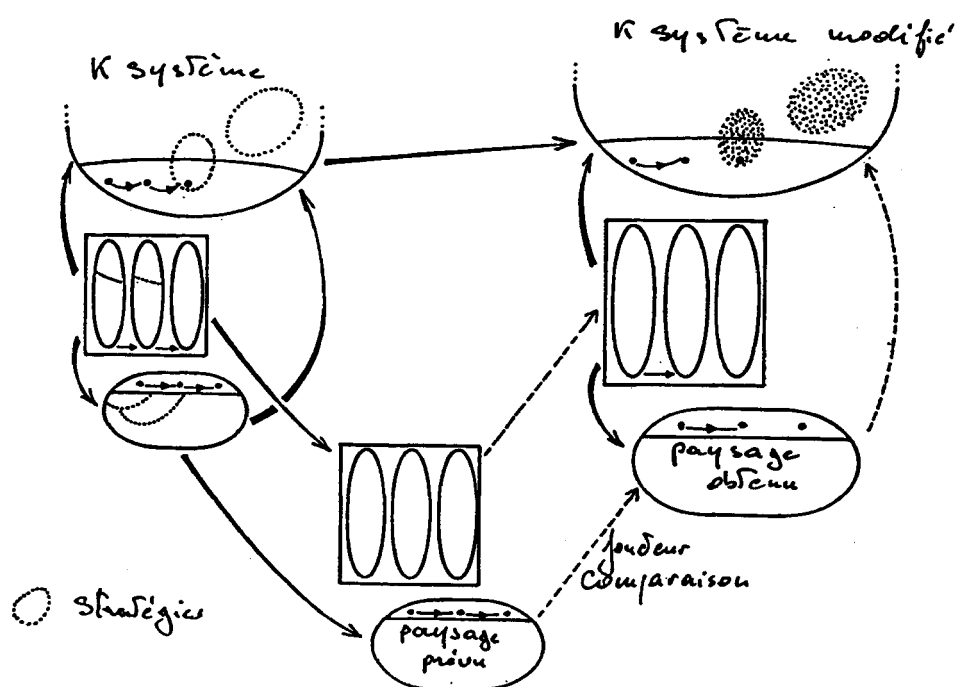
Ce processus sera modélisé comme suit: on considère un SE et un sous-SE d'agents; les paysages correspondants forment un SE. Le SE global sera encore appelé un K(rypto)-système pour spécifier qu'il n'est connu que par l'intermédiaire des paysages.

Considérons l'état à un instant donné. Le passage à l'état suivant comporte trois parties:

1. Les modifications voulues seront déterminées au niveau des agents (et non sur le K-système) et traduites sur les champs des agents et sur le paysage en termes de stratégies, donc d'objets à détruire, à recoller... Si, compte tenu des diverses contraintes internes et externes, plusieurs stratégies sont admissibles, il faudra les comparer, et chercher à déterminer la plus favorable pour le système dans son ensemble, et pas nécessairement pour chaque agent particulier. En effet, il peut y avoir conflit entre les stratégies propres aux différents agents et le problème très difficile sera de trouver une stratégie concertée. Pensons par exemple aux diverses solutions de réactions hormonales à un stress, qu'elles soient cortisoliques, adrénaliniques, thyroïdiques, ... dont la concertation sera aussi sous la dépendance de divers systèmes de neuromédiateurs sérotoninergiques, adrénérgiques ou cholinérgiques. Là interviendrait par exemple la théorie des jeux ou des métajeux; ou, lorsque le problème peut être quantifié, la théorie des catastrophes (Thom, 1974). Notre modèle se contente de poser ce problème du choix de façon précise en introduisant la notion de *système cadre* et de *stratégie concertée*.

2. Une stratégie ayant été choisie sur les champs et le paysage P, le *Théorème de transition via un champ* nous permet de décrire la fibration des champs et son paysage  $P^*$  dans lesquels les buts fixés seraient atteints de la manière la plus économique.

3. Mais le paysage P déforme le K-système K, et la stratégie n'est répercutée à K qu'au travers du foncteur distorsion entre les deux; de plus, il peut y avoir d'autres modifications de K, non perceptibles au niveau des agents et de leur paysage. Le résultat est que les modifications risquent de ne pas avoir l'effet prévu sur K lui-même. Ceci se traduira par le fait que le paysage P\* des agents dans le K-système modifié sera différent du paysage prévu P\*.

