

# SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET MATHÉMATIQUES

M. MENDÈS FRANCE

## **Entropie, dimension et thermodynamique des courbes planes**

*Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1983, fascicule 5

« Entropie des courbes », , p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=SPHM\\_1983\\_\\_5\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1983__5_A1_0)

© École normale supérieure – IREM Paris Nord – École centrale des arts et manufactures, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Séminaire de philosophie et mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

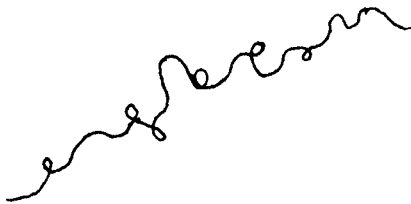
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

M. MENDES FRANCE

---

§ 1. Introduction

Une courbe plane non bornée présente soit un aspect rectiligne, soit un aspect chaotique, elle est soit déterministe, soit imprévisible.



déterministe



imprévisible

fig. 1

Bien entendu, entre ces deux cas extrêmes, la courbe peut être plus ou moins régulière. Dans un premier temps nous proposons de mesurer la complexité d'une courbe en introduisant la notion d'entropie tirée de la théorie de l'information. Dans un second temps (§ 9 et 10) nous nous inspirons de la thermodynamique statistique pour redéfinir une entropie qui, comme on le verra est plus fine que la précédente (mais d'un emploi plus difficile).

Dans deux articles parus (Mendes France, Tenenbaum (11) et Dekking, Mendes France (1) nous avons défini la dimension fractale d'une courbe (voir aussi Dupain, Mendes France (3)). Nous verrons ici que la dimension et l'entropie sont liées et que, d'une façon un peu vague, plus grande est la dimension, plus grande est l'entropie, établissant ainsi un principe général selon lequel la dimension croît avec le chaos (comparer avec B. Mandelbrot (9)).



Nous verrons ensuite comment appliquer ces idées à l'étude de l'équirépartition modulo 1, faisant par là le lien avec la théorie des nombres.

Deux autres variantes (moins complètes toutefois) de ce même article sont à paraître. L'un dans le Compte Rendu du Colloque Janos Bolyai tenu à Budapest en juillet 1981, l'autre dans les Actes d'un colloque de Biomathématique tenu à Marseille en septembre 1981.

Je remercie Michel Pallard pour son temps, son aide et sa gentillesse.

## § 2. ELECTRON et POSITION

Afin de motiver notre définition de l'entropie d'une courbe, nous commencerons par rappeler le modèle de l'électron selon le physicien Wheeler.

Dans son discours lors de la remise du prix Nobel, R. Feynman (5, page 250) se pose la question de savoir pourquoi tous les électrons ont même masse et même charge, et pourquoi tous les positrons (anti-électrons) ont la même masse que les électrons et, au signe près, même charge. Wheeler lui suggère la réponse sous forme de boutade. Il n'y a qu'un seul électron-positron dans l'Univers. Plus précisément, dans l'espace-temps  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , l'électron-positron prend la forme d'une immense ligne orientée appelée ligne d'Univers.

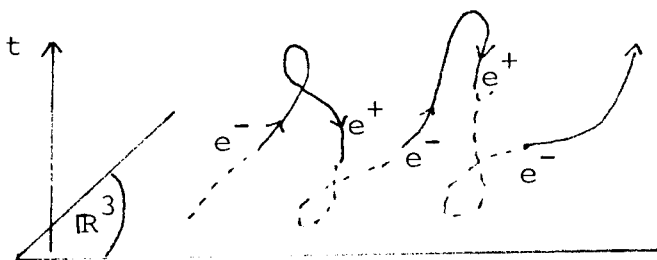


fig. 2

Observer l'électron-positron à l'instant  $t_0$ , c'est couper la ligne d'Univers par l'hyperplan  $t = t_0$  et observer les points d'intersection. Quand le temps s'écoule les électrons-positrons parcourent des trajectoires dans l'hyperplan "montant". Un point d'intersection est un électron  $e^-$  si au voisinage de ce point la ligne d'Univers est orientée dans le sens du temps croissant. Si au contraire la ligne d'Univers est localement "descendante" au point d'intersection, alors la particule observée est un positron  $e^+$ . On voit ainsi que lorsqu' l'hyperplan monte, certains électrons  $e^-$  rencontrent des positrons  $e^+$  puis s'annihilent. Ailleurs un couple  $(e^-, e^+)$  peut naître.

Ce modèle est bien entendu beaucoup trop simpliste et ne répond même pas à la question initiale de Feynman. De plus selon ce modèle, il y aurait autant d'électrons que de positrons à un instant donné. Or, jusqu'à présent, rien ne permet d'affirmer cela : il semblerait qu'il y ait plus d'électrons que de positrons... mais peut être que dans une lointaine galaxie, le nombre de positrons l'emporte sur le nombre d'électrons !

Quoiqu'il en soit, l'intérêt que j'y vois c'est que la ligne d'Univers électron-positron apparaît comme une succession de systèmes de particules. Or on sait que c'est l'entropie d'un système de particules. Par intégration, on doit alors pouvoir définir l'entropie d'une courbe. Dans les paragraphes suivants, nous précisons cette idée.

### § 3. L'ENTROPIE D'UN SYSTEME DE POINTS

A partir de maintenant, nous abandonnons l'image physique et "particule" devient synonyme de "point".

Soit  $N \geq 1$  un entier donné. Considérons un système  $\Sigma$  de  $N$  points  $P_1, P_2, \dots, P_N$ . Un événement consiste à choisir l'un des  $N$  points parmi les autres, avec la possibilité uniforme  $1/N$ . L'entropie de  $\Sigma$  est alors

$$H(\Sigma) = \sum_{k=1}^N p_k \log \frac{1}{p_k} = \log N.$$

(On trouvera la définition de l'entropie liée à la théorie de l'information dans Jones (6) ou Martin, England (10). C'est cette définition que nous adoptons ici).

Supposons que  $\Sigma = \Sigma_t$  dépende du temps  $t$ . A l'instant  $t$  nous avons  $N_t$  points. L'entropie  $H(\Sigma_t)$  est donc  $\log N_t$ . Il se peut que  $N_t$  admette une moyenne par rapport au temps, par exemple

$$\bar{N} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T N_t dt.$$

(Dans les paragraphes suivants, c'est d'une autre moyenne qu'il agira car l'ensemble "temps" sera compact, bidimensionnel). Pour l'instant, nous prendons comme définition de l'entropie du système  $\Sigma : t \rightarrow \Sigma_t$  la quantité

$$H(\Sigma) = \log (\text{moyenne de } N_t) .$$

Cette définition est plus "opérante" que la moyenne de  $\log N_t$ .

