SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

C. S. CHIHARA

Existence en mathématiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1986, fascicule 5
« Existence en mathématiques », , p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1986___5_A1_0>

Existence en Mathematiques

C.S. Chihara

Univeristy of California, Berkeley

Ici meme, a ce Séminaire de philosophie et mathématique de L'École normale supérieure, M. Réné Thom a déclare récemment que les objets mathématiques, tels les nombres, les fonctions, et les ensembles, sont imaginaires. Ces objets, selon lui, n'existeraient donc pas vraiment. Cette thèse contredit une position commune à plusieurs philosophes américains, parmi lesquels Willard Quine et Hilary Putnam, tous deux de l'Université de Harvard, position selon laquelle les objets mathématiques existent vraiment. Quine a proposé de considérer les objets de mathématique comme étant des objets théorétiques, semblables en cela aux molécules et aux atomes.[1] On ne peut pas les voir, mais ils existent vraiment. Putnam a, quant a lui, donné un argument a l'appui de cette position, argument qui est en gros le suivant:

Quand on lit un texte de mathématiques, on trouve généralement des énonces affirmant l'existence de quelque chose: celle, par example, des racines d'une équation, des singularités d'une équation, ou d'un ensembles pourvu de certaines propriétés specifiques. Si on admet que les théorèmes des mathématiques sont vrais, il semblerait qu'on doive admettre aussi que ces objets mathématiques existent. Certes il y a des philosophes aux Etats Unis, comme Hartry Field, qui maintiennent que les théorèmes des mathématiques ne sont pas vrais,[2] mais c'est là une position que je trouve peu plausible. Putnam, en tout cas, a soutenu que nous avons de bonnes raisons d'affirmer que les théorèmes des mathématiques classiques sont vrais. Selon lui, il est raisonable de croire qu'un énoncé mathématique est vrai, même quand on n'a pas de preuve de cet énoncé, parce qu'on peut fournir des reasons, qui, sans être demonstratives, étayent cette croyance. On peut vérifier une hypothèse mathématique, selon Putnam, comme on peut vérifier une hypothèse scientifique. En fait, on peut utiliser la méthod "hypothético-déductive". Or, selon Putnam, c'est le grand succès des mathématiques classiques dans les sciences qui justifie notre croyance que leurs énoncés sont vrais, du moins approximativement.[3]

Il y a d'ailleurs un deuxième argument que Putnam a donne a l'appui de la position Platonicienne. Le voici: si on est un réaliste à l'égard du monde physique, on dira que la loi de gravitation universelle est un énoncé objectif. Que dit cet énoncé? Il dit en gros que les objets physiques agissent de telle sorte que le quotient de deux nombres associés convenablement avec ces objets est égal à un troisieme nombre associé convenablement avec ces objets. Mais comment une telle proposition peut-elle être vraie si les nombres et les associations n'existent pas?[4]

Ce soir, je voudrais vous donner une réponse à ces arguments, ou plutot en esquisser une. Les détails en sont en effet trop nombreu pour que l'exposé que j'en ferai ce soir puisse etre complet. La strategie que j'adopterai ici consiste à admettre la verité des mathématiques et de la physique, tout en évitant d'affirmer qu'il existe des objets mathématiques.

Je voudrais développer un système de mathématiques dans lequel on remplace les énoncés existentiels des mathématiques traditionelles par des énoncés qui disent qu'il est possible de construire quelque chose. Plus spécifiquement, je remplacerai le quantificateur existentiel de la logique classique par un quantificateur spécial. Ce quantificateur est très différent du quantificateur existentiel de l'Intuitionisme ou du Constructivisme. On peut dire que le quantificateur existentiel des mathématiques intuitionistes peut être expliqué en gros comme suit:

> On peut affirmer $(E\underline{x})\underline{F}\underline{x}$ si et seulment si on a un procédé régulier qui permet de construire un élément vérifiant la propriété $\underline{F}$.

