René Guitart

Introduction à l'analyse algébrique

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1985, fascicule 7
« Espaces et dialectiques », , p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1985___7_A1_0>

INTRODUCTION A L'ANALYSE ALGEBRIQUE

I. ESPACES ET DIALECTIQUES (+)

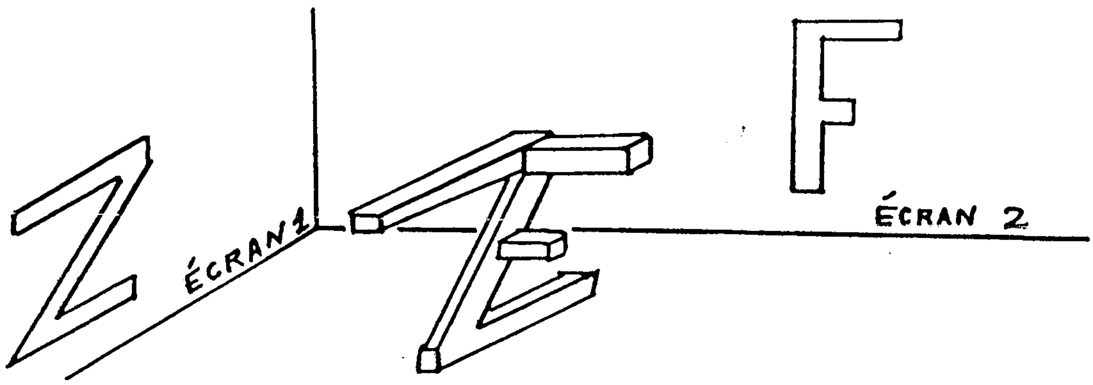
René Guitart (Univ. Paris 7)

0.Quand il s'agit de questions situées entre mathématiques et philosophies, ce séminaire est un lieu privilégié pour s'exprimer utilement ; aussi je remercie vivement les organisateurs, messieurs Caveing, Loi, Thom, de leur invitation.

Le but de cet exposé est de donner une description rigoureuse de l'univers dialectique D, et de donner des motifs philosophiques et mathématiques pour utiliser D comme fondement.

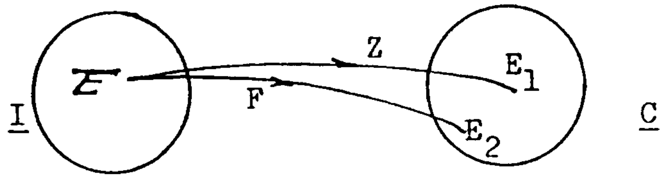
1.Le premier pas sera d'indiquer quelques références philosophiques et psychologiques à des schémas dialectiques pour les théories de la connaissance, de la perception, de la modèlisation des phénomènes physiques.

1.1. Chez Platon il y a le mythe de la Caverne : les objets vrais ou idées sont dans un monde extérieur <u>I</u>, et nous sommes dans une caverne <u>C</u> où nous n'observons que des ombres projetées par ces objets vrais. Notre connaissance du monde sera le fait d'une dialectique entre <u>I</u> et <u>C</u>.



(+): Conférence au:Séminaire de philosophie et mathématique (Caveing, Loi, Thom), E.N.S. 45 rue d'Ulm, Paris, le 2 décembre 1985.

Nous schématiserons cela ainsi :

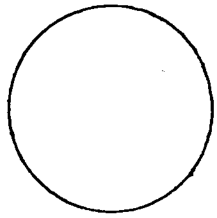


On peut aussi renverser le mythe, c'est-à-dire considérer C comme le monde concret, et I comme l'imaginaire. Dans le schéma ci-dessus le sens des flèches doit alors être renverser.
Et bien entendu, ce mythe possède de nombreux avatars, sous les formes de "dualités" : Sémantique/Syntaxe, Théorie/Modèle, Signifiant/Signifié.

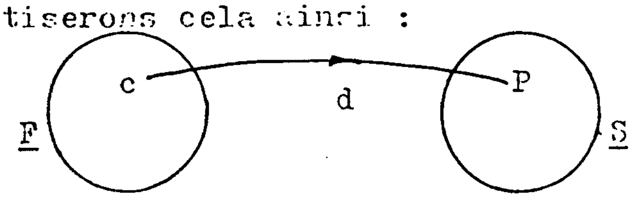
1.2. Chez les psychologues classiques, la perception est d'abord un ensemble de perceptions élémentaires, et ce sont ensuite les opérations synthétiques de l'esprit qui structure cet ensemble en information organisée. Si l'on songe que les mathématiques d'une époque développent une architecture qui reflète l'idée que cette époque a de la perception du réel, on peut qualifier la théorie des ensembles de fondement élémentaire : les ensembles sont des structures minima, le plus insignifiantes possibles, et les objets mathématiques réels sont des structures surajoutées à des ensembles (Ceci étant dit pour l'idée naïve d'ensemble, car pour les ensembles maniés par les théoriciens actuels, il s'agit de quelque chose de beaucoup plus mystérieux, sorte de limitation réthorique de discours et de pratiques algorithmiques fines dont le sens est plus formel et dépasse cette limitation).

1.3. La psychologie de la forme ou Gestalttheorie, initiée par Wertheimer vers 1912, constitue un progrès dans notre idée de la perception, et propose un schéma dialectique : il y a perception dans la mesure où il y a une forme (ou dessin) qui se détache sur un fond (ou support), cette forme étant perçue comme une réalisation d'une figure idéale connue ou non.

