SÉMINAIRE DE PHILOSOPHIE
ET MATHÉMATIQUES

CHRISTINE PHILI

Les idées de Joseph Louis Lagrange dans la théorie des fonctions analytiques

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1982, fascicule 5
« Les conceptions de Lagrange », , p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982___5_A1_0>

LES IDEES DE JOSEPH LOUIS LAGRANGE
dans la théorie des fonctions analytiques (1)

par Christine PHILI

La première édition de la "Théorie des fonctions analytiques..." (Paris 1797) (2), - ouvrage dont nous devons la naissance à l'enseignement de l'auteur à l'Ecole Polytechnique (3) est l'affinement des idées langrangiennes : ces idées ont traversé un long parcours. Suivons-en les traces.

En 1754 - tout jeune - dans la lettre qu'il adresse à Fagnano (4) et à Zuler (5) présente son idée directrice sur les relations formelles qui caractérise les dérivées, les différentielles et les intégrales (6).

Déçu de la réponse d'Euler affirmant que "sa découverte" appartenant à Leibniz (7), Lagrange abandonne ce domaine de recherche, et se lance avec succès dans des publications remarquables (8).

Les cours qu'il a professés à l'Académie Militaire de Turin (1760) (9) (10), lui ont sûrement donné le motif de revenir à ses anciennes idées, mais nous ne possèdons aucun document explicite à ce sujet.

---

(1) Conférence faite le 19 avril 1982 au Séminaire Philosophique et Mathématiques à l'Ecole Normale Supérieure. Le sujet de la conférence fait partie de ma thèse "La théorie des fonctions analytiques et son rôle dans l'histoire des Mathématiques".

(2) Le titre complet de l'ouvrage est : "Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou des fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies". Paris Imprimerie de la République, an V.

(3) v. mes articles : "sur l'enseignement de Lagrange à l'Ecole Polytechnique" Université de Limoges. 23ème congrès de l'A.F.A.S. 1974. Actes du C.
et v; aussi : "Les débats de l'enseignement de l'analyse à l'Ecole Polytechnique". Comptes-rendus du 100e Congrès National des Sociétés savantes. Paris 1976 p.87 - 100.

(4) Cette lettre renferme la première publication de Lagrange, v. "Lettera di Luigi de la Grange Tournier, Torinese, all' illustrissimo siguor conte Ciulio Carlo de Fagnano...contenente una nova serie pe i differenziali, ed integrali di qualsivoglia grado corrispondente alla Newtoniana per la potesta, et le radici". Torino 1754 v. Oeuvres Vol. VII p. 583-588. (Tournier est le nom de jeune fille de sa mère).

(5) v. la lettre de Lagrange à Euler. Turin 28 juin 1754, v. Oeuvres vo. XIV p.135-138.

(6) L'analogie entre les développements de $(a+b)^m$ et $d^m(xy)$, m étant un nombre entier positif, ne pouvait pas fournir le cadre solide qu'il cherchait pour donner l'Analyse. "mi pareva in vero d'aver scoperta una corrispondenza non dispregevole tra'l calcolo delle infinite, e quello delle finite granolezze" op. cit. p.385. Mais nous devons noter que cette correspondance qui existe entre le calcul et l'algèbre était liée avec les séries des puissances, qui sont devenues plus tard l'outil principal dans la théorie lagrangienne.

(7) Cette analogie avait été remarquée dès 1695 (v. sa lettre à Jean Bernouilli du 6/16 mai 1695 L.m.S III 175) et publiée dans son article "Symbolismus memorabilis calculi algébraicis et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum ..." Misc. Berolin. 1710 ; L.m.S. V. 377-382).

La correspondance entre Leibniz et Bernouilli avait été publiée en 1745 dans deux volumes intitulés : Virorum celeberr. G. Leibnitic et J. Bernouilli commercium philosophicum et mathematicum", Lausannae et Genevae. Lagrange en écrivant la lettre à Fagnano et à Zuler n'avait pas encore pris connaissance de cette édition ni de l'article cité de Leibniz.

(8) v. p. ex. sa théorie des variations. Pour plus de détails sur l'oeuvre de Lagrange v. l'article de R. Taton : "L'inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange". Revue d'Histoire des Sciences 1974 XXVII p. 1-36.

(9) Son premier contact avec l'enseignement, Lagrange l'a eu à l'âge de 19 ans (âge vaguement accepté à l'époque v. p. ex. le Journal de l'Empire (28 - IV - 1803) où il affirme qu'il avait 16 ans etc.). Par un décret royal du 26 sept. 1755 Lagrange fut nommé professeur de Mathématiques à l'Ecole d'Artillerie de Turin.

(10) v. mon article : "Les cours d'analyse mathématique de Lagrange à l'Ecole d'artillerie de Turin (1755-1766) (à paraître). Grâce au grand intérêt que M. le prof. R. Taton a montré dans la recherche de ce manuscrit nous avons pu consulter le microfilm et les photocopies qui en ont été tirées et qui se trouvent désormais au Centre A. Koyré à Paris.

Le mémoire de Berlin

En 1772 (1), Lagrange présente à l'Académie de Berlin son mémoire "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables" (2). Quelle est la forme de cette nouvelle espèce de calcul ?

Dans ce mémoire, il présente une sorte de calcul opérationnel, tout en "manipulant" avec l'opérateur d et en reliant les opérateurd d/dx. Ainsi "la dérivée" comme Lagrange la nomme devient l'outil de la manipulation algébrique (3).