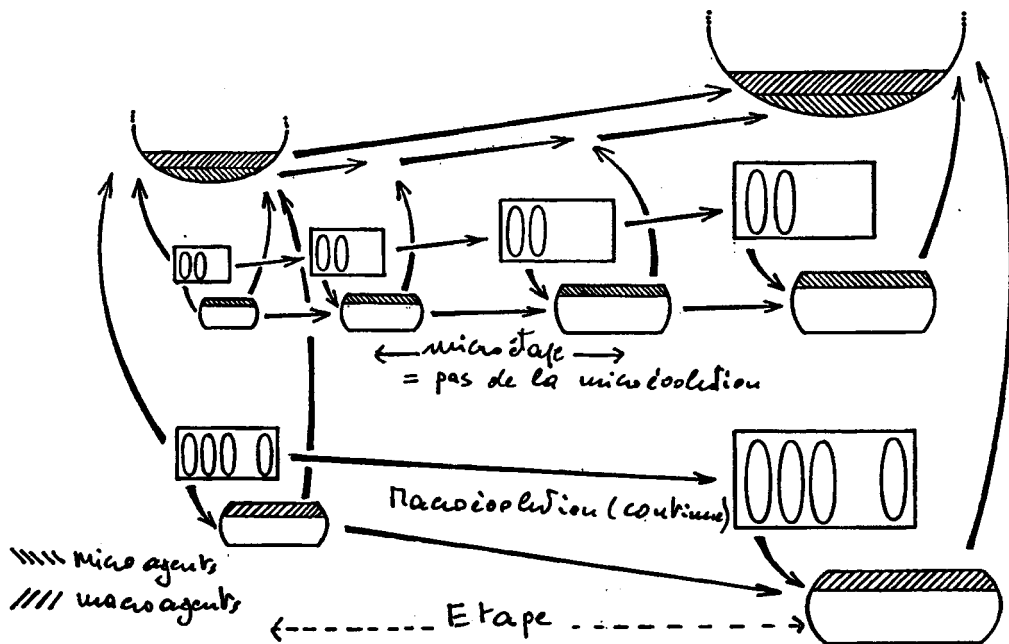


Le Théorème de modification d'un K-système nous permet de modéliser cette situation et de mesurer la différence entre les deux paysages P<sup>~</sup> et P\* par un foncteur *comparaison* entre eux. Si ce foncteur, qui est donc connu au niveau des agents mêmes, n'est pas un isomorphisme, de nouvelles modifications devront intervenir.

*c) Microévolution et macroévolution.* - Ce processus semble bien représenter ce qui se passe dans des systèmes naturels (biologiques, sociologiques, développement des connaissances ...) de toute nature. Dans les applications concrètes, le niveau des agents dans le SH et leur durée de latence

(temps mis pour accomplir une modification, par exemple une réaction chimique dans une cellule) ont une grande influence sur la manière d'appréhender l'évolution. Nous renvoyons à [2] pour une discussion sur ce problème, et nous donnerons juste un exemple montrant cette influence.

Dans un organisme, lorsqu'on prend pour agents des molécules, la *microévolution* sera décrite en termes de nombreux petits pas successifs. Mais au niveau macroscopique, où les agents sont des populations cellulaires, ces pas ont une trop courte durée pour qu'on puisse les distinguer, et seul le résultat moyen sera pris en compte par l'utilisation d'observables (concentrations de tel métabolite, ...). Ceci explique que la plupart des modèles mathématiques en Biologie s'intéressent à des populations de molécules, de cellules, ... et non à des individus, et donnent des descriptions régulières, par équations différentielles le plus souvent, de l'évolution pendant de longues périodes. Mais ces descriptions ne sont qu'une approximation continue de la microévolution discontinue (comme Bachelard l'a bien mis en évidence, il ne faut pas confondre régularité et continuité). Lorsque cette approximation devient trop erronée (c'est le facteur comparaison qui le mesure), il faut en changer (variation de paramètres ou nouvelles conditions aux limites).



De cette façon, la *macroévolution* est décrite sous forme de longues étapes régulières, séparées par des "fractures" pour réajuster la situation. Ceci permet de préciser la suggestion de R. Rosen d'approcher un système complexe par des systèmes simples localement et temporairement, avec changement de système quand l'approximation est trop défectueuse.

Au total, nous proposons ce modèle catégorique pour l'étude structurelle et dynamique des systèmes complexes naturels; l'outil essentiel y est la notion de "rassemblement", modélisée par les limites, qui nous semble à la base de toute l'activité de connaissance. Mais ce modèle est sans doute plus heuristique que prévisionnel; certes il permet de voir les problèmes sous un angle et dans un langage différent, mais permettrait-il d'y répondre ?

A.C. EHRESMANN  
U.F.R. de Mathématiques  
33 rue Saint-Leu  
80039 AMIENS Cedex.

J.-P. VANBREMEERSCH  
Centre médical Saint-Roch  
AMIENS