Par exemple le dessin ci-contre est perçu comme réalisation d'un cercle idéal c sur une feuille de papier blanc P.

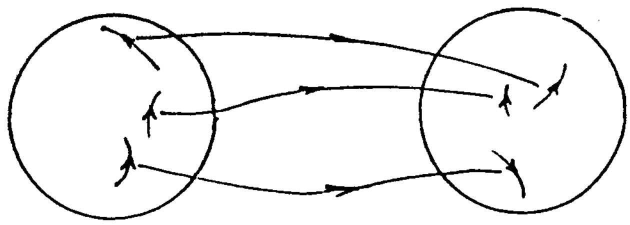


Nous schématiserons cela ainsi :



1.4. Pour la Gestalttheorie il n'y a pas d'abord une multiplicité chaotique a organiser, mais il y a a priori des formes qui sont la matière, insécable. Il vient alors le désir de bâtir un fondement à base de formes aux significations achevées et perceptibles, les objets mathématiques étant tous de telles formes, et l'explication mathématique étant la description des localisations relatives de ces formes. Les ensembles sont des formes amorphes, et les formes sont des ensembles polarisés, dynamisés. Mais chaque forme "est" une perception, c'est-à-dire une dialectique.

1.5. Lupasco énonce un principe d'antagonisme : pour qu'une énergie se manifeste il faut que certains de ses états impliquent des états antagonistes, et que l'actualisation des uns entraîne la potentialisation des autres. Une système physique comporte des évènements qui s'attirent et se repoussent en même temps, soit des forces d'attraction et de répulsion antagonistes ; un système est un antagonisme énergétique entre des évènements eux-mêmes homogènes et hétérogènes c'est-à-dire contradictoire. Et tout est énergie.
Nous schématiserons cela par :

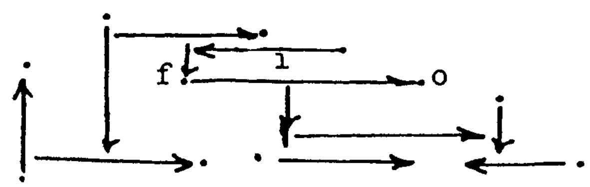


1.6. Déjà à l'époque antique il y avait les tenants du mouvement et ceux de l'immobilité comme principe premier. D'un côté, la vue Héraclitéenne selon laquelle les lois de la nature sont celles de l'impermanence des choses, des changements ; de l'autre l'opinion que les lois sont celles donnant ce qui se retrouve toujours, les invariants. Ces deux points de vue seront présents ici dans la notion formalisée de dialectique : indication de transformations sous la forme polarisée, indication d'un monde fixe sous la forme amorphe.

1.7. A partir de 1867, Peirce développe une séméiotique (ou science des signes) très riche, dont l'ingrédient de base est la relation triadique d'un fondement à un objet via un interprétant, une telle relation étant appelée un signe lorsque l'interprétant est la pensée où l'action humaine. Lorsque l'on privilégie le rapport du signe à son fondement, à son objet, ou à son interprétant, la séméiotique donne lieu à la grammaire formelle, à la logique, à la réthorique.
Nous schématiserons l'idée de signe par:

$$\text{FONDEMENT} \xrightarrow{\text{INTERPRETANT}} \text{OBJET}$$

1.8. Pour Peirce il y a le "principe de continuité" interdisant l'abstraction gratuite, car l'abstraction est le résultat objectif de distinctions réelles, de discontinuités. Et c'est la discontinuité qui fait signe. Et tout est signe. Chaque composant du signe est signe. On a un signe $(f \xrightarrow{i} o)$, mais i, f et o sont des signes. Alors le concept de signe est défini implicitement, dans une regression infinie. Et chaque signe donne pragmatiquement un paysage formelle fini que nous dessinerons de la sorte:



1.9. Evidemment le mot dialectique a une longue et riche histoire qu'il n'est pas question de prendre en charge ici. En particulier les plus métaphysiciens des matérialistes soulignent le caractère informalisable de la dialectique. Ici donc je traite ce mot un peu à la légère, en non-spécialiste, sur la base des motifs ci-avant (Platon, Héraclite, Peirce, Wertheimer, Lupasco) envisagés chacun de façon volontairement superficielle, comme simple touche dans un paysage mental. Et cela va marcher, en ce sens que cette attitude et ce paysage vont secrèter l'objet D.

2. Notre deuxième pas sera de fournir une définition formelle précise de ce qu'est une dialectique. Ceci appelle deux remarques. La première remarque est que ici les dialectiques sont conçues à partir des ensembles (supposés donnés préalablement), de sorte que D sera décrit à partir d'un univers ensembliste, c'est-à-dire à partir d'un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Frankel. Il est clair qu'à terme il faudra exposer une théorie axiomatique de D. La deuxième remarque est que la notion de dialectique et puis la "construction" proposée de D pourraient, c'est bien clair, se formuler en termes divers : foncteurs adjoints, pro-foncteurs, bi-modules, morphismes de topos. Une variante intéressante à scruter est l'objet ENS, limite des $ENS^{(n)}$, où $ENS^{(n+1)} = Ens(ENS^{(n)})$. Nous laisserons de côté ces variantes, et présenterons les choses de la façon la plus rudimentaire.