Donc, les règles logiques qui gouvernent ce quantificateur sont très différentes des règles logiques qui gouvernent le quantificateur existentiel des mathématiques classiques. Mais les règles logiques qui gouvernent mon quantificateur constructif sont essentiellement les mêmes que celles qui gouvernent le quantificateur existentiel classique. Evidemment, le quantificateur constructif que je voudrais utiliser est complètement différent du quantificateur existentiel des mathématiques constructivistes.

Je commencerai, donc par expliquer les propriétés logiques de ce quantificateur. D'abord, il faut dire que ce quantificateur, écrit comme

$$(C\underline{x})\ \ldots$$

peut être traduit comme:

Il est possible de construire un x tel que ...

Donc considérez le phrase

(C$\underline{x}$)($\underline{x}$ est un avion plus grand que la tour Eiffel)

Elle signifie:

Il est possible de construire un avion plus grand que la tour Eiffel.

Le quantificateur '(C$\underline{x}$)' est un opérateur primitif dans mon systѐme; mais pour clarifier la logique de ce quantificateur, on peut utiliser les notions sémantiques dûes à Saul Kripke.[5] On peut dire pour le cas ci-dessus, utilisant la notion de monde possible,

Il y a un monde possible dans lequel un avion plus grand que la tour Eiffel existe.

Il faut dire, cependant, que j'utiliserai les notions sémantiques de Kripke seulement pour expliquer et clarifier la logique de ce quantificateur constructif. Je ne crois pas que des choses comme des mondes possibles existent vraiment. Ces notions ne sont pas les fondements de mon systѐme. Je considѐre cette théorie sémantique comme un outil pour faciliter le raisonement à propos des notions de possibilité.

Je commence par un langage logique qui s'appelle L.

La syntaxe

Les symboles primitifs:

Les <u>variables</u> sont les lettres minuscules '<u>u</u>' jusqu'a '<u>z</u>' (avec ou sans indices inférieurs).

<u>Constantes</u>:

Il y a trois sortes de constantes:

(1) Les <u>constantes d'individus</u> sont les lettres minuscules '<u>a</u>' jusqu'a '<u>t</u>' (avec or sans indices inférieurs).

(2) Les <u>Prédicats</u> sont les lettres majuscules (avec or sans indices supérieurs et avec or sans indices inférieurs). Un prédicat avec un indice superieur n est un prédicat de degre n (ou un prédicat à n places).

(3) <u>Constantes logiques</u>:

$$- \quad \vee \quad \& \quad --> \quad <--> \quad (\quad) \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{A}$$

Si α est une variable ou une constant d'individu, disons que α est un symbole d'individu.

<u>Formules</u>:

1. <u>Les formules atomiques</u>:

Si ψ est un predicat de degree n,

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des symboles d'individus,

$$\psi \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

est une formule atomique.

2. Toutes les formules atomiques sont des formules.

3. Si φ et θ sont des formules et α est une variable, les expressions suivants sont des formules:

$$-\varphi$$
$$(\varphi \ \& \ \theta)$$
$$(\varphi \vee \theta)$$
$$(\varphi \dashrightarrow \theta)$$
$$(\varphi \longleftrightarrow \theta)$$
$$(\mathbf{E}\alpha)\ \varphi$$
$$(\mathbf{A}\alpha)\ \varphi$$

Une occurrence d'une variable α dans une formule φ est <u>libre</u> si α n'est pas liée par un quantificateur.

Une formule dans laquelle il n'y a pas d'occurrence d'un variable libre est une <u>phrase</u>.