Il prolonge le calcul opérationnel au d^{-1} e $^{d/dx}$, mais le point le plus caractéristique est l'utilisation des séries de Taylor. Dans ce mémoire nous ne pouvons par reconnaître une démonstration "nette" du théorème de Taylor, mais Lagrange emploi les séries des puissances pour "fournir" une démonstration algébrique du théorème de Taylor".
De toute façon nous devons souligner que dès l'introduction, Lagrange ne cache pas son but : "je crois devoir commencer par établir quelques notions générales et préliminaires sur la nature des fonctions d'une ou de plusieurs variables, lesquelles pourraient servir d'introduction à une théorie générale des fonctions" (4).

---

(1) Entre 1760 et 1772, Lagrange ne publie rien de relatif à l'Analyse. Cependant pendant cette période, il présente un travail important sur l'algèbre : "Sur la résolution des équations numériques" et "Additions au Mémoire sur la résolution des équations numériques" Mém. de l'Ac. royal des Sciences et Belles Lettres de Berlin 1767 p. 311-352, 1768 p. 111-180 v. aussi Oeuvres II p. 539-580 581-654.
v. aussi "Réflexions sur la résolution algébrique des équations". Nouveaux Mém. de l'Ac. royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin 1770 p. 134-215, 1771 p. 138-253. Oeuvres III p. 205-422.
De toute façon nous devons souligner qu'en 1760 il présente la note intitulée : Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal" Misc. Taurine II (1760-61) p.p. 17-18 où il admet la métaphysique newtonienne, tandis que dans ces cours à Turin, Lagrange admet la doctrine des premières et dernières raisons v. mon article "Les cours d'Analyse mathématique de Lagrange à l'Ecole d'artillerie de Turin (1755-1766)".

(2) v. Oeuvres III p. 439-476.

(3) Le sens mathématique usuel est apparu beaucoup plus tard.
Dans ce mémoire figure le même exemple $d^m(xy)$ qui auparavant se trouvait dans les lettres à Fagnano et à Euler. Ici il mentionne Leibniz mais il passe sous silence "sa première découverte".

(4) op. cit. p. 442.

Il commence par la formule:

"Si u est une fonction quelconque finie d'une variable x, qu'on y mette $x+\xi$ à la place de x, et par la théorie connue de séries ou dégage la nouvelle variable ξ de la fonction, on sait que u deviendra de cette forme

$$u + p\xi + p'\xi + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \ldots$$

où p, p', p" ... seront de nouvelles fonctions de x, dérivées d'une certaine manière de la fonction u ". (1), (2), (3).

De la même façon, il poursuit pour une fonction de deux variables :

"Si u est une fonction de deux variables x, y, qu'on mette $x+\xi$ à la place de x, $y+\psi$ à la place de y, qu'ensuite on dégage les quantités ξ,ψ par le moyen des séries, la fonction u deviendra de la forme

$$\begin{aligned} &u + p\xi + q\psi \\ &+ p'\xi^2 + q'\xi\psi + r'\psi^2 \\ &+ p''\xi^3 + q''\xi^2\psi + r''\xi\psi^2 + s''\psi^3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

où p, q, p', q', r', p", q" ... serait de nouvelles fonctins de x,y dérivées d'une certaine manière de la fonction u " (4)

Ainsi, à l'aide de ces "fonctions dérivées", il établit sa propre définition du calcul différentiel et intégral :
"Le calcul différentiel, considéré dans toute sa généralité, consiste à trouver directement, et par des procédés simples et faciles, les fonctions p, p', p"..., q, q', q" ... r, r', r" ... dérivées de la fonction u ; et le calcul intégral consiste à retoruver la fonction u par le moyen de ces dernières fonctions.

---

(1) op. cit. p. 442.

(2) en ce qui concerne la phrase : "... la théorie connue des séries" nous devons remarquer que Lagrange dès sa jeunesse a profondément étuidé, l'ouvrage d'Euler Introductio in analysin infinitorum" Lausanne : Bousquet 1748 faisait partie de sa formation mathématique v. mon article : "Les cours d'Analyse mathématique de Lagrange à l'Ecole d'Artillerie de Turin (1755-1766).

(3) il ne faut pas confondre la notation de primes avec celle de dérivées... Ici le modt dérivé n'a pas le sens qu'on lui a attribué ultérieurement.

(4) ib. p. 442-443.

Cette notion des calculs différentiel et intégral me paraît la plus claire et la plus simple qu'on ait encore donnée ; elle est, comme on voit, indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes" (1), (2).

Lagrange, ayant marqué le cadre de ses tâches, poursuit sa démarche afin de donner une démonstration algébrique du théorème de Taylor.

"puisque la fonction u, en y mettant $x+\xi$ à la place de x, est devenue

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + \ldots$$

si dans cette dernière fonction on met de nouveau $x+\omega$ à la place de x, il est clair qu'elle deviendra dela forme

$$\begin{aligned} & u + p\omega + p'\omega^2 + \rho''\omega^3 + \rho'''\omega^4 + \ldots \\ & \quad + p + \varpi\omega + \rho\omega^2 + \sigma\omega^3 + \ldots)\,\xi \\ & \quad + p' + \varpi'\omega + \rho'\omega^2 + \sigma\omega^3 + \ldots)\,\xi^2 \\ & \quad + p'' + \varpi''\omega + \rho''\omega^2 + \sigma''\omega^3 + \ldots)\,\xi^3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

où ϖ, ρ, σ ... seront des fonctions de x dérivées de la fonction p de la même manière que p, p', p"... le sont de la fonction u et ω', ρ', σ' ... seront des fonctions dérivées de même de la fonction p' et ω'', ρ'', σ'' ... des fonctions dérivées de p" , et ainsi des autres.

