Jean Porte

Les logiques modales

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1986, fascicule 4
« Les logiques modales », , p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1986___4_A1_0>

LES LOGIQUES MODALES

1. Avertissement. Le texte présent n'est qu'un résumé rapide de travaux qui ne sont ni très anciens ni très récents. Il contient quelques définitions et résultats, mais aucune démonstration.

Par "logique modale" sera désignée ici toute tentative de systématiser l'utilisation des mots possible et nécessaire. Le lecteur est averti qu'il existe d'autres notions (par exemple "obligatoire" et "interdit") souvent considérées comme des "modalités"; il n'en sera pas question ici. Par ailleurs, même avec cette restriction, il existe un très grand nombre de logiques modales; il est impossible de les décrire toutes en peu de pages; le choix qui a été fait ici est en partie justifiable (par les résultats), en partie arbitraire. Enfin chaque logique modale contient une partie purement "propositionnelle", où les formules les plus simples se réduisent à une lettre (dite "variable propositionnelle") qui représente une proposition non analysée, et une partie "prédicative", qui contient des quantificateurs. Je consacrerai une place disproportionnée aux logiques modales proportionnelles (suivant ainsi l'exemple de la plupart des manuels),... Notons de plus que toutes les logiques modales étudiées ici sont des extensions de la logique "classique"; il existe aussi des logiques modales qui sont des extensions de la logique "intuitionniste"...

2. Notations et vocabulaire. Les lettres p,q,r désignent des variables propositionnelles; x,y,z désignent des formules quelconques; $\sim$ est la négation, $\rightarrow$ est l'implication, L est la nécessité, M est la possibilité (ceci est la notation de Feys 1965; il existe une notation plus répandue où la nécessité est désignée par un carré et la possibilité par un losange - non utilisée ici pour des raisons typographiques). Il faut remarquer que $\sim, \rightarrow$, L suffisent à définir tous les autres connecteurs (opérateurs) d'un calcul propositionnel avec modalités: $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\leftrightarrow$ (si et seulement si) comme en calcul propositionnel sans modalité, M par

$$Mx \text{ est identique à } \sim L \sim x$$

Les noms des systèmes sont à peu près fixés, mais il y a des variantes auxquelles il faut faire attention, en particulier Hughes-Cresswell 1968, pp.165-267, utilisent la lettre K pour désigner des systèmes différent de celui qui est appelé K ci-dessous.

Enfin j'emploie le mot "thèse" (et non "théorème") pour désigner une formule démontrable dans un système formel.

3. <u>Préhistoire. Les systèmes de Lewis</u>. La préhistoire de la logique modale commence avec Aristote (Voir les chapitres introductifs de Lemmon- Scott 1977) et se termine vers 1930. Le livre Lewis-Langford 1932 n'est plus utilisable actuellement comme manuel, mais on y trouve des définitions des systèmes

$$S1 \rightarrow S2 \rightarrow S3 \rightarrow S4 \rightarrow S5$$

de plus en plus forts de gauche à droite ("plus fort" signifie ici qu'il y a davantage de thèses que dans un système "plus faible").
- Même si S2, S3, et surtout S1 ont cessé d'intéresser les spécialistes, leurs noms subsistent dans la littérature, et des définitions équivalentes de S4 et S5 seront données ci-dessous.

4. <u>L'apport de Gödel</u>. Kurt Gödel, dont les travaux sont bien connus dans une autre branche de la logique, a en fait révolutionné l'étude des logiques modales dans un exposé au séminaire viennois de K. Menger, dont le résumé publié occupe exactement une page et deux lignes (Gödel 1932). Ses postulats (schémas d'axiomes et règles de déduction) pour S4 sont les suivants (ici la barre / sépare les antécédents, à gauche, d'une règle de déduction, de son conséquent, à droite - un schéma d'axiomes sera écrit comme une règle à zéro antécédent. Ces notations ne sont pas celles de Gödel).

A1- /t si t est une tautologie (une thèse du calcul propositionnel classique)

A2- $/Lx \rightarrow ((L(x \rightarrow y) \rightarrow Ly)$

A3- $/Lx \rightarrow x$

A4- $/Lx \rightarrow LLx$

R1- $x,\ x \rightarrow y\ /\ y$

R2- $x\ /\ Lx$

Ceci est un système de postulats pour S4. Sion en supprime A4, on obtient un sytème de postulats pour une logique plus faible que Feys appellera T. Si on supprime A4 et A3, on a un système de postulats pour une logique que Lemmon appellera K (en l'honneur de Kripke, qui l'avait étudiée, mais qui ne lui avait pas donné de nom).- Si, au contraire, on conserve tous les postulats de S4, mais que l'on ajoute

A5- $LMx \rightarrow Mx$

ou bien (pour avoir tous les postulats indépendants les uns des autres):

A5'- $LMLx \rightarrow Lx$

on obtient un système de postulats pour S5.