#### § 4. ENTROPIE des COURBES FINIES

Soit  $\Omega$  l'ensemble des courbes planes de longueurs finies. Comme nous nous intéressons à la forme des courbes, nous identifierons deux courbes qui s'obtiennent l'une de l'autre par similitude. Il n'y a donc dans  $\Omega$  qu'un seul segment de droite, qu'un seul cercle, qu'une seule conique d'excentricité donnée,...

Par analogie avec le modèle de l'électron-positron, toute courbe  $\Gamma \in \Omega$  pourra être considérée comme une ligne d'Univers (ici l'Univers vers  $R^2$ ). Toute droite  $D$  qui coupe  $\Gamma$  sera appelée un instant. A l'instant  $D$ ,  $\Gamma$  est composé de  $N_D = \text{card}(D \cap \Gamma)$  points-particules.

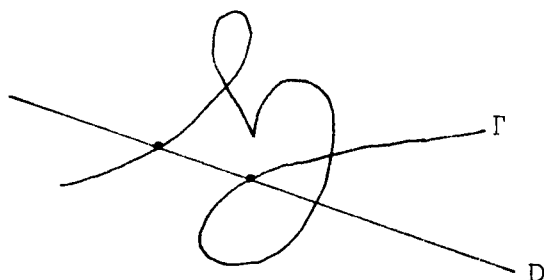


fig. 3

L'ensemble temps n'est pas linéaire : il est constitué de l'ensemble de toutes les droites qui intersectent  $\Gamma$ . Ainsi, à l'instant  $D$ , l'entropie est

$$H(\Gamma \cap D) = \log N_D ,$$

donc l'entropie de  $\Gamma$  est

$$\log (\text{moyenne } N_D)$$

Il nous reste à définir la moyenne de  $N_D$ . Dans le plan  $(x,y)$ , la droite  $D$  est représentée par ses coordonnées normales

$$x \cos \theta + y \sin \theta - \rho = 0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

L'identification  $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$  fait de l'ensemble des droites une bande de Möbius. Cette bande étant naturellement munie de la mesure de Lebesgue  $dD = d\rho d\theta$ , la moyenne  $\bar{N}$  de  $N_D$  est

$$\bar{N} = \int_{D \cap \Gamma \neq \emptyset} N_D dD / \int_{D \cap \Gamma \neq \emptyset} dD ,$$

et son logarithme nous définit l'entropie de  $\Gamma$ .

Il est tout à fait remarquable que  $\bar{N}$  puisse se calculer de façon très simple. Soit  $|\Gamma|$  la longueur de  $\Gamma$  et  $|\partial K|$  la longueur de la frontière de l'enveloppe convexe  $K$  de  $\Gamma$ . Alors selon un théorème de Steinhaus (14) (voir

Santalo (13),

$$\bar{N} = 2 \frac{|\Gamma|}{|\partial K|}$$

d'où

$$(1) \quad H(\Gamma) = \log \frac{2|\Gamma|}{|\partial K|}$$

On remarquera que  $H(\Gamma)$  ne dépend que de la classe de la courbe  $\Gamma$  et non de la courbe elle-même. L'entropie  $H$  est donc bien une application définie sur  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

La formule (1) aurait pu servir de définition. Notre approche nous semble cependant plus appropriée en ce qu'elle montre le rapport entre l'entropie de la théorie de l'information et notre entropie.

On vérifiera immédiatement qu'un segment de droite a pour entropie 0 et que toute autre courbe a une entropie strictement positive. Une portion finie de courbe algébrique de degré  $\nu$  a une entropie au plus  $\log \nu$  (en effet,  $\bar{N} \leq \nu$ ). Une courbe convexe fermée a pour entropie  $\log 2$  (en effet,  $N_D = 2$  pour tout  $D$ ).

## § 5. ENTROPIE des COURBES INFINIES

Soit  $\Gamma$  une courbe de longueur infinie. A tout  $s \geq 0$  on associe la portion commençante  $\Gamma_s$  de  $\Gamma$  de longueur  $s$ ; ainsi  $|\Gamma_s| = s$ . On appelle entropie supérieure  $\bar{h}(\Gamma)$  et entropie inférieure  $\underline{h}(\Gamma)$  les deux nombres

$$\bar{h}(\Gamma) = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{h(\Gamma_s)}{\log s}$$

$$\underline{h}(\Gamma) = \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{h(\Gamma_s)}{\log s}$$

S'il y a égalité des deux entropies, on note la valeur commune  $h(\Gamma)$ .

On observera que  $\bar{h}(\Gamma)$  et  $\underline{h}(\Gamma)$  ne dépendent que de la forme de  $\Gamma$  et que

$$0 \leq \underline{h}(\Gamma) \leq \bar{h}(\Gamma) \leq 1 .$$

De plus, pour tout  $\alpha, \beta$  tels que  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ , il existe  $\Gamma$  telle que

$$\underline{h}(\Gamma) = \alpha \quad \text{et} \quad \bar{h}(\Gamma) = \beta .$$

Si  $\Gamma$  est une droite ou une courbe qui tend vers l'infini "rapidement",  $h(\Gamma) = 0$ . C'est le cas de la spirale  $\rho = \exp \theta$ . Toute courbe algébrique non bornée est d'entropie nulle (car  $H(\Gamma_s) \leq \log (\text{degré } \Gamma)$ ). Si au contraire  $\Gamma$  est d'allure chaotique, son entropie est 1. Il existe cependant des courbes régulières d'entropie 1 : telle est la spirale  $\rho = \log \theta$ . Cela ne doit pas étonner. Dans la nature, les spirales sont tout aussi bien associées à l'ordre (coquille d'escargot  $\rho = a^\theta$ ,  $a > 1$  d'entropie 0) qu'au désordre (tourbillons turbulents). Une courbe bornée dans le plan, mais de longueur infinie a une entropie 1.

Enfin, pour clore cette liste, on vérifiera que la spirale  $\rho = \theta^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  a pour entropie  $h = (1 + \alpha)^{-1}$ .

Une courbe d'entropie nulle sera dite déterministe. Une courbe d'entropie unité sera dite chaotique.