2.1. Une catégorie consiste en : un ensemble d'objets, que l'on représentera par des points ; entre ces objets ou points, il y a des morphismes ou flêches ; et enfin on suppose donnée une loi de composition des flêches consécutives, loi unitaire et associative.

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\cdot f"'] \arrow[rrr, bend left=50, "(h\cdot g)\cdot f = h.(g.f)"] & \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h\cdot g"] & \cdot \arrow[r, "h"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

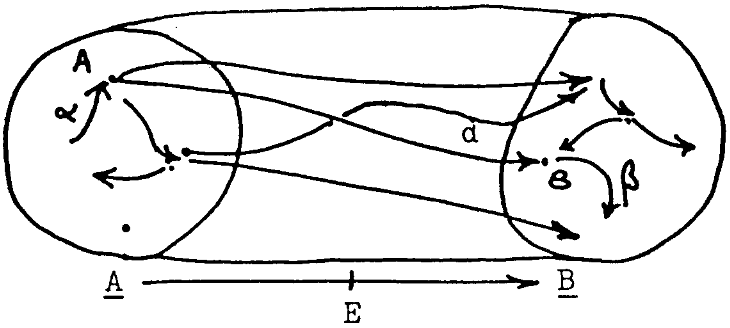
On a coutume, pour dire que $u = g.f$, de dire que le triangle

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "g"] & \\ \cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "u"'] & & \cdot \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Un foncteur d'une catégorie $\underline{A}$ vers une catégorie $\underline{B}$ est la donnée d'une application F_0 des objets de $\underline{A}$ dans les objets de $\underline{B}$, d'une application F_1 des morphismes de $\underline{A}$ dans les morphismes de $\underline{B}$, ceci de façon que si $u \xrightarrow{f} v$ est dans $\underline{A}$, alors $F_0 u \xrightarrow{F_1 f} F_0 v$, et si $m = g.f$ alors $F_1(m) = F_1(g).F_1(f)$.

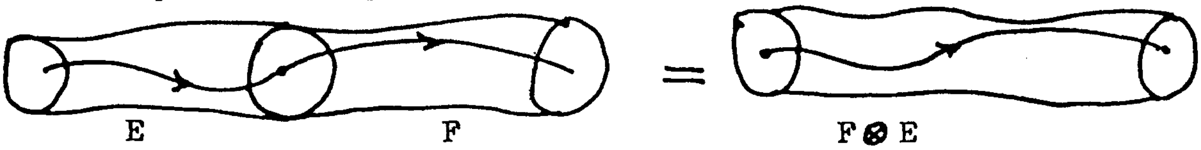
Une dialectique est une donnée $E: \underline{A} \nrightarrow \underline{B}$



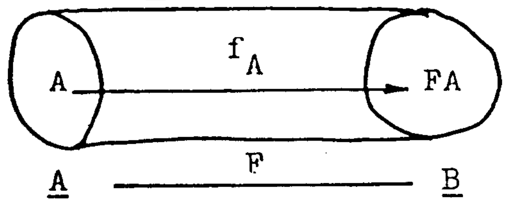
$\underline{J}$

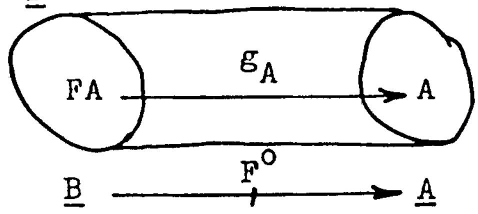
où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont des catégories et où les flêches $d: A \longrightarrow B$ données en plus d'objets de $\underline{A}$ vers des objets de $\underline{B}$ se composent avec celles de $\underline{B}$ à leur gauche et celles de $\underline{A}$ à leur droite ($\beta d \alpha$), de sorte que le dessin sous vos yeux soit une catégorie $\underline{J}$. On dira alors que la description d'une catégorie $\underline{J}$ sous cette forme est une polarisation de $\underline{J}$, et que $\underline{J}$ est la forme amorphe de E. On note E(A,B) l'ensemble des flêches de A vers B. Ainsi, la donnée de E est équivalente à celle d'un foncteur $E: \underline{A}^{op} \times \underline{B} \longrightarrow \underline{Ens}$, où $\underline{Ens}$ est la catégorie des applications entre ensembles, où $\underline{A}^{op}$ est la catégorie duale de $\underline{A}$, c'est-à-dire celle qui a les même objets, et où les morphismes sont tous changés de sens. Mais on préfèrera la description élémentaire fournie par le dessin. On y voit bien que E a à la fois un statut de morphisme de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$ et un statut d'objet $\underline{J}$.

2.2. Les dialectiques se composent selon



Un foncteur $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ détermine deux dialectiques, notées $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ et $F^o : \underline{B} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; \underline{A}$, décrites comme bifoncteurs par $F(A,B) = \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(F(A),B)$ et $F^o(B,A) = \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(B,F(A))$, et dessinées





où donc F et F^o sont engendrées par les flêches formelles f_A et g_A et les actions des flêches de $\underline{A}$ et de $\underline{B}$.

Une présentation de la dialectique $E : \underline{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; \underline{B}$ est un couple $\underline{B} \xleftarrow{P} \underline{C} \xrightarrow{Q} \underline{A}$ tel que : $E = P \otimes Q^o$, P et Q foncteurs.