D'un autre côté, il est facile de voir que l'expression précédente ne sera autre chose que ce que devient la fonction u en y mettant à la fois $x+\xi+\omega$ à la place de x, ou bien ce que devient l'expression

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi^3 + p'''\xi^4 + \ldots$$

en y mettant $\xi+w$ à la place de ξ, c'est-à-dire

$$u + p(\xi+\omega) + p'(\xi+\omega)^2 + p''(\xi+\omega)^3 + \ldots \text{"} \quad (3)$$

---

(1) ib. p.443

(2) phrase qui renferme le germe du titre de l'ouvrage de 1797.

(3) ib. p.444

En développant les puissances de $\xi+\omega$ et ordonnant les termes, Lagrange obtient :

$$\begin{aligned}
&u + p\omega + p'\omega^2 + p''\omega^3 + p'''\omega^4 + \ldots \\
&\quad + (p + 2p'\omega + 3p''\omega^2 + 4p'''\omega^3 + \ldots)\,\xi \\
&\quad + (p + 3p''\omega + 6p'''\omega^2 + 10p^{\prime v}\omega^3 + \ldots)\xi^2 \\
&\quad + p'' + 4p'''\omega + 10p^{\prime v}\omega^2 + 20p^{v}\omega^3 + \ldots)\,\xi^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc comme cette formule doit être identique à la précédente, on aura

$$\begin{array}{lll}
\varpi = 2p' \;, & \rho = 3p'' \;, & \sigma = 4p''' \;,\ldots \\
\varpi = 3p'' \;, & \rho' = 6p'' \;, & \sigma = 10p^{1v} \;,\ldots \\
\varpi = 4p''' \;, & p'' = 10p^{1v} \;, & \sigma = 20p^{v} \;,\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Donc, $p' = \omega/2$, $p'' = \omega'/3$, $p''' = \omega''/4$

Or, de la même manière que p est dérivé de x, ϖ l'est de p, ϖ' l'est de p', ϖ'' l'est de p'' , et ainsi de suite; donc si l'on fait $p = u'$ et qu'on désigne de même par u'' une fonction dérivée de u' de la même manière que u' l'est de u , et par u''' en fonction dérivée de même de u'', et ainsi de suite, on aura

$$\begin{array}{llll}
p = u' \;, & & \varpi = u'' \;,\ \text{donc} & p' = u''/2 \\
& \text{donc} & \omega' = u'''/2 \;,\ \text{donc} & p'' = u'''/2.3 \\
& \text{donc} & \omega'' = u^{1v}/2.3 \;,\ \text{donc} & p''' = u^{1v}/2.3.4
\end{array}$$

Ainsi la fonction u deviendra, en mettant $x+\xi$ à la place de x

$$u + u'\xi + u''\xi^2/2 + u'''\xi^3/2.3 + u^{v}\xi^4/2.3.4 + \ldots$$

où les fonctions, u', u'' , u''' , u^{v} ... dérivant l'une de l'autre par une même loi, de sorte qu'on pourra les trouver aisément par une même opération répétée" (1).

Après avoir montré qu'en mettant $x+\xi$ à la place de x dans u, la fonction devient

$$u + u'\xi + u''\xi^2/2 + u''\xi^3/2.3 + \ldots$$

---

(1) ib. p.444-445.

Lagrange, utilise ses connaissances algébriques pour "démontrer l'équivalence" de ces concepts, avec ceux du calcul différentiel ; "si l'on regarde ξ comme infiniment petit et qu'on néglige les puissances ξ^2, ξ^3, ...

on aura simplement $u'\xi$ pour l'accroissement de u ; de sorte que, désignant cet accroissement par du, et l'accroissement . ξ de x par dx, on aura

$$du = u'dx \qquad \text{et} \qquad u' = du/dx \text{ " (1)}$$

Donc pour trouver la fonction u', il cherche la différentielle du à l'aide du calcul des infiniments petits et la divise par la différentielle dx.

"Ayant $u' = du/dx$, on aura de même
$u'' = d^2u/dx^2$, $u''' = d^3u/dx^3$ ...

de sorte que x devenant $x+\xi$, la fonction u deviendra

$$u + du/dx\, \xi + d^2u/dx^2\, \xi^2/2 + d^3u/dx^3\, \xi^3/2.3 + \ldots$$

où du, d^2u, d^3u ... désignent les différences première, seconde, troisième, etc. de u prises en faisant varier x de la différence infiniment petit dx.

Ce théorème est connu depuis longtemps, et M. Taylor en est, si je ne me trompe, le premier Auteur; on peut le démontrer de différentes manières; la précédente me paraît une des plus simples" (2) (3)

Par la démonstration du théorème de Taylor, Lagrange inconsciemment ouvre le chemin qui l'amènera dans quelques années à la "fondation rigoureuse" de l'Analyse par l'Algèbre.
Le mémoire de 1772 (4) sera le cadre de sa théorie en vue de fonder l'Analyse mathématique, mais il est passé presque inaperçu -malgré le trésor qu'il cache- parmi les mathématiciens de l'époque (5).

---

(1) ib. p.446

(2) ib. p.447

(3) Finalement les efforts de Lagrange l'amènent à identifier les démarches pour trouver le quotient différentiel d'une fonction avec le coefficient de i dans le développement de la série $f(x+i)$, qu'on trouve dans la théorie des fonctions analytiques ...

(4) de toute façon nous devons souligner que ne figure pas dans le mémoire une conception nette et explicite que $f'(x)$ soit identique avec $df(x)/dx$.