## § 6. DIMENSION des COURBES ((1), (11))

Considérons une droite  $\Gamma$  et un disque  $\Delta_R$  centré en 0, de rayon R. Quand R tend vers l'infini, il est clair que



$$|\Gamma \cap \Delta_R| \sim R$$

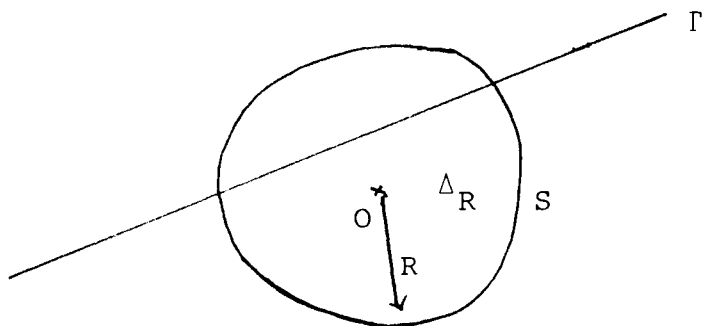


fig. 4

Soit S l'un des demi-plans en lequel  $R^2$  est partagé. Alors

$$\text{Aire}(S \cap \Delta_R) \sim \frac{1}{2} \pi R^2 .$$

Les exposants de R qui apparaissent dans les deux formules précédentes décrivent les dimensions respectives de  $\Gamma$  et S :

$$\dim(\Gamma) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log |\Gamma \cap \Delta|}{\log R}$$

$$\dim(S) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Aire}(S \cap \Delta_R)}{\log R}$$

Nous prendrons modèle sur la première des deux formules pour donner une définition de la dimension d'une courbe  $\Gamma$  dans le plan. Cependant, la limite peut ne pas exister. On introduira alors la dimension supérieure et la dimension inférieure ( $\lim \sup$ ,  $\lim \inf$ ). La définition n'est toutefois pas raisonnable en ce sens qu'elle donne une dimension qui dépasse 2 pour des courbes d'allure très chaotique. On modifie donc la définition de la façon suivante :

Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $R > 0$  on pose

$$\Gamma_R(\varepsilon) = \{p \in \text{plan} / \text{dist}(p, \Gamma) < \varepsilon, \text{dist}(p, 0) < R\} .$$

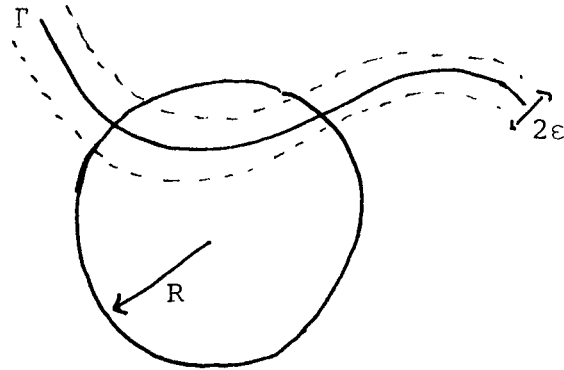


fig. 5

Par définition

$$\overline{\dim}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Aire } \Gamma_R(\varepsilon)}{\log R}$$

$$\underline{\dim}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Aire } \Gamma_R(\varepsilon)}{\log R}$$

En cas d'égalité, on écrit  $\dim(\Gamma)$ .

Si  $\Gamma$  est borné dans le plan,  $\dim(\Gamma) = 0$ . Pour toute courbe non bornée,

$$1 \leq \underline{\dim}(\Gamma) \leq \overline{\dim}(\Gamma) \leq 2$$

et pour tout  $\alpha, \beta$ ,  $1 \leq \alpha \leq \beta \leq 2$ , il existe une courbe  $\Gamma$  (non bornée) telle que

$$\underline{\dim}(\Gamma) = \alpha, \overline{\dim}(\Gamma) = \beta$$

On montre aisément les inégalités

$$\overline{\dim}(\Gamma) \leq (1 - \bar{h}(\Gamma))^{-1}$$

$$\underline{\dim}(\Gamma) \leq (1 - \underline{h}(\Gamma))^{-1}$$

Il s'ensuit qu'une courbe déterministe ( $h(\Gamma) = 0$ ) est de dimension 1. Par contre, il existe des courbes chaotiques ( $h(\Gamma) = 1$ ) dont la dimension est minimale ( $\dim(\Gamma) = 0$  pour  $\Gamma$  borné,  $\dim(\Gamma) = 1$  pour  $y = \sin e^x$ ). Les inégalités précédentes montrent aussi qu'une courbe de dimension 2 vérifie  $h(\Gamma) \geq 1/2$ .

### § 7. EQUIREPARTITION MODULO 1

Soit  $u = (u_n)$  une suite infinie de nombres réels. On sait qu'elle est équirépartie (mod 1) si et seulement si pour tout  $q \in \mathbb{Z}^*$ ,

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi q u_k = o(n), \quad n \rightarrow \infty$$

Afin de ne pas alourdir notre exposé, nous conviendrons de dire que la suite équirépartie (mod 1) si la condition précédente est satisfaite pour  $q = 1$ .

Considérons la courbe polygonale infinie  $\Gamma[u]$  dont les sommets successifs dans le plan complexe sont  $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots$ . L'entropie du polygone fini  $\Gamma_N[u]$  constitué par les  $N$  premiers sommets est

$$H_N = \log \frac{2N}{|\partial K_N|}$$

où  $|\partial K_N|$  vérifie

$$2 \max_{1 \leq n \leq N} |z_n| \leq |\partial K_N| \leq 4\pi \max_{1 \leq n \leq N} |z_n|$$

Ainsi

$$H_N \sim \log \left( \frac{1}{N} \max_{n \leq N} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi u_k \right| \right)^{-1}.$$

Supposons que l'on sache qu'il existe deux nombres  $\alpha, \beta$  ( $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ ) tels que

$$N^\alpha \ll \left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi u_k \right| \text{ pour une infinité de } N,$$

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi u_k \right| \ll N^\beta \text{ pour tout } N \text{ suffisamment grand.}$$

Alors les entropies de  $\Gamma[u]$  vérifie

$$1 - \beta \leq \underline{h}(\Gamma[u]) \leq \bar{h}(\Gamma[u]) \leq 1 - \alpha .$$

D'une façon générale, meilleur est la répartition de  $u$  ( $\beta$  voisin de 0), plus grande est l'entropie.

Nous allons illustrer cette étude par plusieurs exemples. Les courbes qu'on verra ont été tracées par F.M. Dekking (certaines ont déjà paru dans notre article [1]), par F. Dress et par M. Pallard.

## § 8. EXEMPLES

### Exemple 1.

$u_n = n \lambda$ . Si  $\lambda = 0$ , le polygone  $\Gamma = \Gamma[u]$  est une demi-droite issue de 0 ( $h = 0$ ). Si  $\lambda \in \mathbb{Q}^*$  le polygone est fini. Si  $\lambda \notin \mathbb{Q}$ , le polygone est infini et remplit une couronne circulaire. Dans ce cas  $h = 1$  (figure 6).