Une co-présentation de la dialectique $E : \underline{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; \underline{B}$ est un couple $\underline{B} \xrightarrow{U} \underline{D} \xleftarrow{V} \underline{A}$ tel que : $E = U^o \otimes V$, U et V foncteurs.

2.3. Enfin si $\underline{X}$ est une catégorie, le calcul par rapport à la dialectique $E = P \otimes Q^o$ à valeurs dans $\underline{X}$ est décrit par :

$$\begin{tikzcd}
\underline{B} \arrow[dr, "F"'] & \underline{C} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "= F.P"' near start] \arrow[r, phantom, "\overset{u}{\Rightarrow}" near end, shift right=6] & \underline{A} \arrow[dl, "D_E F"] \\
& \underline{X} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{B} \arrow[dr, "\int_E G"'] & \underline{C} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "G.Q ="] \arrow[l, phantom, "\overset{v}{\Rightarrow}" near end, shift right=6] & \underline{A} \arrow[dl, "G"] \\
& \underline{X} &
\end{tikzcd}$$

où $D_E F$ est universellement associé à $F.P$ vis-à-vis de Q (i.e. est une extension de Kan de $F.P$ le long de Q) et où $\int_E G$ est co-universellement associé à $G.Q$ vis-à-vis de P (i.e. est une co-extension de Kan de $G.Q$ le long de P).

Les deux calculs $F \longmapsto D_E F$ et $G \longmapsto \int_E G$ sont adjoints. C'est leur interaction qui est l'antagonisme de la dialectique E, exprimé au niveau des"fonctions" ($F, G, \ldots$) sur "l'espace" E. Précisément on a $D_E : \mathrm{FONC}(\underline{B},\underline{X}) \longrightarrow \mathrm{FONC}(\underline{A},\underline{X})$ qui est adjoint à gauche à $\int_E : \mathrm{FONC}(\underline{A},\underline{X}) \longrightarrow \mathrm{FONC}(\underline{B},\underline{X})$. Ce que l'on écrira symboliquement

$$D_E F \Longrightarrow G \quad / \quad F \Longrightarrow \int_E G$$

ce qui signifie que les transformations naturelles de $D_E F$ à G sont en bijection avec les transformations naturelles de F à $\int_E G$.
La compréhension précise de ce §2.3. nécessiterait de connaître la base de la théorie des catégories, à savoir les notions de catégories, foncteurs, transformations naturelles, adjoints, éléments universelles, extensions de Kan. Pour rendre les choses palpables par le non-initié voici deux exemples très simples de couples $(D_E \dashv \int_E)$:

- Soit U : $\underline{Gr} \longrightarrow \underline{Ens}$ le foncteur de la catégorie des homomorphismes de groupes, notée $\underline{Gr}$, vers la catégorie des applications entre ensembles, qui à un homomorphisme h associe l'application sous-jacente (on oublie les structures de groupes), et soit L : $\underline{Ens} \longrightarrow \underline{Gr}$ le foncteur qui à un ensemble A associe le groupe LA librement engendré par l'alphabet A. Alors L et U sont adjoints, ce que l'on écrit : $L \dashv U$.
- Soit $\underline{S}$ l'ensemble ordonné des suites bornées de réels. Alors on a

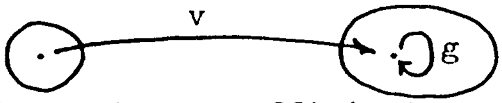
$$(\sup(x_n)) \leqslant (y_n) \quad \text{ssi} \quad (x_n) \leqslant (\inf(y_n))$$

ce que l'on écrit : $\sup \dashv \inf$.

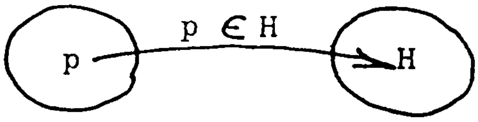
Pour terminer ajoutons que, dans notre situation abstraite générale, on montre que D_E et $\int_E$ ne dépendent que de E, et non de la présentation (P,Q) choisie. Et un calcul analogue se fait avec les co-présentations. Pour la suite, retenons principalement que, du point de vue fonctionnel, une dialectique est donc ce qui génère une calcul "$D_E \dashv \int_E$" de "dérivation-intégration" au-dessus de chaque catégorie $\underline{X}$, et, concrètement, ce calcul s'effectuera dans $\underline{X}$ en terme de limites (inductives et projectives).

3. Le troisième pas de l'exposé sera l'explication par des exemples d'un fait relatif aux mathématiques : les notions formelles d'espaces, aussi bien que les espaces informels où se déroule l'activité mathéma-

tique, sont en fait des dialectiques, et sont effectivement manipulés comme telles.

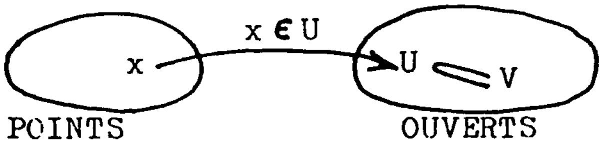
3.1. Un espace linéaire ou plus largement un G-ensemble à la Klein est une dialectique 

G où v est un vecteur ou point , et où g est un coefficient.

Un espace linéaire détermine une dialectique 

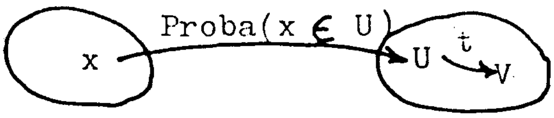
où p est un point et H un hyperplan.