(5) Au moins la notation leibnizienne qu'il utilise (v. après la p.447), était un grand avantage pour la compréhension de ce mémoire.

Avant d'aborder la troisième étape lagrangienne -la publication en 1797 de la théorie des fonctions analytiques ..., nous devons retenir les points faibles du mémoire de Berlin.

i) le développement des séries: $u(x+h) = u + ph + p_1h_2 + \ldots$ est arbitraire (1)

ii) la nouvelle définition de u' ne fournit point les règles du calcul différentiel

iii) Lagrange considère d^ku/dx_k comme quotient des différences infiniment petits.

Néanmoins nous devons souligner que Lagrange revient à ses premières idées -qu'on trouve dans la lettre à Fagnano et à Euler- <u>les séries infinies</u>. Lagrange était convaincu que les séries infinies fournissent l'outil nécessaire pour élaborer une théorie -"dégagée de toute espèce de métaphysique"- purement algébrique qui fondera l'Analyse Infinitésimale.

---

(1) Euler est le premier qui dans son "Introductio in Analysin Infinitorina (1748) sect. 59 admet qu'une "fonction" de z peut toujours être représentée par une expression de la forme $A+Bz+Cz^2+\ldots$ Nous devons remarquer qu'à l'époque d'Euler "fonction" signifie une expression analytique.
v. ma conférence "Le développement du concept de "fonction" séminaire de Philosophie et Mathématiques - Paris 1974 - p. 1 - 24.

L'essai inachevé de Condorcet

sur le calcul intégral (1) . (2)

Cependant parmi les savants de l'époque, Condorcet (3) a essayé, à sa manière d'enrichir les recherches sur l'Analyse Infinitésimale.

Le traité du calcul intégral, inédit et inachevé fut présenté à l'Académie des Sciences de Paris par parties en 1778-1782.

A la Bibliothèque de l'Institut de France se trouve ce manuscrit, en trois volumes, sous le code MS 877-879 où j'ai eu l'occasion de l'étudier.

Le traité se compose de deux parties, la première de 214 pages et la seconde de 541. Il existe aussi quelques feuillets imprimés jusqu'à la page 158. Ce furent probablement d'une part les événements politiques et d'autre part la mort précoce de Condorcet, qui empêchèrent l'achèvement de l'impression du -traité-.

Condorcet se proposait de diviser cet ouvrage en cinq parties; nous trouvons à la page I du manuscrit : "L'oeuvre sera divisée en cinq parties, dans la première, je traiterai de la nature des fonctions analytiques, de leur différentiation, de la manière de les réduire en séries, de la formation des équations différentielles. Dans la seconde, je donnerai les principes du calcul intégral des différences infiniment petites. Dans la trosième ceux du calcul intégral des différences partielles. Dans la quatrième ceux du calcul intégral des differnces finies. La cinquième enfin contiendra diverses applications du calcul intégral". Le mot "fin" donc, qui se trouve en bas du 2ème volume ne devrait pas nous tromper; le manuscrit ne se compose que des deux premières des cinq parties annoncées.

---

(1) ma communication faite au XIV congrès international d'Hist. des Sciences. Japon 1974: : "l'essai inachevé et inédit de Condorcet sur le calcul intégral".

(2) Surtout il faudrait éviter de confondre le traité du calcul intégral, publié à Paris en 1765, avec le traité du calcul intégral, ouvrage inédit et inachevé.

(3) Marie-Jean Antoine Nicolas Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794) fut secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, et homme d'Etat pendant la révolution française. Doué d'un esprit polyvalent, Condorcet ne limita pas ses recherches au domaine des Sciences mathématiques. Ses recherches historiques, ainsi que ses remarques sur l'histoire de la pensée humaine présentent un très grand intérêt

La première partie de ce traité inédit a comme titre : "Des fonctions analytiques" et sa première section" de la formation des fonctions analytiques".

D'abord l'auteur définit ce qu'est une fonction analytique : "Je suppose, que j'aie un certain nombre de quantités x, y, z ... F, et que pour chaque valeur déterminée de x, y, z ..., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent, je dis que F est une fonction de x,y,z ... ainsi par exemple si $F = x+y+z$ $F' = x + \log yb + \log z$, $F'' = \sqrt{x} + y^{y+z} + \log(x+z^2$, F,F',F'' seront des fonctions de x,y,z . Enfin, si je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en X,Y,Z , ni la forme de l'équation entre F et X,Y,Z je saurais que F est fonction de X,Y,Z ".

A ma connaissance c'est, Condorcet qui le premier emploie en 1778 le terme "fonction analytique". Terme que Lagrange a lancé ultérieurement (1797) en intitulant son fameux ouvrage : "Théorie des fonctions analytiques ..."

Pour Condorcet, l'expression "fonctions analytiques" désignait des fonctions d'une nature arbitraire. En ce qui concerne l'adjectif "analytique" le professeur A. P. Youschkevitch propose l'interprétation suivante qu' "il s'agit de l'étude de fonctions dans le cadre et au moyen des méthodes de l'analyse". (1)

Lagrange a utilisé le même sens de l'expression "fonction analytique" dans son ouvrage de 1797.

---

v. son article "La notion de fonction chez Condorcet" For Dirk. Struk. p.131-139 1974, Dordrecht - Holland, Boston USA.

Condorcet a étudié à coup sûr, le mémoire de Berlin de 1772 (1). La méthode lagrangienne qui y figure sur le développement taylorien a été reprise par Condorcet dans son traité inédit et inachevé.

Dans la seconde section "De la différentiation des Fonctions analytiques", Condorcet poursuit les traces Lagrangiennes.