### Exemple 2.

$u_n = n^2 \lambda$ . Supposons  $\lambda$  irrationnel. Désignons par  $h(\lambda)$  (resp.  $\bar{h}(\lambda)$ ,  $\underline{h}(\lambda)$ ) l'entropie des polygones correspondants. Alors

$$h(\text{nombre quadratique}) = \frac{1}{2} \quad (\text{figure 7,8})$$

$$\underline{h}(e) \geq \frac{1}{2} \quad (\text{figure 9})$$

$$\underline{h}(\pi), \bar{h}(\pi) ? \quad (\text{figure 10})$$

L'allure des courbes  $\Gamma[(n^2\lambda)]$  est liée au développement en fraction continue de  $\lambda$ .  $\Gamma[(n^2\sqrt{2})]$  et  $\Gamma[(n^2 \frac{1+\sqrt{5}}{2})]$  présentent des symétries locales. Nous discuterons de ce phénomène dans une autre publication. Particulièrement remarquable est la courbe  $\Gamma[(n^2\pi)]$  dont les motifs périodiques correspondent à l'approximation

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Exemple 3.

$u_n = n \log n$ . L'entropie est 1/2. Les attracteurs (spirales) correspondent aux  $n$  tels que  $\log n$  avoisine 1/2 (mod 1). Les points d'inflexion correspondent aux  $n$  tels que  $\log n$  est proche d'un entier (figure 11).

Exemple 4.

$u_n = n^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ . L'entropie est  $\alpha$  (figure 12).

Exemple 5.

$u_n = n^{3/2}$ . La courbe (figure 13) découverte par F. Dress est d'une surprenante régularité. J.M. Deshouillers employant une méthode de van der Corput montre que

$$\sum_{N < n \leq 2N} \exp 2i\pi n^{3/2} \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{\frac{3}{2}N^{1/2} < v < \frac{3}{2}(2N)^{1/2}} v^{\frac{1}{2}} \exp 2i\pi(-\frac{4v^3}{27})$$

Une étude détaillée de cette formule permet d'expliquer le fait que la courbe suit la première bissectrice et que chaque "période" contient neuf attracteurs. Tout ceci sera développé par Deshouillers dans un prochain article. L'entropie est  $h = 1/4$ .

Exemple 6.

$u_n = n^2 \log n$ . La courbe relative à cette suite présente un chaos assez inhabituel (figure 14) en ce sens que le désordre y semble inhomogène. De place en place apparaissent

des motifs tout à fait organisés mais sans doute difficiles à saisir. On trouve  $\underline{h} \geq 1/6$ .

Exemple 7.

Courbes obtenues par pliage de papier :  $h = 1/2$ .  
(voir [11]).

§ 9. UNE AUTRE DEFINITION de L'ENTROPIE des COURBES

Soit  $\Gamma \in \Omega$  une courbe rectifiable finie. D'après les résultats du paragraphe 4, si

$$m_k = \int \text{card}(D \cap \Gamma) = k \, dD$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k = |\partial K|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k m_k = 2|\Gamma|.$$

La quantité

$$p_k(\Gamma) = \frac{m_k}{|\partial K|}$$

peut donc être considérée comme la probabilité pour qu'une droite coupe  $\Gamma$  en exactement  $k$  points ([13], [14]). L'entropie de  $\Gamma$  peut alors être définie par

$$H_1(\Gamma) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\Gamma) \log p_k(\Gamma)$$

avec la convention  $0 \cdot \infty = 0$ . Cette entropie n'est pas sans rapport avec l'entropie  $H(\Gamma)$  définie au paragraphe 4.

Théorème : On fixe la longueur relative  $\gamma = |\Gamma|/|\partial K|$  de la courbe finie  $\Gamma$ . Soit

$$\beta = \log \frac{2\gamma}{2\gamma - 1}$$

Alors

$$0 \leq H_1(\Gamma) \leq H(\Gamma) + \frac{\beta}{e^\beta - 1} \leq H(\Gamma) + 1$$

La démonstration de ce résultat est assez classique. En effet, la technique des multiplicateurs de Lagrange nous apprend à trouver les extrêmes liés. Soit à chercher le maximum de la fonction

$$H(p_1, p_2, p_3, \dots) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k$$

sachant que

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 2 \frac{|\Gamma|}{|\partial K|}$$

On considère la fonction

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log p_k - \alpha \left( \sum_{k=1}^{\infty} p_k - 1 \right) - \beta \left( \sum_{k=1}^{\infty} k p_k - 2 \frac{|\Gamma|}{|\partial K|} \right)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux multiplicateurs de Lagrange. Les conditions

$$\frac{\partial U}{\partial p_k} = 0$$

impliquent

$$- \log p_k - 1 - \alpha - k\beta = 0$$

d'où

$$p_k = c \cdot e^{-k\beta}$$

Les deux conditions de liaisons imposent alors

$$c = e^\beta - 1$$

et

$$\beta = \log \frac{2|\Gamma|/|\partial K|}{2(|\Gamma|/|\partial K|) - 1} ,$$

d'où

$$p_k = (e^{\beta} - 1)^{-1} e^{-\beta k} = \frac{1}{2|\Gamma|/|\partial K| - 1} \left(1 - \frac{|\partial K|}{2|\Gamma|}\right)^k$$

Cette distribution de probabilité s'appelle la distribution de Gibbs et correspond en thermodynamique à l'équilibre : elle réalise l'entropie maximale pour un rapport  $|\Gamma|/|\partial K|$  donné. Représentons par  $p_1^0, p_2^0, p_3^0, \dots$  cette distribution de probabilités. L'entropie correspondante est

$$H^0 = - \sum_{k=1}^{\infty} p_k^0 \log p_k^0 = \beta \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - 1} - \log(e^{\beta} - 1)$$

Or l'entropie  $H(\Gamma)$  définie au paragraphe 4 est donnée par

$$H(\Gamma) = \log \frac{2|\Gamma|}{|\partial K|} = \log \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - 1} = \beta - \log(e^{\beta} - 1)$$

donc

$$H^0 - H(\Gamma) = \beta \frac{e^{\beta}}{e^{\beta} - 1} - \beta = \frac{\beta}{e^{\beta} - 1}$$

Par suite

$$H^0 = H(\Gamma) + \frac{\beta}{e^{\beta} - 1}$$

$H^0$  étant maximale, on a bien

$$H_1(\Gamma) \leq H^0 = H(\Gamma) + \frac{\beta}{e^{\beta} - 1}$$

Pour conclure, il suffit de constater que  $\beta \geq 0$  et que



$$\frac{\beta}{e^{\beta} - 1} \leq 1 \quad \text{C Q F D}$$

Quelle que soit la distribution de probabilité  $p_1, p_2, p_3, \dots$  et quelle que soit la suite  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  positive, tendant vers 0, il existe une courbe  $\Gamma \in \Omega$  telle que

$$|p_k(\Gamma) - p_k| < \varepsilon_k .$$

Ceci est en effet facile à voir en considérant des courbes ayant l'allure suivante (figure 15)

... . 6 . 4 . 2 . 6 . 3 . 5 . 7 . ...