Semantique

Une interprétation K est un quadruple ordonné <<u>W</u>, <u>a</u>, <u>U</u>, <u>I</u>> ou:

<u>W</u> est un ensemble non vide;

<u>a</u> est un élément de <u>W</u>;

<u>U</u> est une fonction qui assigne à chaque élément de <u>W</u> un ensemble non vide;

<u>I</u> est une fonction telle que

(a) $\underline{I}$ assigne a chaque constante d'individu un élément de $\underline{Z}$ = l'union de toutes les $\underline{U}(\underline{w})$, où $\underline{w}$ est un élément de $\underline{W}$;

et

(b) si $\underline{P}$ est un prédicat de degré n, et $\underline{w}$ est un élément de $\underline{W}$, $\underline{I}$ assigne à chaque couple ordonné $\langle \underline{P}, \underline{w} \rangle$ un élément de

$$\underline{Z} \times \underline{Z} \times \ldots \times \underline{Z}$$

Il faut expliquer la définition ci-dessus. Intuitivement, $\underline{W}$ est l'ensemble de tous les mondes possibles; $\underline{a}$ est le monde actuel, $\underline{U}(\underline{w})$ est l'ensemble des choses qui existent dans le monde $\underline{w}$, et si $\underline{x}$ est une constante individu, $\underline{I}(\underline{x})$ est la dénotation de $\underline{x}$, et si $\underline{x}$ est un prédicat, $\underline{I}(\underline{x}, \underline{w})$ est l'extension de $\underline{x}$ dans $\underline{w}$.

Notez que $\underline{I}$ peut assigner à une constante d'individu une chose qui n'est pas un élément du monde a, c'est à dire, une constante d'individu peut dénoter une chose qui n'existe pas dans le monde actuel.

<u>La valeur de verité d'une phrase relativement à une interpréta-tion</u>

Supposons que M soit une interprétation.

<u>Atomique</u>:

Si Ψ est un prédicat à n places, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes d'individus, identiques ou distinctes,

$$\Psi \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

est vraie relativement a M ssi

$$\langle I(\alpha_1), \ \ldots \ , I(\alpha_n)\rangle \in I(\psi, \underline{a})$$

<u>Moleculaire</u>:

Si $\varphi = -\theta$, φ est vraie relativement à M ssi θ n'est pas vraie relativement à M.

Si $\varphi = (\theta \ \& \ \chi)$, φ est vraie relativement à M ssi θ est vraie relativement à M et χ est vraie relativement à M.

Si $\varphi = (\theta \vee \chi)$, φ est vraie relativement à M ssi θ est vraie relativement à M ou χ est vraie relativement à M.

Si $\varphi = (\theta \dashrightarrow \chi)$, φ est vraie relativement à M ssi χ est vraie relativement à M ou θ n'est pass vraie relativement à M.

Si $\varphi = (\theta \longleftrightarrow \chi)$, φ est vraie relativement à M ssi θ et χ sont vraies relativement à M ou θ et χ ne sont pas vraies relativement à M.

<u>Quantificateur</u>:

Pour faciliter la spécification de ces cas, je donne les définitions suivantes:

β -variante:

Soit M' une interpretation exactement la même que M avec l'exception possible de ce qui est assigné à la constante d'individu β. Nous disons que M' est une β-variante de M.

Si α est une variable, β est un symbole d'individu, et ψ est une formule, $\psi\alpha/\beta$ est le résultat du remplacement de toutes les occurrances libres de α dans ψ par β.

Dans la suite, ψ sera une formule, α une variable, et β la première constante d'individu qui ne se trouve pas dans ψ.

Revenons à la definition de la verité:

Si $\varphi = (C\alpha)\psi$, φ est vraie relativement à M ssi $\psi\alpha/\beta$ est vraie relativement à au moins une β-variante de M.

Si $\varphi = (A\alpha)\psi$, φ est vraie relativement à M ssi $\psi\alpha/\beta$ est vraie relativement à toutes les β-variantes de M.

A propos de la définition de la verité, il faut faire les remarques suivantes: d'abord, le valeur de verité d'une phrase atomique est toujours evaluée relativement au monde actuel. Deuxièmement, une phrase comme '$\underline{F}^1\underline{b}$' peut être vraie même quand $\underline{I}(\underline{b})$ n'est pas un élément de $\underline{U}(\underline{a})$, autrement dit, un objet qui n'existe pas dans le monde actuel peut avoir une propriété dans ce monde.