"Soit F une fonction de trois quantités x,y,z, F' est ce que devient F lorsque x devient x', y devient y', z devient z'. Alors

$$
\begin{array}{llll}
x' = x + \Delta x & , & & \Delta x = x' - x \\
y' = y + \Delta y & , & & \Delta y = y' - y \\
z = z + \Delta y & & & \Delta z = z' - z
\end{array}
$$

Donc Δx est la différence entre les deux quantités x et x' où bien $F' = F + \Delta F$, $\Delta F = F' - F$
où F fonction de x,y,z
F fonction de x',y',z'.

---

(1) Condorcet -depuis qu'il a présenté son premier ouvrage sur le calcul intégral à l'Académie des Sciences de Paris en 1765- a été reçu avec enthousiasme par les savants de l'époque. Notamment Lagrange écrivait à d'Alembert le 6.7.1765 "Le calcul intégral de Condorcet m'a paru bien digne des éloges dont vous l'avez honoré".
Le volume de l'Ac. des Sciences de 1772 renferme le mémoire dans lequel l'esprit inventif de Condorcet s'est manifesté avec le plus d'éclat. On a le jugement de Lagrange : "Le mémoire est rempli d'idées sublimes et fécondes qui auraient pu fournir la matière de plusieurs ouvrages ... Le dernier article m'a singulièrement plu par son élégance et par sa fertilité ... Les idées récurrentes avaient déjà été si souvent traitées, qu'on eût dit cette matière épuisée. Cependant voilà une nouvelle application de ces séries, plus importante à mon avis, qu'aucune de celles qu'on a déjà faites. Elle nous ouvre pour ainsi dire, un nouveau champ pour la perfection du calcul intégral".

D'Alembert en mars 1772 écrivait à Lagrange : "Je voudrais bien que notre ami Condorcet qui a de la sagacité et du génie eût une autre manière ... il est dans la nature de son esprit de travailler dans ce genre".

Les quantités x,y,z et F qu'on suppose avoir changé de valeurs, s'appellent changeantes ou variables, les quantités qui entrent dans la valeur de F et qui restent les mêmes lorsque x,y,z et F changent de valeurs sont appelées constantes. Les équations qui contiennent les différences de F, de x, de y, de z, s'appellent équations différentielles (1) et l'équation en F,x,y,z qui a servi à les produire par rapport à ces équations différentielles s'appelle équation intégrale

"De même la quantité $\Delta\Delta x$ s'appelle différence seconde de x et par conséquent Δx est la différence première de x "...

"Supposons d'abord que nous ayons F fonction de la seule variable x et que nous cherchions la valeur de F' ou de ΔF ordonnée par rapport à Δx, nous avons

$$F' = F + \Delta F = F + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 + \ldots$$
$$\Delta F = A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 + \ldots$$

et il restera à déterminer les fonctions de x, A, B, C etc."

Pour déterminer A, B, C ... , il calcule de deux manières la valeur de $F(x + \Delta x + \theta x)$: "je suppose que x au lieu de devenir $x + \Delta x$, soit devenu $x + \Delta x + \theta x$, θx (2) étant une quantité quelconque ajoutée à Δx , on aura alors la valeur de $F' = F + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 + \ldots$ Soit $x + \partial x$ au lieu de Δx " ... " Il s'agit maintenant de développer les séries que me donnent ces deux substitutions, en ayant égard seulement à la première puissance de θx , ce qui me suffit puisque égalant alors entre eux les coefficients de chaque puissance de Δx , j'aurai autant d'équations que de coefficients à déterminer" (3)

---

(1) Tandis que les mêmes quantités Lagrange les appelle "fonctions dérivées".

(2) θx est écrit dans le manuscrit, nous ne devons pas le confondre avec le signe de dérivée partielle, c'est tout simplement dx ".

(3) op. cit. p.26 (traité inédit).

Condorcet désigne par $\partial F/\partial x$ (c'est-à-dire dF/dx) le coefficient de θx dans le développement de $F(x + \theta x)$ $\partial A/\partial x$ le coefficient de θx dans le développement de $A(x + \partial x)$ etc. Ainsi après la première substitution il obtient

$$F + A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + \ldots + (\partial F/\partial x + \partial A/\partial x - \Delta x + \partial B/\partial x - \Delta x^2 + \ldots)\partial x$$

avec la seconde subsitution il obtient la série

$$F + A\Delta + B\,Ax^2 + \ldots + (A + 2B\,\Delta x + 3C\,\Delta x^2 + \ldots)\partial x$$

en égalent les coefficients de chaque puissance de Δx (1), il obtient

$$A = \partial F/\partial x, \quad B = \partial A/2\partial x, \quad C = \partial B/3\partial x$$

et finalement $B = \partial A/2\partial x = \partial(\qquad) = \partial\partial F/2\partial x$

$$C = \partial B/3\partial x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi le développement prend la forme suivante :

$$F = F(x + \Delta x) = F(\partial F/\partial x\,\Delta x + \partial^2 F/2\partial x^2\,\Delta x^2 \ldots /+ \partial^m F/2.3\ldots m\partial x^m\,\Delta x^m + \ldots$$

"et par conséquent on connaîtra ses coefficients des différentes puissances de Δx, dans la valeur de F' ordonnée par rapport à Δx pourvu qu'on sache trouver en général A ou $\partial F/\partial x$. Ce théorème qui est d'un usage très utile dans l'Analyse est dû à Taylor (2), (3)

---

(1) voir la phrase précédente note (1)

(2) op. cit. p.28

(3) dans le manuscrit (nous avons dit qu'il existe quelques feuilles imprimées jusqu'à la p.153), Condorcet invoque que "ce théorème est dû à M. d'Halembert"; tandis que dans la partie imprécise il signale que "ce théorème est dû à M. Taylor".