3.2. Un espace topologique général est aussi une dialectique notée



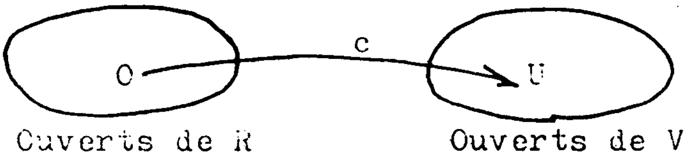
ou brièvement $E : \underline{P} \nrightarrow \underline{O}$.

Plus généralement un processus dans un espace est une dialectique



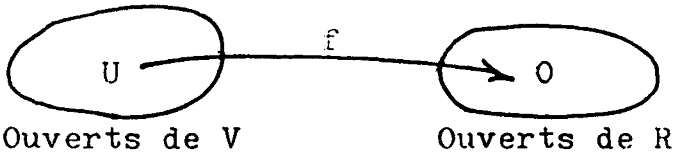
t : probabilité de transition.

3.3. Une variété V détermine deux dialectiques



c : chemin dérivable.

et



f : fonction dérivable.

3.4. Si $E: \underline{P} \nrightarrow \underline{O}$ et $E': \underline{P}' \nrightarrow \underline{O}'$ sont les dialectiques déterminées par deux espaces topologiques selon le §3.2., alors une application continue de E à E' s'identifie à la donnée d'un couple de foncteurs (f,g) où $f : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ et $g : \underline{O}' \longrightarrow \underline{O}$, avec $g^{o} \otimes E = E' \otimes f$.

Si F est un préfaisceau sur E, soit $F : \underline{O}^{op} \longrightarrow \underline{Ens}$, la dérivée au sens du § 2.3. de F est $D_E F : \underline{P}^{op} \longrightarrow \underline{Ens}$ donnée par

$$D_E F\ (x) = \lim_{x\ \ U} F(U) = \text{fibre en } x \text{ du faisceau associé à } F.$$

3.5. Soit X un espace topologique, et soit $x \in X$. On munit R^X de l'ordre $\leqslant_x$ défini par : $f \leqslant_x g$ ssi $\exists$ U vois. de x $f\restriction_U \leqslant g\restriction_U$. Alors on a une dialectique que l'on note $R^X(x)$, co-présentée par

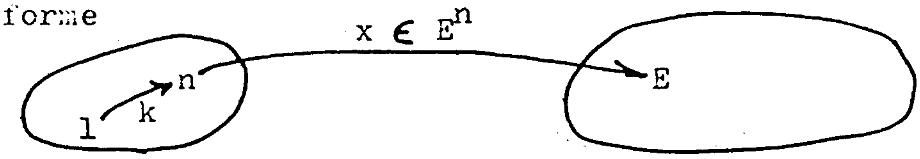
$$(R^X, \leqslant) \longrightarrow (R^X, \leqslant_x) \longleftarrow (R^X, \leqslant)$$

Elle contient seulement la R-information locale en x de X, et on peut l'appeler une <u>localisation</u> de X. La dérivation par rapport à cette dialectique transforme les fonctionnelles en fonctionnelles locales en x. Par exemple si Inf : $R^X \longrightarrow \{-\infty\} \cup R$ associe à une fonction $f \in R^X$ sa borne inférieure sur X, alors $D_{R^X(x)} f = \sup_{U \ni x} \{\inf f(y) ; y \in U\}$

3.6. Naturellement les correspondances de Galois, adjonctions, dualités (e.g. Algèbres de Boole / Espaces de Stone) étant des foncteurs sont des dialectiques. On peut donc considérer que la logique des propositions se déroule deans l'"espace" dialectique Boole/Stone. Un calcul propositionnel axiomatique se déroulerait dans la dialectique présentée par un couple de foncteurs du genre

<u>Arités & Substitutions</u> $\longleftarrow$ <u>Variables & Connecteurs</u> $\longrightarrow$ <u>Valeurs Logiques</u>

On peut aussi considérer qu'une théorie particulière est une dialectique de la forme



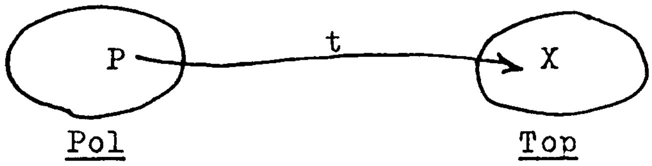
ARITES & LOIS SUPPORTS DES MODELES

Et bien entendu un modèle d'une théorie, pouvant toujours s'interpréter comme foncteur, est une dialectique.

Cette façon géométrique de voir les théories est exposée dans "Introduction à l'analyse algébrique II. Algèbres figuratives et esquisses ".