Il faut répéter aussi que j'utilise la sémantique des mondes possibles pour expliquer la logique du quantificateur constructif. Cette sémantique est seulement un outil pour clarifier les propriétés logiques de ce quantificateur et non un moyen pour définir ce quantificateur. Donc, on peut montrer, à l'aide de cette théorie sémantique, qu'une formule

$$(A\underline{x})F\underline{x}$$

est équivalente à

$$-(C\underline{x})-F\underline{x}$$

Mais cette équivalence depend de l'analyse Kripkeene donnée ci dessus. En fait, pour moi, le quantificateur

$$(C\underline{x})$$

est primitif, et le quantificateur

$$(A\underline{x})$$

est défini par:

$$(A\underline{x})F\underline{x} = -(C\underline{x})-F\underline{x}$$

Considerez la question: Peut-on remplacer le quantificatuer '$(C\underline{x})$' par '$\Diamond(E\underline{x})$'? Pour examiner cette question, convenons qu'une phrase qui consiste dans les mots 'Il y a exactement', suivis d'un chiffre arabe, suivi du mot 'étoiles', est <u>une phrase expressive de cardinalité</u>. Par exemple, la phrase

Il y a exactement dix étoiles

est une phrase espressive de cardinalité. Comparez maintenant la phrase

[1] (Ex)(*x* est une phrase expressive de cardinalité et *x* est vraie)

avec la phrase

[2] ◊ (E*x*)(*x* est une phrase expressive de cardinalite et *x* est vraie).

[1] est vraie ssi le nombre d'etoiles est fini, mais [2] est vraie même si le nombre d'étoiles est infini, parce qu'il est possible que le nombre d'étoiles soit fini. Utilisant la sémantique des monde possibles, on peut dire que [2] est vraie s'il y a un monde possible *w* dans lequel une phrase expressive de cardinalité existe qui est vraie à *w*; mais [1] est vraie s'il y a un monde possible *w* dans lequel une phrase expressive de cardinalité existe qui est vraie relativement au monde actuel. c'est-à-dire, pour déterminer le valeur de verite de [1], il faut parcourir les mondes possibles pour voir quelles phrases expressive de cardinalités s'y trouvent; mais pour déterminer le valeur de verité de [2], il faut parcourir les mondes possibles pour voir aussi combien d'étoiles se trouvent dans chacun.

Je ne vous donnerai pas un système de déduction pour ce langage. Il sera suffisant, j'espere, de dire qu'on peut utiliser un systeme de déduction orthodoxe - notamment un des calcul des prédicats classique.[6] Et on peut démontrer que ce système de déduction est fiable et complet.

J'espère que la logique des quantificateurs constructifs est assez claire. Passons maintenant à la question suivante: De quelle sorte de chose parle-t-on quand on utilise les quantificateurs constructifs dans ce systeme de mathématiques? Les énoncés de ce systeme disent qu'il est possible de construire quelque chose - mais quelle sorte de chose? J'essaierai maintenant de répondre à cette question.

Dans le système de Frege, il y a deux sortes des choses: les objets et les concepts. Un concept n'est pas une phrase ouverte, mais il y à une relation entre un concept et une phrase ouverte semblable a la relation entre un objet et son nom. Les noms et les phrases ouvertes sont des choses linguistiques, tandis que les objects et les concepts sont des choses "dans le monde". La relation principale entre un objet et un concept est la relation _tomber sous_. Par exemple, la phrase

[3] Francois Mitterand est le président de la République

peut être analysée comme suit: Elle consiste d'un nom 'Francois Mitterand' et de la phrase ouverte '_x_ est le président de la République'. Le nom a une référence; c'est la personne nommée 'Mitterand'. Mais aussi, selon Frege, la phrase ouverte a une référence: un concept. Quand la variable qui se trouve dans la phrase ouverte est remplacée par un nom, on aura une phrase; et si cette phrase est vraie, on peut dire que l'object nommé par le nom satisfait la phrase ouverte et aussi tombe sous le concept qui est la référence de la phrase ouverte.