Il faut remarquer que dans la définition originelle de Lewis, la règle R2, qui n'aitait pas postulée, n'était pas *dérivable* mais seulement *admissible*: Une règle, telle que x/Lx est dérivable si elle permet de passer de x à Lx *même si x n'est pas une thèse*; dire que cette règle est admissible signifie que, si x est une thèse, alors Lx est également une thèse. Toute règle dérivable est admissible, mais la réciproque est fausse (voir par exemple Porte 1981 - Remarquer que d'après ces définitions les règles postulées sont "dérivables"...).

D'après Tarski on peut appeler logiques modales *normales* celles où la règle R2 (dite "règle de nécessitation") est admissible (Lemmon 1977 et d'autres auteurs n'appellent "normaux" que les logiques où de plus les axiomes A1 et A2 sont des thèses - mais on aura ci-dessous à examiner des logiques où R2 est admissible mais où A2 n'est pas un ensemble de thèses...).

On a donc une suite de logiques, de plus en plus "fortes" en suivant les flèches, logiques "normales" (au sens de Lemmon aussi bien qu'au sens de Tarski), qui jouent un rôle fondamental dans les travaux récents sur les logiques modales:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] & S4 \arrow[r] & S5 \\ K \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

5. *Les logiques non normales*. S3 est une logique non normale de force intermédiaire entre T et S4; S1 et S2 sontplus faibles que T et également non normales. Enfin Lemmon 1957 donne la définition d'une logique non normale beaucoup plus faible que S1, appelée S0.5.

Peut-on trouver des logiques encore plus faibles et qui méritent cependant le nom de "logiques modales"? C'est le point de départ du texte Porte 1980 (un résumé, Porte 1958, en avait été publié quelque temps auparavant). Dans ce travail, une logique modale, apparemment la plus faible possible, Sa, est définie, puis utilisée pour construire, à l'aide de deux opérations, des logiques de plus en plus fortes.

Les idées de base pour construire Sa sont les suivantes:

(i) Les formules non modales (et donc, par substitution, toutes les formules) doivent obéir aux mêmes lois que celles du calcul propositionnel classique.

(ii) Les formules nécessaires forment un ensemble paralléle à celui des formules simplement admises comme thèses.

(iii) Tout ce qui est nécessaire est admis (on dit souvent "vrai" plutôt que "admis", mais ici je réserve le mot "vrai" à une notion sémantique - voir ci-dessous).

Le système Sa est donc défini par les schémas d'axiomes et règles qui suivent:

P: /t si t est une tautologie
D: x, x→y / y
νP: /Lt si t est une tautologie
νD: Lx, L(x→y) / Ly
W: Lx / x

P est le calcul propositionnel, D est la règle de détachement, W est la règle d'affaiblissement ("weakening") et ν est pour "normalisation" (comme ρ sera pour "renforcement").

Il est clair que ces postulats ne sont pas indépendants. P est dérivable de νP et W, et peut donc être supprimé. D'autre part si W était supprimée du système initial cette règle resterait admissible (mais non dérivable) dans le système résultant (avec les postulats P, D, νP, νD); Kielkopf 1982 appele ce système (sans W) Sg.

Dans ce qui suit "une logique" sera considérée comme donnée avec des règles, et si une règle cesse d'être dérivable on dira qu'il s'agit d'une "autre logique" (comparer Porte 1981); si deux logiques ont les même thèses, mais pas la même déductibilité, on dira qu'elles sont "équivalentes".

A partir de la logique Sa, d'autres logiques vont être définies par des opérations dites "renforcement" (ρ) et "normalisation" (ν), ces opérations portant sur les axiomes et les règles; si S est une logique, ρS dans laquelle les règles (autre que D) sont remplacées par des schémas d'axiomes de telle façon que le "Théorème de la déduction" soit vrai dans le nouveau système, tandis que νS est une logique "normale" (en ce sens que la règle de nécessitation (x / Lx) y est admissible - pour plus de précision, voir Porte 1980.