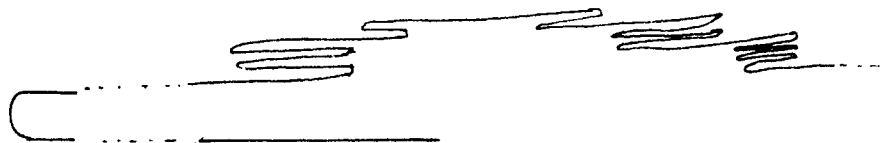


fig. 15

Une telle courbe est coupée par des droites "verticales" en 1, 2, 3, ... points. Si la courbe était infiniment aplatie, on aurait  $p_k(\Gamma) = p_k$ . Pour une courbe non aplatie, on n'obtient donc qu'une approximation à la distribution  $p_1, p_2, p_3, \dots$

Il existe en particulier des courbes  $\Gamma \in \Omega$  qui vérifient

$$|p_k(\Gamma) - p_k^0| < \varepsilon_k .$$

De telles courbes sont donc voisines de l'équilibre et peuvent être considérées comme courbes en équilibre.

#### § 10. INTERPRETATION THERMODYNAMIQUE

Considérons une courbe  $\Gamma \in \Omega$  en équilibre. Soit  $D$  une droite qui coupe  $\Gamma$ . A l'instant  $D$ , la courbe  $\Gamma$  est

dans l'état énergétique  $\text{card}(\Gamma \cap D)$ . L'état macroscopique de  $\Gamma$  est la combinaison des microétats  $\Gamma \cap D$ . L'énergie totale de  $\Gamma$  est donc

$$(e^\beta - 1) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\beta k} = \frac{2|\Gamma|}{|\partial K|}$$

Le coefficient  $\beta$  est à interpréter comme l'inverse de la température  $1/k_0 T$  où  $k_0$  est traditionnellement la constante de Boltzmann qui définit l'échelle de température. Ici nous choisirons  $k_0 = 2$ . Ainsi, la température de la courbe  $\Gamma$  en équilibre est

$$T = \frac{1}{2} \left( \log \frac{2|\Gamma|/|\partial K|}{(2|\Gamma|/|\partial K|) - 1} \right)^{-1}$$

On constate que  $T > 0$ .

En poussant l'analogie plus loin, on est amené à identifier  $|\Gamma|$  avec le "volume"  $V$  de  $\Gamma$  et  $1/|\partial K|$  avec la "pression"  $P$ . L'équation d'état de la courbe  $\Gamma$  en équilibre est donc

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{2PV}{2PV - 1}$$

soit

$$PV = \frac{1}{2} \frac{\exp(2T)^{-1}}{\exp(2T)^{-1} - 1}$$

Quand la température  $T$  tend vers 0,  $PV$  tend vers  $1/2$  donc  $H_1(\Gamma)$  et  $H(\Gamma)$  tendent tous deux vers 0. La troisième loi de la thermodynamique est donc valable : au zéro absolu, l'entropie est nulle (les seules courbes  $\Gamma$  qui existent au zéro absolu sont les segments de croixes !).

Quand la température  $T$  croît vers  $+\infty$ , alors  $PV$  tend vers l'infini ; plus précisément

$$PV = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \exp(-(2T)^{-1})} \sim T .$$

Ainsi, à haute température, une courbe en équilibre se comporte suivant la loi de Mariotte des gaz parfaits...

Pour ce dernier paragraphe, on pourra consulter J.S. Dugdale [2] où l'entropie des thermodynamiciens est très clairement exposée. On verra aussi que notre courbe finie se comporte comme un corps solide d'Einstein (voir aussi Einstein [4]). Les "purs et durs" préféreront peut être se reporter au livre de D. Ruelle [12], M. Kac [7] ou C.J. Thompson [15].

# B I B L I O G R A P H I E

=====  
=====

- [1] F.M. DEKKING, M. MENDES FRANCE. Uniform distribution modulo one : a geometrical viewpoint, Jour. fur die reine und angewandt Math. 329, 1981, 143-153.
- [2] J.S. DUGDALE. Entropy and low temperature physics, Hutchinson University Library 1966, réimprimé 1970.
- [3] Y. DUPAIN, M. MENDES FRANCE. Dimensions des spirales, Bull. Soc. Math. France, Bull. Soc. Math. France, à paraître.
- [4] A. EINSTEIN. Annalen der Physik 22, 1907, 180.
- [5] R. FEYNMAN. La nature de la physique, Collection Points Seuil 1980.
- [6] D.S. JONES. Elementary Information Theory, Oxford applied mathematics and computing science series, Clarendon Press, Oxford 1979.
- [7] M. KAC. Some mathematical problems in statistical mechanics, Studies in probability édité par M. Rosenblatt, Studies in Mathematics, Mathematics association of America, 18, 1978, 180-228.
- [9] B.B. MANDELBROT. Fractals, Freeman San Francisco 1977.
- [10] N.F. MARTIN, J.W. ENGLAND. Mathematical Theory of Entropy, Encyclopedia of Math. and its applicat. 12, Addison Wesley 1981.
- [11] M. MENDES FRANCE, G. TENENBAUM. Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, Bull. Soc. Math. France, 109, 1981, 207-215.
- [12] D. RUEELLE. Thermodynamic Formalism. Encyclopedia of Math. and its appl. 5, Addison Wesley 1978.
- [13] L.A. SANTALO. Integral geometry and geometric probability. Encyclopedia of Math. and its appl. 1, Addison Wesley 1976.

- [14] H. STEINHAUS. Length, shape and area, Colloq. Math. 3, 1954, 1-13.
- [15] C.J. THOMPSON. Mathematical Statistical Mechanics, Princeton University Press 1979.