Dans le système de Frege, il y a aussi des extensions de concepts. L'extension d'un concept peut être considérée comme l'ensemble des objets qui tombent sous le concept. Donc, Francois Mitterand est lié aux trois choses logiques suivantes:

(a) il *satisfait* la phrase ouverte '*x* est le président de la République';

(b) il *tombe sous* le concept d'être le président de la République;

(c) il est un *élément* de l'extension du concept d'être le président de la République.

Mais les objets ne sont pas les seules choses qui peuvent tomber sous un concept. Un *concept* peut aussi tomber sous un concept. Le système de Frege est une sorte de théorie des types, et la charpente de ce système est constituée de la maniere suivante: au premier niveau, il y a les concepts sous lesquels les objects peuvent tomber; au deuxième niveau, il y a les concepts sous lesquels les concepts du premier niveau peuvent tomber; au troisième niveau, il y a les concepts sous lesquels les concepts du deuxieme niveau peuvent tomber; etc. Et les niveaux sont exclusifs: il n'y a pas de concept qui se trouve dans plus d'un niveau.[7] Nous avons, donc, une hierarchie formee d'objets de niveau 0, de proprietes d'objets de niveau 1, de proprietes de proprietes d'objets de niveau 2, etc., de telle sorte que les arguments d'un concept soient toujour du niveau inferieur au niveau du concept en question.

Le système logique de Frege a un défaut serieux: comme Bertrand Russell l'a demontré, l'ensemble des axiomes de ce système n'est pas consistent. Mais comment peut-on réparer ce système en touchant le moins possible au développement Fregeen de l'arithmetique? On peut constater que l'axiome V du système Fregeen joue un rôle central dans la déduction de la contradiction de Russell. Pourquoi faut il avoir un tel axiome? Rapelez vous qu'il y a trois sortes des choses logiques auxquelles Mitterand est lié: (a) la phrase ouverte '*x* est le président de la République'; (b) le concept d'être le président de la République; et (c) l'extension de ce concept. Mais est-ce que ces trois choses logiques sont vraiment nécessaires? Frege a estimé que les extensions sont indispensables pour que soit assurée une reference à chaque terme numérique de l'arithmetique. On peut définir d'abord les propriétés de cardinalité exprimées par:

Il y a zero objets qui tombent sous *F*

Il y a un objet qui tombe sous *F*

Il y a deux objets qui tombent sous *F*

etc.

sans référence aux extensions de concepts. Frege pensait que les termes numériques comme 'zero', 'un', 'deux', et 'trois', sont des noms de quelque chose: il doit y avoir des objets, selon lui, que ces noms représentent. Pour cette raison, il a choisi les extensions des proprietes de cardinalités. Donc, le nombre deux, selon Frege, est l'extension du concept qui est le référence de la phrase ouverte 'Il y a deux objets qui tombent sous *F*'.

Mais Russell a montré avec sa "no-class theory" - théorie sans classe - qu'il n'est pas nécessaire de postuler des extensions, des classes, ou des ensembles pour avoir un système de mathématiques suffisant pour tous les besoins des sciences empiriques: on peut considérer tous les énoncés qui font apparemment référence aux extensions comme des façons de parler - comme des façons de parler de concepts.[8] Russell a montré comment on peut considérer une phrase dans laquelle se trouve un terme numerique comme étant une abréviation d'une phrase dans laquelle il y a un terme qui représente la propriété de cardinalité correspondante. Utilisant cette idée de Russell, je suggère qu'un moyen simple de "réparer" le système de Frege est d'éliminer toutes référence aux extensions de concepts et en consequence d'abandonner l'axiome V. Ce qui reste est assez puissant: si on ajoute un axiome de l'infini, on pourra développer la version de l'analyse classique que les Logicistes, comme Russell et Whitehead, a produit.[9] Quand ce système est interpreté classiquement, les variables de chaque niveau plus grand que zero prennent comme valeurs des concepts et on explique le quantificateur existentiel de la facon usuelle. Dans le système dont je parle maintenant, tous les quantificateurs existentiels du système classique, qui sont d'un niveau plus grand que zero, sont remplacés par des quantificateurs constructifs, de telle sorte qu'une phrase classique qui dit 'Il exist un concept F ...' devient 'Il est possible de construire une phrase ouverte..." Par example, la phrase