On utilisera les postulats (règles et axiomes) suivants:

$\rho\nu D$:	$/L(x\to y)\to(Lx\to Ly)$	
$\nu\rho\nu D$:	$/L(L(x\to y)\to(Lx\to Ly))$	
ρW:	$/Lx\to x$	
$\nu\rho W$:	$/L(Lx\to x)$	
I:	$Lx\ /\ LLx$	(règle d'itération)
ρI:	$/Lx\to LLx$	
$\nu\rho I$:	$/L(Lx\to LLx)$	

On obtient ainsi sept systèmes dont les postulats sont les suivants (après élimination de règles ou d'axiomes visiblement redondants) - νP et D, communs à tous, n'ont pas été répétés:

Sa:	νD, W
ρSa:	$\rho\nu D$, ρW
νSa:	νD, W, I
$\rho\nu Sa$:	$\rho\nu D$, ρW, ρI
$\nu\rho Sa$:	$\nu\rho\nu D$, $\nu\rho W$, ρW, I
$\rho\nu\rho Sa$:	$\nu\rho\nu D$, $\nu\rho W$, ρW, ρI
$\nu\rho\nu Sa$:	$\nu\rho\nu D$, $\nu\rho W$, ρW, $\nu\rho I$

Les forces relatives de ces systèmes sont indiquées sur la fig. 1. Par ailleurs ρSa est identique au système S0.5 de Lemmon 1957, tandis que $\nu\rho Sa$ et $\nu\rho\nu Sa$ sont respectivement équivalents à T et à S4 (équivalents mais non identiques car la règle de nécessitation est seulement admissible).

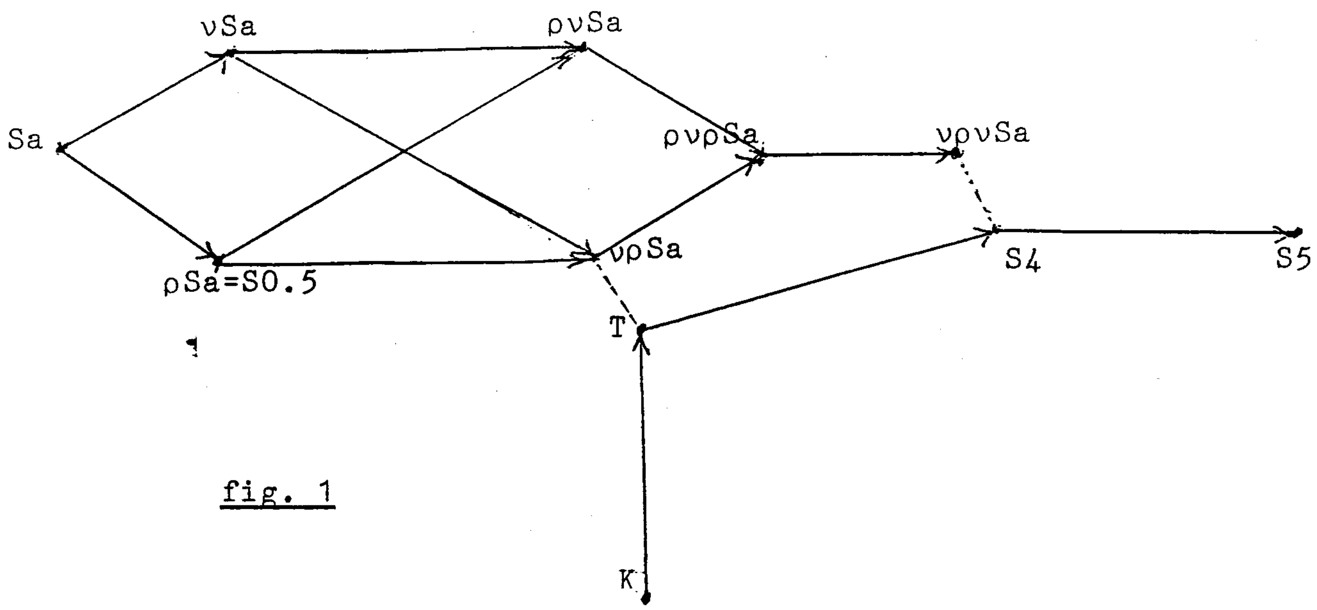

fig. 1

Il y a bien d'autres systèmes de logique modale, en particulier des extensions de K qui ne sont pas comprises dans S5, comme le système que Boolos 1979 appelle G qui a les règles et les axiomes de K (A1, A2, R1, R2) et en plus le schéma d'axiomes

A6- /L(Lx→x)→Lx

On retrouvera ce système plus loin (comme "application" de la logique modale.