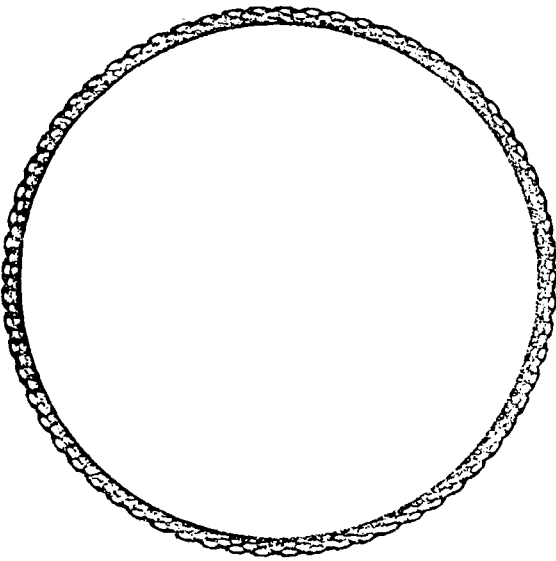


Figure 6 The curve  $\Gamma_{200}((\sqrt[3]{17}n))$

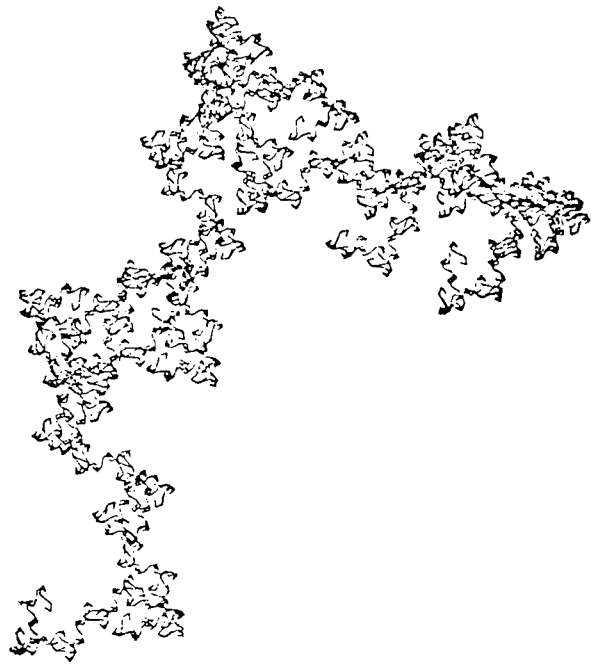


Figure 7. The curve  $\Gamma_{4000}((\sqrt[3]{2}n^2))$

fig 8 missing

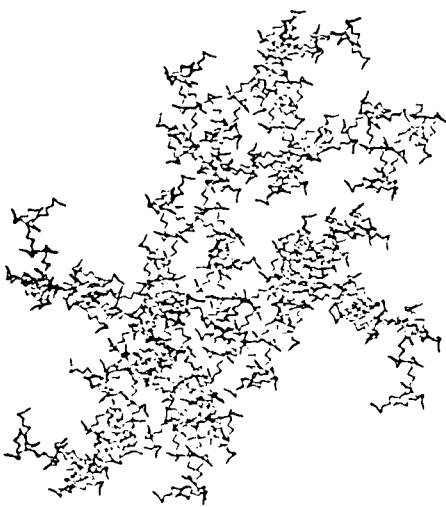