Il existe un concept du niveau 1 sous lequel tous les objets tombent

est remplacé par

Il est possible de construire une phrase ouverte du niveau 1 telle que tous les objects la satisfont.

Quand on dit 'Il est possible de construire une phrase ouverte', on entend qu'il est possible de construire une <u>occurrence</u> ("token") d'une phrase ouverte. C'est à dire, on entend qu'il est possible d'écrire quelque chose, de dire quelque chose, ou de produire quelque chose, comme ce qui suit:

<u>x</u> est le président de la République

<u>X</u> EST LE PRÉSIDENT DE LA RÉPUBLIQUE

Nous avons ici deux occurrences de la même phrase ouverte. Donc, ce qu'on peut trouver dans un monde possible ce sont des personnes qui construisent des occurrences de phrases ouvertes.

J'utiliserai un système dans lequel les occurrences des phrases ouvertes sont les choses dont on parle; et comme la théorie des types orthodoxe, ce système demande une partition de la totalité des choses dont on parle:

il y a les objets;

il y a les occurrences des phrases ouvertes de niveau 1;

il y a les occurrences des phrases ouvertes de niveau 2; etc.

La formalisation de cette théorie que j'ai choisie est un calcul des prédicats à plusieurs sortes de variables (a "many sorted calculus") et, en fait, c'est un calcul des prédicats à ω-sortes de variables, qu'on peut analyser comme ci-dessus à l'aide de la sémantique des mondes possibles. Dans ce système, il y a deux sortes de quantificateurs: Au niveau zero, les quantificateurs sont classiques; en particulier, le quantificateur existentiel de niveau zero est le quantificateur ordinaire de la logique classique. Aux niveaux plus grands que zero, les quantificateurs sont constructifs. Aussi, dans ce système, l'indice supérieur d'un variable correspond au niveau des phrases ouvertes qu'on peut considérer comme les valeurs de cette variable.

Il y a deux sortes des prédicats dans le vocabulaire de cette théorie: des prédicats de satisfaction et des prédicats d'identité.

(1) Un prédicat de satisfaction est un lettre majuscule '<u>S</u>' avec un indice supérieur.

(2) Un prédicat d'identité est le lettre majuscule '<u>I</u>' avec un indice supérieur.

Les prédicats de satisfaction représentent les relations de satisfaction de tous les niveaux. Puisque tous les prédicats de ce langage sont des prédicats de degré deux, il n'est pas nécessaire d'utiliser les indices supérieur d'un prédicat pour indiquer le degré du prédicat. Au lieu de cela, l'indice supérieur d'un prédicat indique le niveau de la relation qui est représentée. Donc, le formule atomique

$$\underline{S}^n \underline{x}^n \underline{y}^{n+1}$$

signifie que $\underline{x}^n$, une chose de niveau n, satisfait $\underline{y}^{n+1}$, une phrase ouverte de niveau n + 1. La prédicat d'identité de niveau zero représente la relation d'identité entre les objets. Les prédicats d'identité de niveau plus grand que zero représentent la relation d'identité d'extension, c'est à dire la relation qui unit A et B exactement quand les mêmes choses satisfont A et B.

Il y a trois sortes d'axiomes de ce systeme:

[1] les axiomes d'abstraction

[2] les axiomes d'extensionalité

[3] les axiomes d'identité.