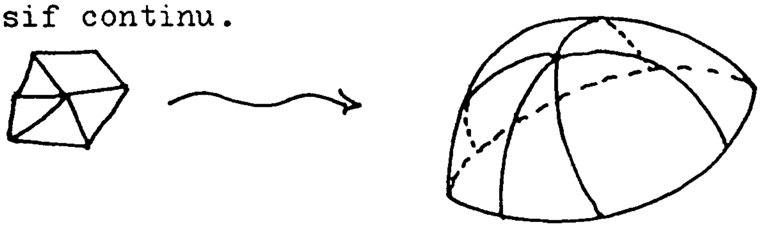
3.7. Un algorithme ou un programme est aussi une dialectique entre la syntaxe de l'ordinateur disponible $\underline{S}$ et la liste des fonctions que l'on veut calculer $\underline{L}$. Le schéma de programme est une catégorie $\underline{P}$ equippée de deux foncteurs $\underline{S} \xrightarrow{U} \underline{P} \xleftarrow{V} \underline{L}$, ce qui détermine donc une dialectique $E = U^{o}\otimes V : \underline{L} \nrightarrow \underline{S}$, et alors, pour des données initiales $F : \underline{S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, la dérivée $D_E F(\lambda)$ est la $\lambda^{\text{ième}}$ fonction calculée par le programme. On trouvera plus de détails sur ce sujet dans la conférence que j'ai donnée à Fribourg-Genève en juillet 1984 sous le titre " Elcment of a geometrical study of algorithms ".

3.8. Soit Pol la catégorie des polyèdres, Top la catégorie des espaces topologiques généraux. On a une dialectique



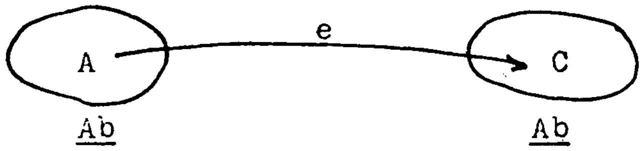
P: polyèdre
t: triangulation
X: espace

C'est une dialectique du passage du polyèdral combinatoire fini au topologique massif continu.



Les invariants homologiques d'espaces généraux X se calculent par dérivation le long de cette dialectique à partir des invariants homologiques des polyèdres. On peut dire que la topologie algébrique consiste en grande part en la compréhension de cette dialectique, de cette "espace"

3.9. Soit Ab la catégorie des groupes abéliens. On a une dialectique



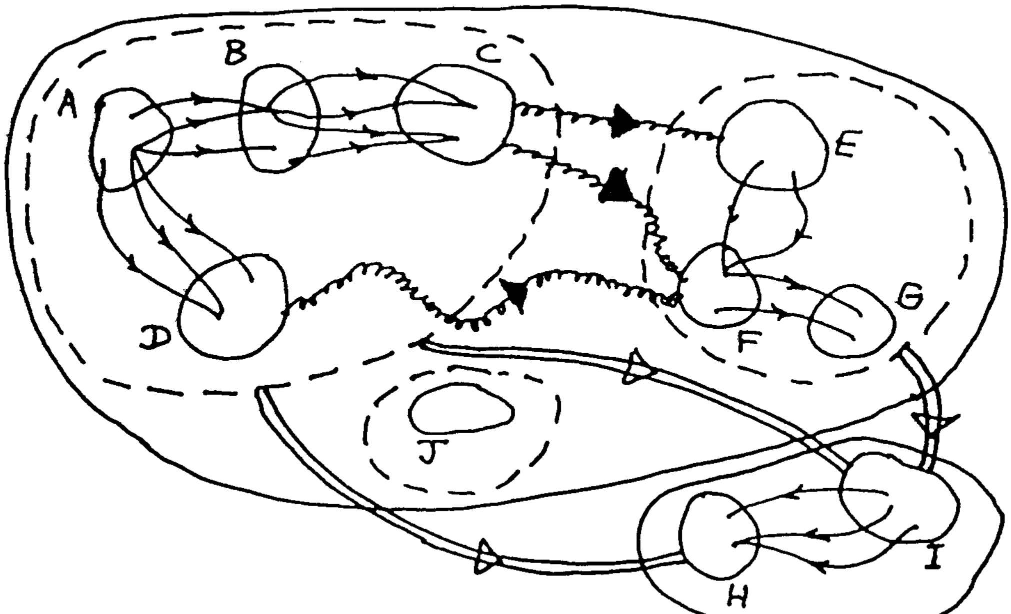
e : suite exacte
$0 \to C \to B \to A \to 0$

Alors les opérations D_E et $\int_E$ pour cette dialectique E sont précisément les calculs des foncteurs dérivés à gauche et à droite au sens de l'algèbre homologique exposée dans Cartan-Eilenberg. On trouvera plus de détail sur cette approche "dialectique" de l'algèbre homologique dans la conférence que j'ai donné à Milano et à Genova en novembre 1985 sous le titre " Sur la cohomologie non-abélienne ".