Donc le procédé du développement taylorien figure dans les textes mathématiques de l'époque (1); en plus son procédé ressemble assez à celui de Lagrange.

C'est avec le Traité de Lacroix (2ème éd. Préface. Vol.I p.XXII, Paris 1810) que Condorcet obtient la place qu'il mérite : "l'idée de démontrer en toute rigueur, par l'analyse les principes et les méthodes du calcul différentiel a été mise d'abord à l'exécution par Condorcet !...

Plus tard encore - en 1826 - Lacroix (2) revient sur Condorcet et il écrit : "L'exposition des principes du calcul différentiel, contenue toute entière dans les feuilles imprimées, étant indépendante de toute notion d'infiniment peitss et de limites, aurait paru nouvelle lors de l'impression, puisqu'on ne connaissait encore sur ce sujet qu'un mémoire de Lagrange inséré dans le volume de l'académie de Berlin pour l'année 1772. Mais en s'attachant à former le développement entier des différences finies des fonctions, sans supposer aucune différence constante, M. de Condorcet a été conduit à des calculs assez compliqués, tandis que Lagrange a suivi une marche beaucoup plus simple dans la Théorie des fonctions analytiques et ses leçons sur le calcul des fonctions, ouvrages qu'il a publiés depuis pour étendre et appliquer les principes indiqués dans son mémoire" (3).

---

(1) Nous devons noter qu'à l'époque de Condorecet, de Lagrange etc. on croyait que toute fonction "analytique" admet un développement en série de Taylor. La rigueur de l'Analyse commence avec Weierstrass. Pour plus de détails voir l'article de P. Dugac : "Eléments d'Analyse de Karl Weierstrass". Arch. for History of Exact Sciences vo. 10 n°1/2 1973 p.41-176.

(2) Pour le rôle de Lacroix voir l'article de R. Tatou : "Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) mathématicien professeur et historien des Sciences". Actes du 7ème congrès interne d'Histoire des Sciences. Jérusalem 1953 p.588-593.

(3) Cette notice de Lacroix est jointe au premier volume du manuscrit consacré à la Bibl. de l'Inst. de France, M.S. 877.

Le prix de l'Académie de Berlin

Après le mémoire de 1772, Lagrange ne publie rien de relatif à ce sujet; toutefois il n'a pas cessé de réfléchir sur les fondements de l'Analyse. C'est probablement à son initiative qu'on doit le concours organisé par l'Académie de Sciences de Berlin dont il fut le président (1) pendant 20 ans. (1766-1786).

Ainsi en 1784, l'Académie propose un prix "pour une théorie ... de l'infini mathématique".

La doctrine de Newton, comme celle de D'Alembert n'ont pas pu fournir les fondements solides pour établir une théorie sur le calcul infinitésimal. Donc les savants de l'époque ont bien "senti" l'insuffisance des méthodes et des principes. La Science mathématique avait besoin des "idées directrices" qui l'amèneront à son renouveau.

Les académiciens qui connaissaient bien toutes les difficultés et la délicatesse du problème ont demandé au monde scientifique de l'époque de concourir afin de résoudre la question.

Parmi les scientifiques qui ont contribué à ce concours nous devons souligner la présence de Lazare Carnot. Le Professeur A.P.Y. Douschekevitch a pu, il y a cinq ans, déchiffrer aux Archives de l'Académie de Berlin, le mémoire qui appartenait à L. Carnot. Ce travail n'est que la première rédaction de l'ouvrage qu'il a publié en 1797. Il s'agit évidemment de l'oeuvre : Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal" (2).

Unaniment le prix a été décerné en 1786 à Simon L'Huilier

---

(1) voir aussi le livre Carl B. Boyer : "The History of the calculus aund its conceptual Development". Dover 1949 p.54-55

(2) Nous devons noter qu'en 1813 paru à Paris une seconde édition. La première édition fut traduite en anglais par W. Dickson dans le Philosophical Magazine VIII 1800 222-40. 335-52. IX (1801) p.39-56. Aussi l'oeuvre a été traduite en portugais (Lisbonne 1798), en allemand (Franckfürt a.M. 1800) et en italien (Padova1803).

(3) "Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs" qui a remporté le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres pour l'année 1786. Berlin 1787. Le même mémoire fut publié aussi en latin en 1795.

Mais l'attribution du prix (1) ne signifie point l'acceptation totale de la théorie "car l'Académie considère qu'elle n'a pas reçu une réponse complète"(2).

L'Huilier "a établi" l'Analyse sur l'expression verbale de limite (3),(4). En plus il utilise souvent le développement des fonctions en séries infinies - domaine où Lagrange se sent si familier et directement concerné. Pourtant L'Huilier n'a pas fait de la série infinie l'outil principal de sa théorie et cela n'a pas pu enthousiasmer Lagrange.

Comme résumé de cet événement concernant le concours de l'Académie de Berlin, nous pouvons alors répondre que le but : la recherche et la conclusion du problème relatif à l'infini mathématique n'a pas été atteinte.

Lagrange a-t-il abandonné sa réflexion sur les fondements de l'Analyse mathématique ? Nous ne pouvons pas répondre par l'affirmative. Mais nous ne pouvons pas passer sous silence deux hypothèses majeures :
Comme résumé de cet événement concernant le concours de l'Académie de Berlin, nous pouvons alors répondre que le but : la recherche et la conclusion du problème relatif à l'infini mathématique n'a pas été atteinte.