Figure 9 The curve  $\Gamma_{4000}((en^2))$

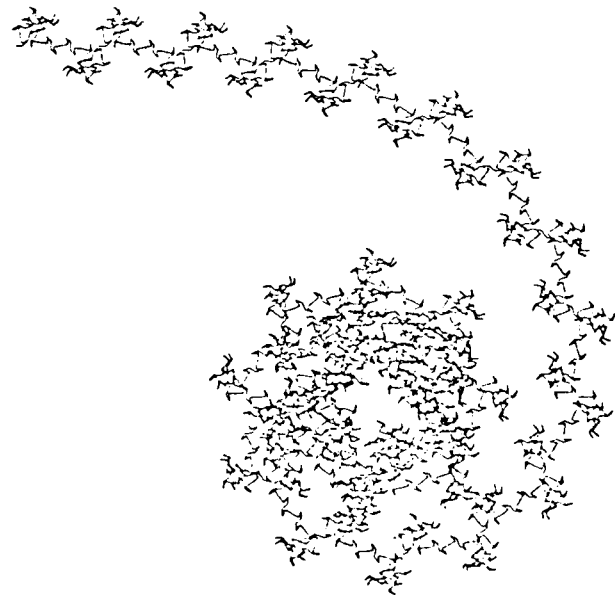


Figure 10 The curve  $\Gamma_{4000}((\pi n^2))$

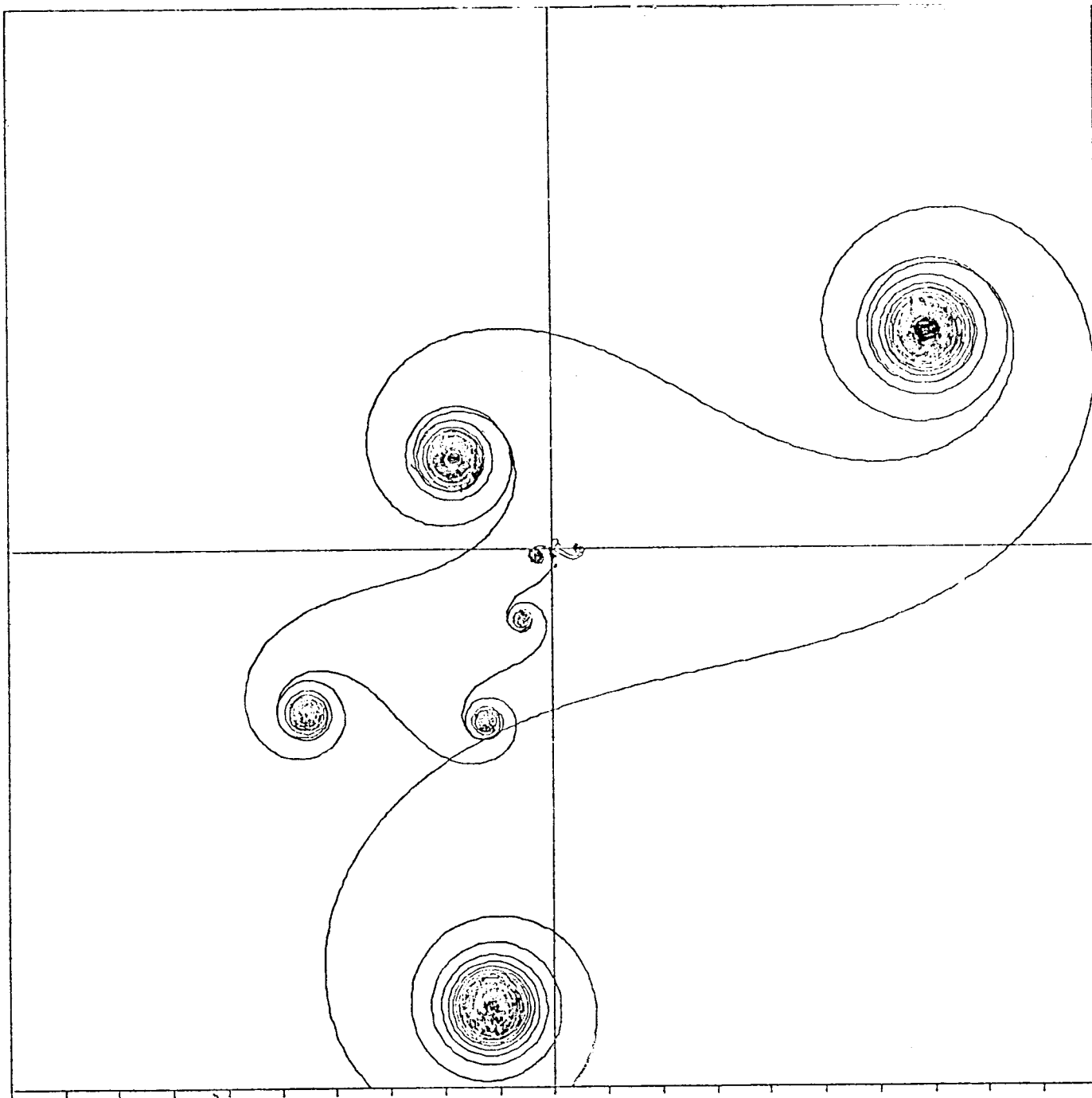
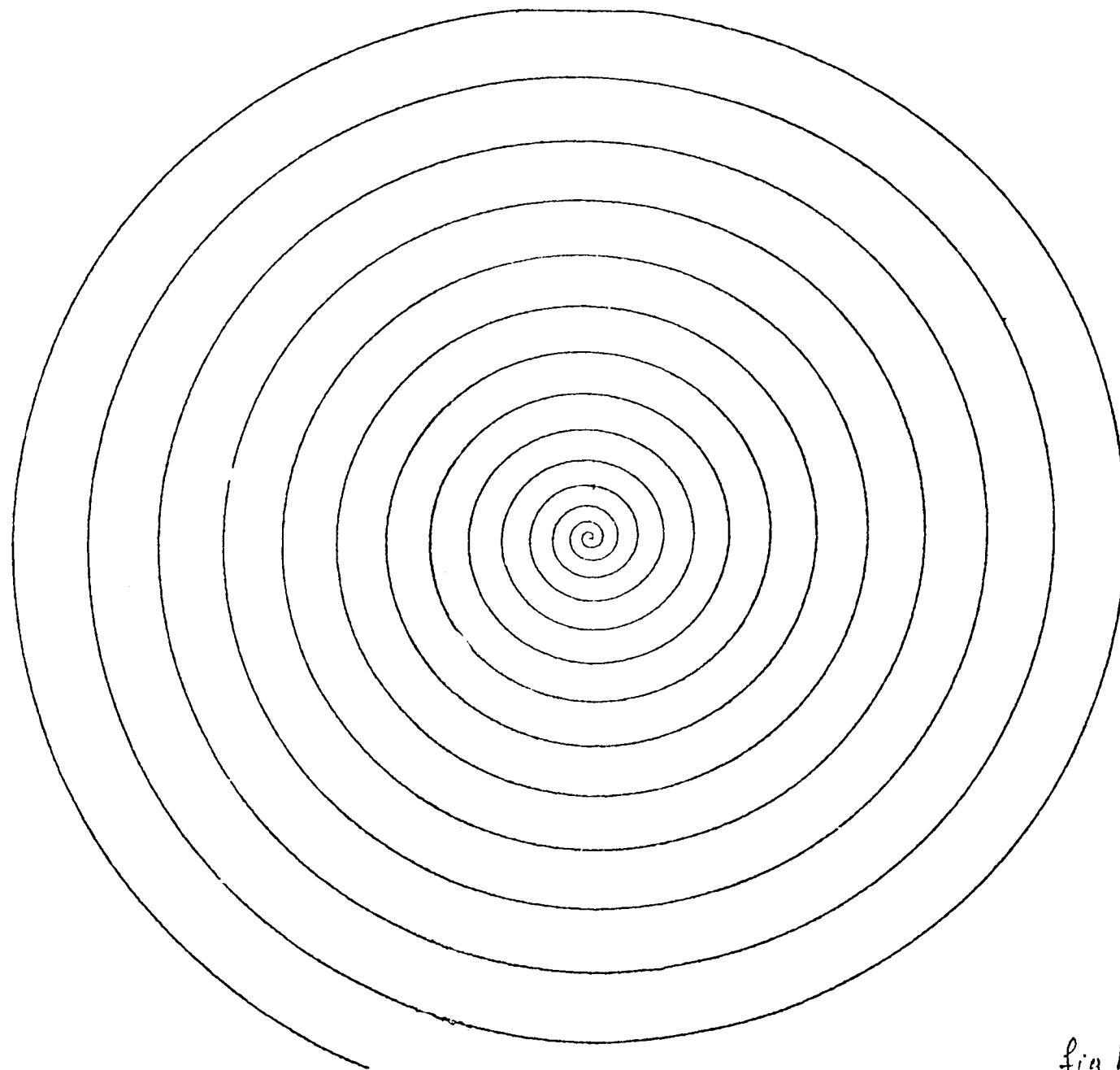