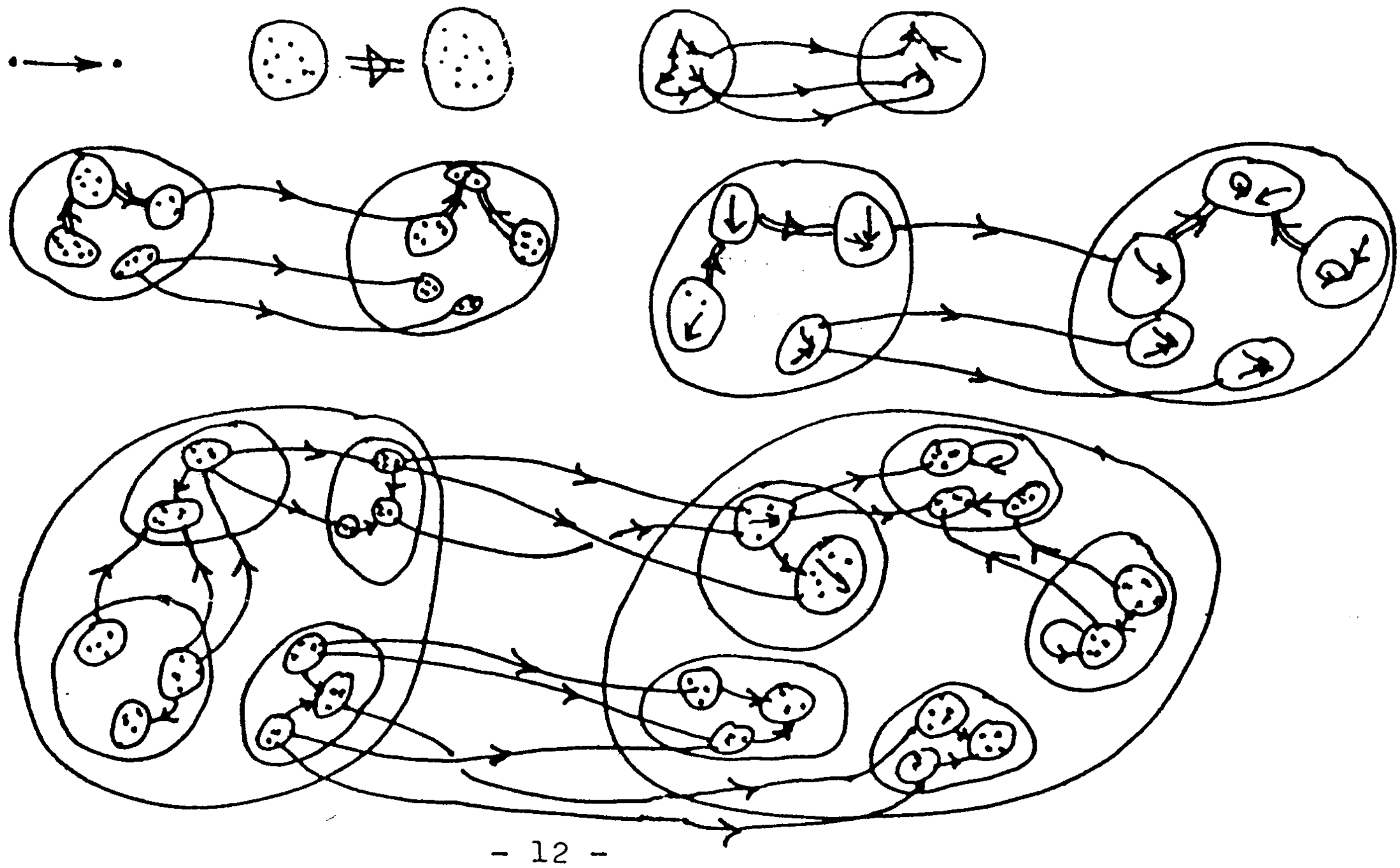
4. Le quatrième et dernier pas sera la mise en place de l'univers dialectique D.

4.1. Les dialectiques étant des morphismes, on forme avec elles de nouvelles catégories, de nouvelles dialectiques, par construction ascendante comme ceci :

Etant données les catégories A,B,C,D,E,F,G,H,I,J et des dialectiques entre elles, on forme de nouvelles catégories et dialectiques :

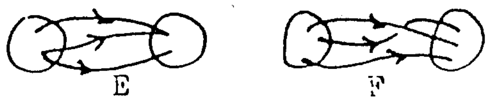


4.2. L'analyse descendante consiste à progressivement remplir de sens un morphisme formel ⟶ en le regardant au microscope comme ceci :



4.3. Les dialectiques étant des objets, on forme avec elles de nouvelles dialectiques par construction ascendante comme ceci:

Etant données deux dialectiques E et F



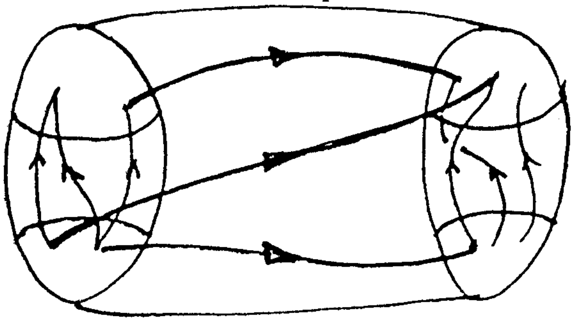
E F

on les regarde de façon amorphe i.e. comme des catégories

$\mathbb{E}$ $\mathbb{F}$

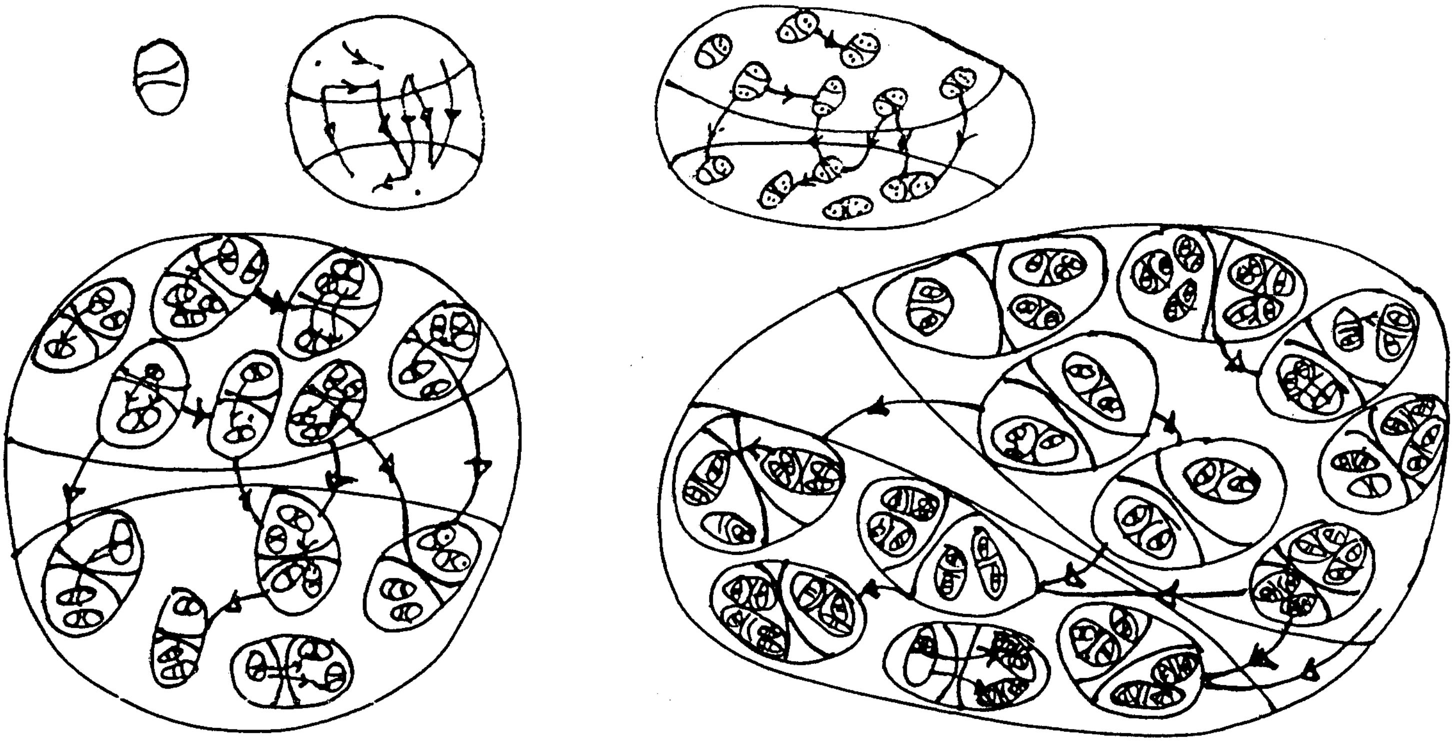
et l'on construit une dialectique de E à F comme cela :

$\mathbb{E}$



$\mathbb{F}$

4.4. l'analyse descendante consiste à progressivement remplir de sens un objet formel . en le regardant au microscope comme ceci :

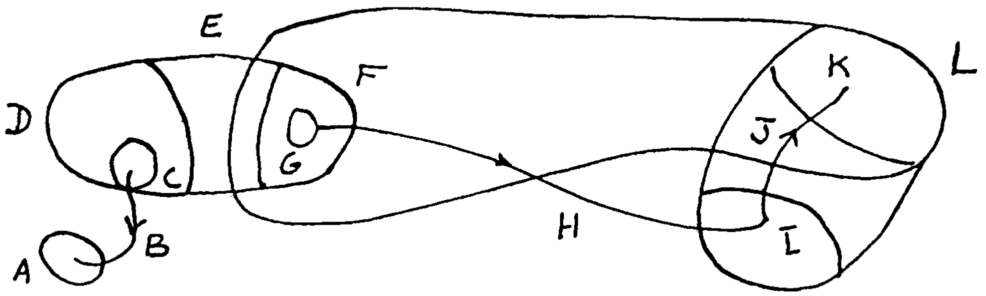


4.5. Il faut maintenant imaginer que l'on pratique les constructions montantes et analyses descendantes de types objets aussi bien que de types morphismes, mêlées.

Ce que l'on parcourt ainsi est l'univers dialectique D.

4.6. Il est aisé sur la base d'un modèle U de la théorie des ensembles Z.F. et de la définition de dialectique (cf. § 2.1.) de donner une description formelle propre de la classe D^+ stable par les constructions ascendantes seules. Pour obtenir D en entier il faut l'opération imaginaire de descente infinie au coeur des dialectiques vues comme objet-morphismes.

4.7. Voici un dessin d'un fragment de D



Dans cet exemple un lien de A à L est présenté par une suite de morphismes, de montées et de descentes que l'on peut noter :

$$A \xleftarrow{B} C \in D \xRightarrow{E} F \ni G \xrightarrow{\quad H \quad} I \xrightarrow{J} K \in L$$

4.8. Dans la théorie axiomatique de D, les variables désigneront des dialectiques. Au lieu de dire comme dans U que tout est "ensemble", on dira dans D que tout est "dialectique". Des "opérateurs" fondamentaux seront à préciser, parmi lesquels figureront : la domination, le renversement, la localisation.

Le point de vue"tout est ensemble" est un point de vue codificateur ; le point de vue "tout est dialectique" est un point de vue qui se veut géométrique, dans la mesure où les dialectiques sont des espaces, ou des formes. Il s'agit d'une version formalisée de l'idée de Platon selon laquelle tout est géométrie.