[1] Supposons que β et α sont des variables de niveaux n et n+1 respectivement, et que

$$\ldots \beta \ldots$$

représente une formule dans laquelle:

(1) il y a une occurrence de β qui est libre;

et

(2) il n'y a pas d'occurrence de α qui soit libre;

chaque phrase qu'on peut obtennir par des généralisations universelles de

$$(E\,\alpha)(\beta)(\underline{S}^n \beta \alpha \longleftrightarrow \ldots \beta \ldots)$$

est alors un axiome d'abstraction.

[2] Si α et β sont des variables de niveau n+1 et γ est un variable de niveau n,

$$(A\alpha)(A\beta)((A\gamma)(\underline{S}^n\gamma\alpha \longleftrightarrow \underline{S}^n\gamma\beta) \longrightarrow \underline{I}^n\alpha\beta)$$

est un axiome d'extensionalité.

[3] Si α est une variable de niveau 0,

$$(\alpha)\underline{I}^0\alpha\alpha$$

est un axiome d'identité.

Si α est une variable de niveau n (n > 0),

$$(A\alpha)\underline{I}^n\alpha\alpha$$

est un axiome d'identité.

Si α et β sont des variables de niveau n, et φ et ψ sont des formules dans lesquelles il n'y a pas d'occurrence de α ou de β qui ne soit libre, une phrase qu'on peut obtenir par des generalisations universelles de

$$\underline{I}^n\alpha\beta \longrightarrow (\varphi \longleftrightarrow \psi)$$

est un axiome d'identité.

On peut constater que ces trois axiomes sont vrais quand la langage de la théorie est interprété comme specifié ci-dessus.[10]

Il y a, aussi, une hypothèse de l'infini qui n'est pas un axiome, mais cette hypothèse a un rôle semblable à un axiome. Il faut dire, en effet d'abord, que l'interprétation de ce système n'est pas complètement determinée. Je voudrais utiliser ce système dans beaucoup des situations diverses. Donc, je voudrais admettre des interprétations de ce système dans lesquelles le nombre des choses qu'on appelle les "objets" est fini. Les axiomes sont vrais quelle que soit la facon dont on choisit les "objets". Mais l'hypothèse de l'infini est vrai seulement pour quelques interprétations convenables. parce que cette hypothèse dit, intuitivement, que le nombre des objets de l'univers est au moins egal à l'infini du denombrable. (Bien sur, cette hypothèse est exprimée a l'aide des quantificateurs constructifs et sans avoir recours aux termes qui représentent des nombres.) L'hypothèse de l'infini n'est pas vraie pour toutes les interprétations admissibles, et donc elle ne peut pas être un axiome. Pour déveloper la théorie des cardinaux finis, il faut utiliser l'hypothèse de l'infini. Donc, les théorèmes de cette théorie expriment les conséquences de la supposition que le nombres des objets est infini.

On peut voir que la presente théorie peut être utilisée et appliquée comme on utilise et applique les théories logiques de Frege et Russell. Bien sur, il y a une différence. Les énoncés d'existence de concepts des théories classiques sont remplacés dans mon système par les énoncés qui disent qu'il est possible de construire des phrases ouvertes. Mais cette différence n'affecte pas d'une manière significative la façon dont on applique cette théorie. Ainsi, Frege a analysé la phrase

Le nombre des *F* est egal au nombre de *G*

en gros comme suit:

Il y a un concept *C* qui est une relation
bijective et *C* unit *F* a *G*.

Dans mon système, on peut analyser cette même phrase en gros, comme suit:

Il est possible de construire une phrase
ouverte *P* qui est bijective et qui unit *F* a *G*.

Considérons maintenant la question: "Est-ce que cette théorie est nominaliste?" À mon avis, cette question n'est pas claire. Si l'on utilise la critère de puissance logique, mon système n'est pas nominaliste: il est equivalent à la theorie des types simple - laquelle est une theorie Platoniste. Mais ma théorie n'affirme pas l'existence d'objets mathématiques. Ainsi, considérez la phrase

Il est possible de construire un bâtiment de deux cents étages.