Lagrange a-t-il abandonné sa réflexion sur les fondements de l'Analyse mathématique ? Nous ne pouvons pas passer sous silence deux hypothèses majeures :

Lagrange en tant que président de l'Académie de Berlin ne pouvait pas participer au concours.

L'insuccès du concours a probablement fait retourner l'esprit lagrangien à ses "anciennes idées".

L'occasion de revenir à ses "anciennes idées" lui a été fournie, dix ans après le concours, par son enseignement à l'Ecole Polytehnique.

---

(1) "Exposition élémentaire des proincipes des calculs supérieurs" pour servir de réponse à la demande d'une théorie claire et précise de l'infini mathématique.qui a remporté le prix proposé par l'Ac. Royale des Sciences et Belles Lettres pour l'année 1786. Berlin.

(2) voir Histoire de l'Académie pour l'année 1786 p.8.

(3) "Soit une quantité variable, toujoiurs plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle : cette quantité constante est dite la limite en grandeur ou en petitesse de la quantité variable". op. cit. p.7.

(4) Pour plus de détails v. l'article de E.C. Chatynova : "La théorie des limites de Simon Huilier" istoriko - matematitcheski isledovania. Moscou 1966. vol. 17. p.325-331 (en russe).

Arbogast et son mémoire inédit

Comme nous l'avons vu, le mémoire langragien de Berlin de 1772, est passé presque inaperçu parmi les scientifiques de l'époque. Sa richesse, et ses nouvelles méthodes, ainsi que la voie qu'il ouvrait n'ont influencé pratiquement personne. Aucun des maîtres de la science n'a pu soupçonner la mine inépuisable que représentait ce mémoire.

Arbogast (1759-1803), mathématicien autodidacte, a lu le mémoire de Berlin (1) et il a bien senti les possibilités de renouvellement de l'Analyse. Ainsi il a apprécié le nouveau calcul qui dégage et libère l'Analyse infinitésimale de toutes notions obscures et nuisibles.

Le silence et l'indifférence qui ont suivi le mémoire de 1772, ainsi que "l'insuccès" du concours de l'Académie de Berlin (1784) ont détourné l'intérêt de Lagrange pour ce domaine de recherche. Dix-sept ans après son mémoire et cinq ans après le concours de Berlin, Lagrange dans le mémoire d'Arbogast - professeur de mathématiques au Collège de Colmar et à l'Ecole Militaire de Strasbourg - a constaté :

i) l'écho de sa théorie qu'il croyait oubliée et

ii) la force que sa théorie renferme quand il a vu que dans les mains d'Arbogast elle est devenue une théorie autonome qui englobe ses idées et même les prolonge.

Revenons au mémoire de 1789 (2).

Arbogast présente à l'Académie des Sciences de Paris en 1789, son mémoire : "Essai sur des nouveaux principes de calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits et celle des limites" (3).

---

(1) il se réfère d'ailleurs à plusieurs reprises; au mémoire de 1789 et au "calcul des dérivations". Strasbourg 1800.

(2) v. ma communication sur le manuscrit inédit d'Arbogast : "Sur un mémoired'Arbogast relatif aux principes du calcul infinitésimal" 32ème congrès de l'A.F.A.S. Saint-Etienne 1973. Actes du congrès p. 1-10.

(3) le titre de "la théorie des fonctions analytiques..." ressemble au titre de ce mémoire". Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies".

Lagrange a connu ce mémoire (1) car avec Legendre il fut nommé commissaire (2). En outre dans la première édition de sa théorie des fonctions analytiques ... il mentionne "ce beau mémoire" (3). Par contre dans la seconde édition il le traite d'une manière indifférente.
Dès ses premières lignes, Arbogast signale son but et ses intentions :

"Mon dessein est de proposer une autre théorie ... elle porte sur les idées les plus simples et me paraît répondre sur les calculs supérieurs la même évidence qui règne dans l'algèbre ordinaire" (4).

Il définit le quotient différentiel "comme les termes successifs de la série qui exprime la différence finie d'une fonction d'une ou de plusieurs variables, la série étant ordonnée suivant les puissances des différences Δx, Δy etc. de ces variables" c-à-d il définit le quotient différentiel comme le coefficent de Δx dans le développement de la série de puissance de $\phi(x + \Delta x)$.

De cette façon il montre "la liaison qui unit le calcul différentiel à la méthode générale des séries et fait voir qu'il n'en est qu'un cas particulier" (5).

Mais cette phrase nous amène naturellement au mémoire de 1772 avec lequel Arbogast en 1800 ne cache pas sa filiation.

"Si y est une fonction quelconque de x et qu'on y fasse augmenter x de Δx, on pourra toujours exprimer ce que devient y par cette augmention par une série qui procède suivant les puissances entière de Δx ".

---

(1) Nous avons pu étudier ce "manuscrit" sur un microfilm. Le manuscrit se trouve à la Bibliothèque Medicea-Laurenziana (Florence).

(2) Dans les procès verbaux de l'Académie manque le rapport des commissaires.

(3) op. cit. p. 5

(4) nous devons souligner qu'à l'époque c'est seulement l'algèbre qui possédait des fondements rigoureux.

(5) cette même phrase figure aussi dans un calcul des dérivations v. op. cit. (préface).

Arbogast en 1789 non seulement établit cette propositoin nouvelle mais il essaie de la démontrer.