6. Quelques résultats syntactiques. En logique, on convient d'appeler "syntactiques" les notions et résultats uniquement les systèmes formels eux-mêmes, et "sémantiques" les notions et résultats concernant des interprétations de ces systèmes formels. Les définitions du paragraphe précédent sont purement syntactique (comme l'étaient les logiques modales avant 1960 environ). Les résultats suivants sont également syntactiques.

Définition 1- Le degré modal d'une formule est le nombre maximum d'opérateurs modaux (L ou M) qui portent sur les variables preopositionnelles de cette formule. - Ainsi Lp→p est de degré modal 1, Lp→LLp est de degré modal 2, de même que L(Lp→p); les formules sans aucun opérateur modal sont de degré modal 0.

Théorème 1- Tous les systèmes au moins aussi forts que S0.5 et au plus aussi forts que S5 (en particulier tous les systèmes de la figure 1 sauf K, Sa et ∼Sa) ont les mêmes thèses de degré modal 0 ou 1.

Théorème 2- Dans S5, pour toute formule x, il existe une formule x', de degré modal 0 ou 1 telle que x↔x'est une thèse.

Ainsi, si l'on a des difficultés à donner un sens à des formules telles que LLp ou LMp on peut s'en passer en utilisant S5, et on est certain de ne pas avoir plus de thèses d'interprétation facile (c.à.d. de degré modal 0 ou 1) qu'il n'y en a dans S4, T ou même S0.5.

Mais les systèmes très faibles ont un défaut, exprimé par le théorème suivant:

Théorème 3- Dans S0.5 une formule L(Lx→Ly) est une thèse si et seulement si x est identique à y.

Il s'ensuit que "théorème de remplacement des équivalents" n'est pas vrai dans ce système. Par exemple L(Lp→Lp) est une thèse mais L(Lp→L∼∼p) n'en est pas une bien que p↔∼∼p soit une tautologie.

On a des résultats analogues, mais un peu plus compliqués, pour $\rho\nu Sa$ et tous les systèmes plus faibles (voir Porte 1981a).

7. La sémantique des logiques modales. Les logiques modales s'étaient développées jusque vers 1960 de façon purement syntactique, bien que leur sémantique moderne repose sur une idée qui remonte à Leibniz: Une proposition est possible si elle est vraie dans au moins un "monde possible", elle est nécessaire si elle est vraie dans tous les "mondes possibles" - dans la suite, je dirai "mondes parallèles" plutôt que "mondes possibles", afin d'éviter que le même mot ("possible") soit employé dans deux sens différents. Cette idée a été perfectionnée par différents auteurs (Kanger, Hintikka, Prior et d'autres) avant d'être systématisée par S. A. Kripke; voir Kripke 1959, 1963 1965; aussi Lemmon 1977 (ouvrage posthume, écrit en 1966).

Dans cette sémantique de Kripke une "structure de modèles" ("model structure") est un triplet $(\underline{G},\underline{K},\underline{R})$, $\underline{G}$ appartenant à $\underline{K}$ et $\underline{R}$ étant une relation entre éléments de $\underline{K}$; $\underline{G}$ est le monde réel, les autres éléments de $\underline{K}$ les mondes parallèles, et $\underline{R}$ la "relation d'accessibilité": si w_1 et w_2 sont deux mondes (réels ou non, disticts ou non) et $w_1\underline{R}w_2$ on dit que w_2 est "accessible depuis w_1" et on tiendra compte de ce qui est vrai en w_2 pour juger pour juger des modalités en w_1. Dans l'idée de Leibniz tous les mondes paralléles étaient accessibles au mondes réels; dans la sémantique de Kripke, la relation $\underline{R}$ est quelconque, ce qui permet de construire des sémantiques pour un grand nombre de logiques modales distinctes. En fait il faut remarquer les faits suivants:

(i) Pour ces systèmes "normaux", le "monde réel" $\underline{G}$ ne sert à rien; on a des résultats équivalents en admettant qu'une formule est valide si elle est vraie dans tous les mondes parallèles. Les structures $(\underline{K},\underline{R})$ obtenues en éliminant $\underline{G}$ sont des "cadres" ("frames").