Cette phrase n'affirme pas l'existence d'un bâtiment de deux cents étages. Elle n'implique pas l'existence d'un bâtiment de deux cents étages. On peut admettre que cette phrase est vraie, sans peur d'avoir à accepter l'existence d'un bâtiment de deux cents étages.

Revenons maintenant aux arguments de Putnam. Rappelez-vous qu'il y avait deux arguments à l'appui de la position que les objets des mathématiques existent vraiment. Au depart du premier argument on trouvait le thèse que nous avons de bonnes raisons d'affirmer que les theorèmes des mathématiques classiques sont vrais. Les grands succès des mathématiques classiques dans les sciences justifient notre croyance que les énoncés des mathématiques classiques sont vrais, du moins approximativement. Puisqu'il y a des théorèmes des mathématiques classiques qui énoncent l'existence des objets mathématiques, nous avons de bonnes raisons pour affirmer l'existence de ces objets.

Voici ce qu'il est maintenant possible de repondre à cet argument: On peut développer les mathématiques classiques dans le système que j'ai décrit. On peut utiliser ces mathématiques pour exprimer les énoncés des sciences. Donc, on peut admettre que les mathématiques classiques sont vraies, du moins approximativement, sans admettre l'existence des objets mathématiques, parce que les théorèmes de ce système n'expriment pas l'existence d'objets mathématiques, mais seulement la possibilité de construire des phrases ouvertes.

Le deuxième argument de Putnam conclut que les lois de la physique exigent l'existence d'objets mathématiques. Si l'on admet que les lois de la physique sont vraies, même approximativement, il faut admettre, selon Putnam, que les objets mathématiques existent vraiment. Mais, pour répondre à cet argument de Putnam, on peut constater que les lois de la physique peuvent être affirmées sans présupposer l'existence d'objects mathématiques. On peut exprimer une loi de la physique, comme la loi de gravitation universelle par example, utilisant le systeme proposé là dans lequel, au lieu d'affirmer l'existence de choses comme des ensembles ou des nombres, on affirme seulement la possibilité de construire des phrases ouvertes.[11]

NOTES

(1) L'auteur a décrit cette position de Quine dans son ouvrage Ontology and the Vicious-Circle Principle, Ithaca, Cornell University Press, 1973, ch. 3.

(2) H. Field, Science Without Numbers: A Defense of Nominalism, Princeton, Princeton University Press, 1980.

(3) H. Putnam, "What is Mathematical Truth?" dans son livre Philosophical Papers vol. 1: Mathematics Matter and Method, Cambridge, Cambridge Universty Press, 1975, p. 65.

(4) Ibid., p. 74. Voir aussi H. Putnam, Philosophy of Logic, New York, Harper & Row, 1971.

(5) S. Kripke, "Semantical Considerations of Modal Logic," dans Reference and Modality, éd. par L. Linsky, Oxford, Oxford University Press, 1971.

(6) En particular, on peut utiliser le système deductif qui se trouve dans le livre de Benson Mates, Elementary Logic 2e ed., New York, Oxford University Press, 1972.

(7) Voir à ce sujet le livre de C. Chihara, *op. cit.*, p. 31-39 .

(8) *Ibid.*, p. 13-18.

(9) J'ai présenté une formalisation de ce système dans l'article "A Simple Type Theory Without Platonic Domains," Journal of Philosophical Logic, vol. 13, 1984, p. 249 - 283.

(10) Voir *ibid.*, p. 254 -257.

(11) L'auteur voudrait exprimer ses remerciements à Elizabeth Karger du CNRS, Paris, qui m'a assisté pour la version francaise de cet article. La recherche pour cet article était soutenue par un Fellowship for Independent Study and Research du National Endowment for the Humanities.