fig 11

$N=40000$   $X=-100 +100$   $Y=-100 +100$   $UK=K*\text{LOG}(K)$



$$\sqrt[15]{15^3 \cdot 100} (\sqrt[3]{h})$$

fig 12



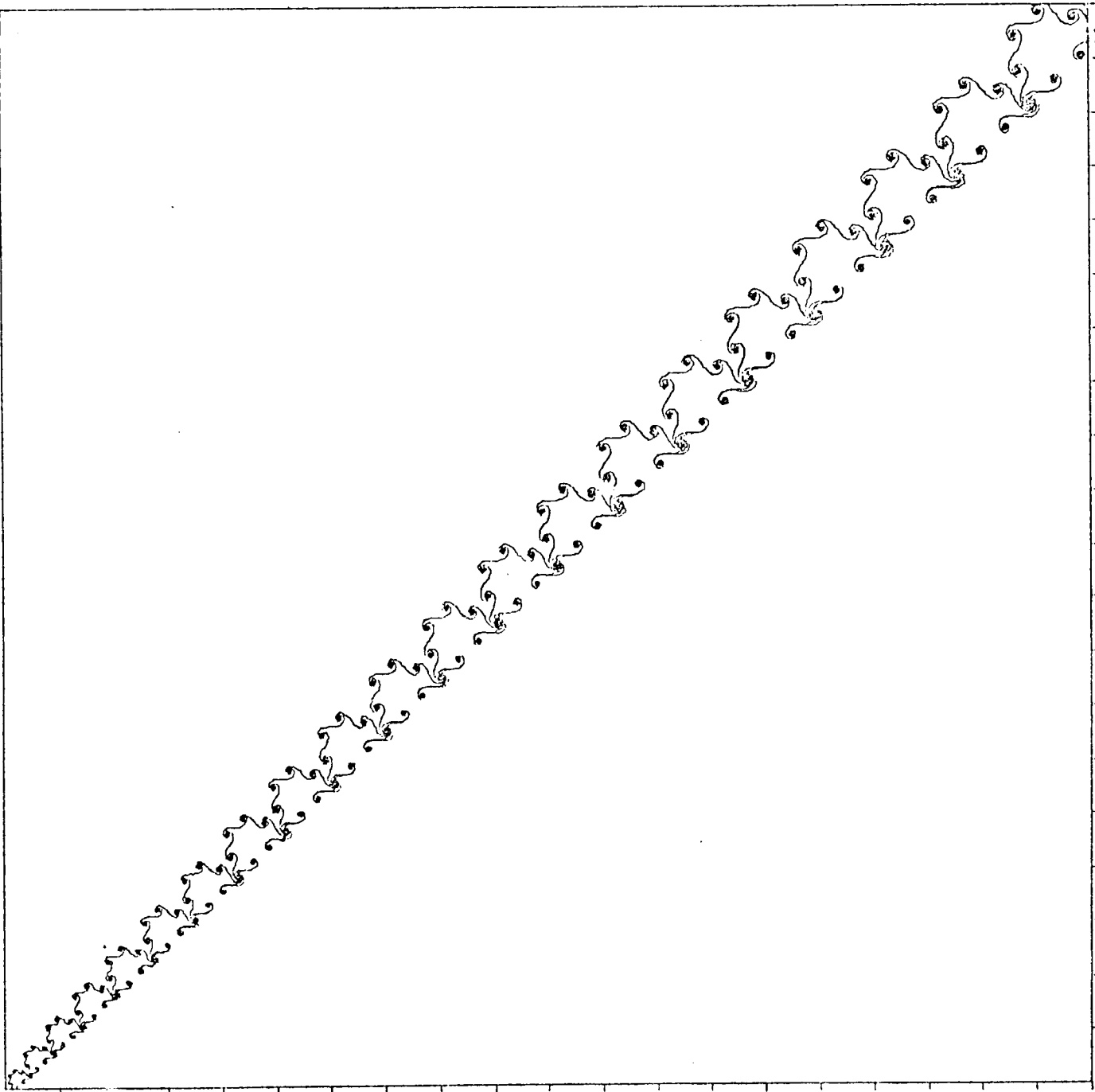


fig 13

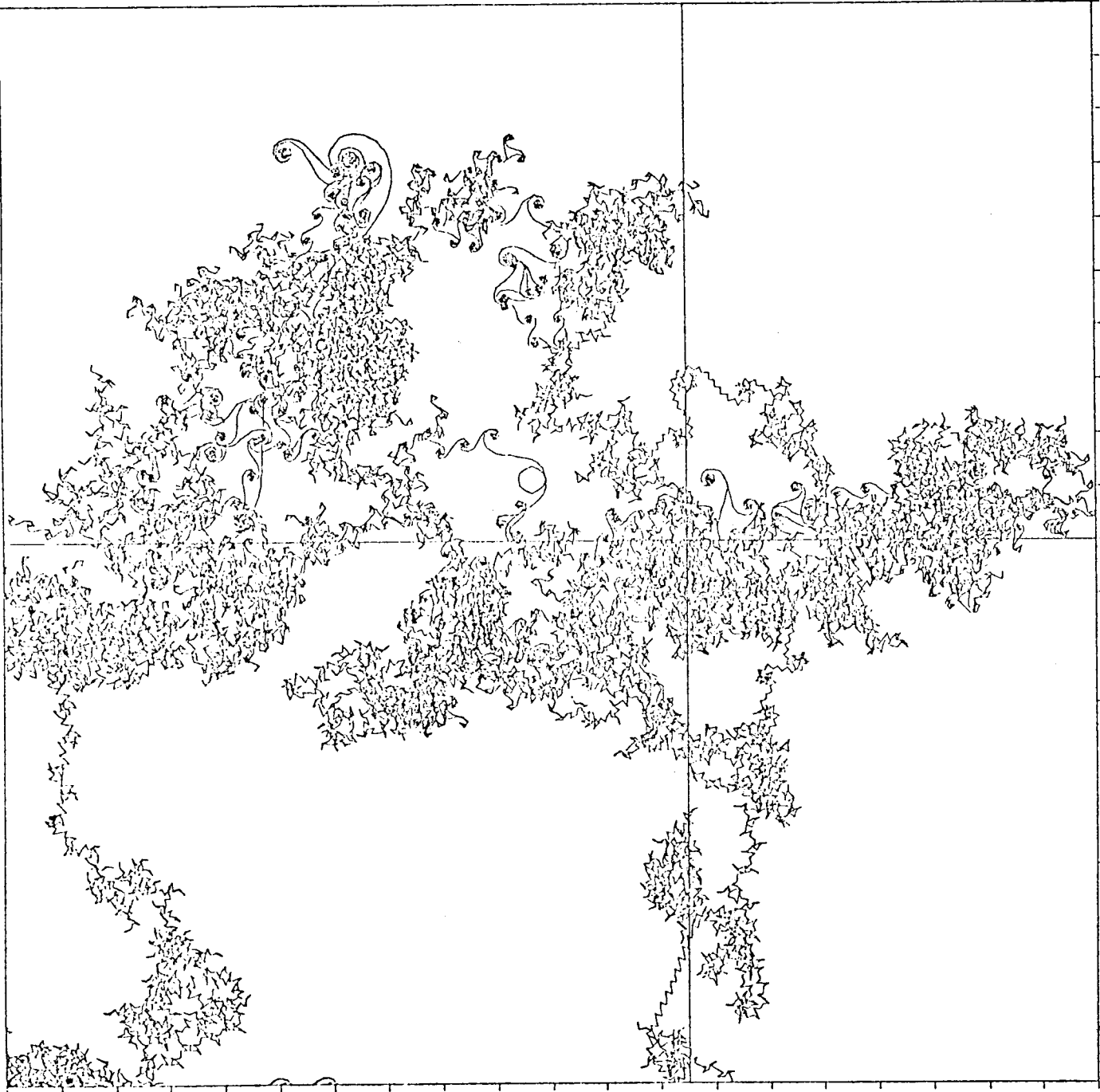


fig 14