(ii) On n'obtient ainsi de sémantique que pour les logiques "normales au sens de Kripke", c'est-à-dire au moins aussi fortes que le système K de la section 4 ci-dessus (les schémas A1 etA2 sont valides et les règles R1 et R2 sont admissibles

On dit alors qu'une logique est déterminée par une classe de cadres si ses thèses sont exactement les formules qui sont valides dans chacun des cadres appartenant à cette classe. On a les résultats suivants :

K est déterminée par la classe de tous les cadres;

T est déterminée par la classe des cadres où la relation d'accessibilité est réflexive;

S4 " " réflexive et transitive;

S5 " " réflexive, symmétrique et transitive

(iii) Il existe des logiques "normales" qui ne sont déterminées par aucune classe de cadres (Fine 1974 et St. Thomason 1974) - celles qui sont connues sont assez artificielles. Mais une complication de la théorie des modèles due à St. Thomason (1972 - pratiquement équivalente à une construction de Makinson 1970) permet de déterminer chaque logique normale par une classe de "cadres généralisés".

(iv) Ces constructions ne peuvent donner de résultat que dans le cas des logiques normales. Mais pour certaines logiques non-normales (S0.5, S2,...), une autre généralisation de la notion de cadre permet de les caractériser sémantiquement: on défitnit (de façons variées) des "mondes non-normaux" et les formules valides sont celles qui sont vraies dans tous les mondes normaux (voir Hughes-Cresswell 1968 et 1984). - Cependant il n'est pas possible de caractériser ainsi tous les systèmes de logique modales (voir Porte 1987 - dans le cas du système ρνSa une caractérisation sémantique est obtenue sans modèles non-normaux mais avec le rétablissement du "monde réel" privilégié, G, qui était inutile pour caractériser les systèmes normaux.

8. Décidabilité. La plupart des systèmes définis de façon "naturelle" (T, S4, S5, mais aussi S2, S0.5 et bien d'autres) ont été démonteés décidables, les méthodes de décision étant soit syntactiques soit sémantiques. Pour quelques systèmes peu intéressants rien n'a été démontré en ce qui concerne leur décidabilité. - Il est vraisemblable qu'il est assez facile de définir des systèmes modaux indécidables, mais que ces systèmes seront assez artificiels.

Ce qui précède n'est vrai que pour les logiques modales propositionnelles (voir ci-dessous).

9. Les quantificateurs. Il est facile d'étendre chacune des logiques modales au calcul des prédicats. Ici il ne sera pas donné de détail sur les axiomatisations, mais il faut signaler les deux faits suivants:

- Alors que S5 (propositionnel) est décidable (et de façon assez simple), l'extension de S5 au cacul des prédicats n'est pas récursivement décidable, même en se restreignant à sa partie "monadique" (c'est-à-dire en ne considérant que les formules qui ne contiennent que des prédicats unaires) - voir Kripke 1962.

- L' analogie entre le quantificateur universel et l'opérateur de nécessitation conduit à se demander quel est le statut de la formule suivante, dite "formule de Barcan"

$$\forall\alpha L\rho(\alpha)\rightarrow L\forall\alpha\rho(\alpha)$$

(où α est une variable d'individu, tandis que ρ est une sous-formule contenant une ou plusieurs occurrences libres de α), et également de la réciproque de cette formule; on démontre que, dans S5 la réciproque de la formule de Barcan est une thèse, de même que dans des systèmes plus faibles (en particulier T et S4); la formule de Barcan elle-même est une thèse de S5, mais non des systèmes plus faibles S4 ou T. L'interprétation dans la sémantique de Kripke de ces deux formules est que l'on peut permuter deux quantificateurs universels... à condition que l'on sache à quoi ils s'appliquent, c'est-à-dire que les mondes parallèles contiennent les mêmes objets! Si cette condition n'est pas réalisée, ni la formule de Barcan ni sa réciproque ne sont admissibles sémantiquement. Afin que ces formules ne soient pas des thèses, même dans S5, Kripke propose une légère modification de l'axiomatique du calcul des prédicats, une modification qui est inoffensive quand il n'y a pas de modalités.

10. Applications des logiques modales. Il y a peu d'application des modalités à la "logique", au sens le plus strict de ce mot, c'est-à-dire à l'étude des méthodes de raisonnement conduisant à la vérité: En général, les scientifiques se demandent si une proposition est vraie ou fausse mais non si elle est nécessaire... Pour le point de vue opposé, voir Bressan 1972.

Mais toute étude un peu détaillée de structures mathématiques variées finit le plus souvent par avoir des applications, quelquefois imprévues- Gödel 1932 avait déjà, en quelques lignes, proposé une interprétation des des modalités où L signifie "est démontrable"; c'était le point de départ de Boolos 1979.
- Une application encore plus éloignée de la logique est celle de Tarski pour le système S4 (propositionnel): les variables sont interprétées comme des ensembles de points d'un espace topologiques quelconque, L comme "intérieur", M comme "adhérence", et les thèses de S4 sont alors des théorèmes de la topologie générale.

On peut aussi interpréter la sémantique de Kripke, à condition de disposer d'une théorie où existent des "mondes parallèles"... Il en existe des versions qui relèvent plus ou moins de la science-fiction... Mais une autre possibilité consiste à prendre comme "mondes parallèles" le monde réel à différents moments; c'est ce qu'on appelle la "logique temporelle" (voir par exemple McArthur 1976). Comme les moments successifs du temps sont aussi les étapes successives de l'execution d'un programme par un ordinateur (sans circuits parallèles), on comprend que les logiques modales aient des applications (récentes) en informatique théorique.

REFERENCES

Boolos, G. (1979) - The Unprovability of Consistency - Cambridge University Press.

Bressan, A. (1972) - A General Interpreted Modal Calculus - Yale University Press.

Chellas, B.F. (1980) - Modal Logic - Cambridge Univ. Press

Feys, R. (1965) - Modal Logics - Gauthier-Villars et Nauwelaerts.

Fine, K. (1974) - "An incomplete logic containing S4" - Theoria (Lund), 40, 23-29.

Gödel, K. (1932) - "Eine Interpretation der intuitionistischen Aussagenkalküls" - Ergebnisse eines mathematische Kolloquium , (Menger ed.), H. 4, Wien.

Hughes, G.E., and Cresswell, M.J., An Introduction to Modal Logic - Methuen, London, 1968.

Hughes, G.E., and Cresswell, M.J. (1984) - A Companion to Modal Logic - Methuen, London.

Kielkopf, C.F. (1982) - "A completeness proof for Porte's S_a^o and S_a" - Logique et Analyse, 25, 435-441.

Kripke, S.A. (1959) - "A completeness theorem in modal logic" - The Journal of Symbolic Logic, 24, 1-14.

Kripke, S.A. (1962) - "The undecidability of monadic modal quantification theory" - Zeitschr. für math. Logik, 8, 113-116.

Kripke, S.A. (1963) - "Semantical analysis of modal logic, I" - Zeitschr. für math. Logik, 9, 67-96.

Kripke, S.A. (1965) - "Semantical analysis of modal logic, II" Symposium on the Theory of Models, North-Holland Publ. Co.; 206-220.

Lemmon, E.J. (1957) - "New foundations for Lewis modal systems" - The J. of Symbolic Logic, 22, 176-186.

Lemmon, E.J. (1977) - An Introduction to Modal Logic (in collaboration with D. Scott, edited by K. Segerberg) - Blackwell, Oxford.

Lewis, C.I., and Langford, C.H. (1932) - Symbolic Logic. Second edition (1959), Dover, New York.

McArthur, R.P. (1976) - Tense Logic - Reidel, Doordrecht.

Makinson, D., (1970) - "A generalisation of the concept of a relational model for modal logic"- Theoria (Lund), 36, 331-335.

Porte, J., (1958) - "Recherches sur les logiques modales" - Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales. Ed. du C.N.R.S.; 117-126.

Porte, J., (1980) - "A research in modal logics" - Logique et Analyse, 23, 3-34.

Porte, J., (1980a) - "Congruences in lemmon's S0.5" - Notre-Dame Journal of Formal Logic, 21, 672-678.

Porte, J., (1981) - "The deducibilities of S5" - Journal of Philosophical Logic, 10, 409-422.

Porte, J. (1987?) - "The real world, completeness and incompleteness of a modal logic" - Logique et Analyse - à paraître.

Thomason, S. (1972) - "Semantic analysis of tense logics" - The Journal of Symbolic Logic, 37, 150-158.

Thomason, S. (1974) - "An incompleteness theorem in modal logic" - Theoria (Lund), 40, 30-34.

Jean PORTE

Ecole Normale Supérieure
Séminaire de Philosophie et Mathématiques
Année 1985-1986