Sa démonstration est basée sur le fait qu'on peut écrire toute fonction y de la manière suivante : (1)

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots \qquad (1)$$

α, β, γ ... sont des nombres réels et A, B, C ... sont des quantités constantes.
"Quand x augmente d'une quantité quelconque Δx, alors la série prendra la forme suivante" :

$$(1) \qquad y + \Delta y = A(x + \Delta x)^{\alpha} + B(x + \Delta x)^{\beta} + \dots$$

Par le théorème du binôme, Arbogast développe les binômes $(x + \Delta x)^{\alpha}$, $(x + \Delta x)^{\beta}$, $(x + \Delta x)^{\gamma}$...

$$y + \Delta y = \underbrace{\begin{matrix} A\,x^{\alpha} \\ + B\,x^{\beta} \\ + C\,x^{\gamma} \\ \dots \end{matrix}}_{p} + \left.\underbrace{\begin{matrix} A\;ax^{\alpha-1} \\ + B\;bx^{\beta-1} \\ + C\;\gamma x^{\gamma-1} \end{matrix}}_{q}\right\} \Delta x + \left.\underbrace{\begin{matrix} A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \\ + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} \\ + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} \end{matrix}}_{r}\right\} \frac{(\Delta x)^2}{1.2} + \dots$$

$$y + \Delta y = y + p\,\Delta x + \frac{1}{1.2}\,q\,\Delta x^2 + \dots\dots\dots \qquad (2)$$

Ainsi p dérive de y , r dérive de q, ils dérivent tous les uns des autres de la même manière et suivant le même procédé que le coefficient de Δx dérive de la fonction y " (2). Nous devons noter que la démonstration est identique avec celle de Lagrange pour les coefficients de la série de Taylor.

Arbogast considère qu'il a démontré que chaque fonction doit être développée en série de puissances. Grâce à cette tentative d'Arbogast, Lagrange a été probablement convaincu qu'une démonstration du théorème "chaque fonction admet un développement en série de Taylor" est indispensable

---

(1) cette hypothèse remonte à Euler v. Introduction in Analysin Infinitorum. Néanmoins nous devons noter que chez Euler la variable est z (au lieu de x chez Arbogast et le concept de mot fonction est synonyme avec le terme "l'expression analytique". v. mon article : "Le développement du concept de fonction "Séminaire de Philosophie et des Mathématiques - Paris 1974 p.1-24.

(2) v. mon article "sur un mémoire d'Arbogast relatif aux principes du calcul infinitésimal" 32ème congrès de l'A.F.A.S. St-Etienne 1973 (p.1-10).

Par la formule (2) Arbogast définit : la quantité $p(\Delta x)$ comme le premier différentiel de y, dy la quanité $q(\Delta x)^2$ comme le second différentiel de y, dy^2 alors il substitue dx à Δx

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} dy = pdx \\ d^2y = qdx^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$(2) \quad \rightsquigarrow \quad y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}(\Delta x)^2 + \ldots \qquad (3)$$

Par cette formule "comme la proposition de Taylor" (i) , Arbogast est conduit à formuler les règles qui donnent les différentielles des différentes fonctions, de sommes, de produits etc.

Ainsi, Arbogast pour fonder le calcul suit les traces de Leibniz et d'Euler, en utilisant comme concept fondamental la différentielle (1).

Voilà encore une proposition d'Arbogast (2) qui a influencé Lagrange comme nous allons le voir : "comme dans la série (3), nous sommes maîtres de prendre la différence Δx aussi petite que nous voudrons, on pourra toujours la prendre telle que la suite soit convergente. Il est même évident que chacun des termes affectés de Δx sera plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent, si l'on prend Δx tel que chaque terme $\frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n y \, \Delta x^n}{dx^n}$ soit plus grand que le double du terme suivant $\frac{1}{1.2 \ldots (u+1)} \frac{d^{u+1} y \, \Delta x^{u+1}}{dx^{u+1}}$, ce qui est toujours possible" (3)

(i) dans l'ouvrage de Brook Taylor "Methodus incrementorum directa et inversa" Londini 1715, à la page 21 S op. VII cor III figure la formation de la série qui désormais porte son nom. Pour plus de détails sur la série de Taylor v. l'article de A. Pringsheim : "Zur Geschichte des aylorschen Lehzsatzes" Bibl. Mathem. 3 Folye Leipzig 1900 p. 433-479.
Cependant l'énoncé de son théorème se trouve pour la première fois dans une lettre (26-7-1712) adressée à John Machin.

(2) Par contre, Lagrange se base sur le concept de la dérivée.

(3) Pour Arbogast v. la thèse de Karl Zimmermann : "Arbogast als Mathematiter une Historiker der Mathematik" Heidelberg 1934.

(3) voir mon article sur Arbogast.

Arbogast a utilisé les idées du mémoire de 1772, plus les techniques algébriques pour manipuler séries et inégalités, et il a présenté son propre point de vue.

Lagrange a "vu" l'écho de ses idées et il les reprend.

Cependant nous ne devons pas passer sous silence l'école combinatoire allemande, avec son principal représentant Hindenbourg. (Karl, Friedrich 1741-1808) (1).
"La technique" de la combinatoire était assez répandue en Allemagne dès l'époque de Leibniz (2) ; ainsi le sol était assez fertile pour recevoir les procédés liés avec le développement en séries de puissances.

Néanmoins l'école allemande n'est pas directement "liée" avec l'étude des séries des puissances; son but était beaucoup plus vaste et ambitieux : faire les opérations combinatoires aussi importantes que l'algèbre, l'analyse etc. Cela se réalise avec le livre de Hindenbourg (3).

Le théorème de Taylor, permet à Hindenbourg de trouver que le développement taylorien est l'outil efficace pour fournir des théorèmes concernant les combinaisons et les permutations en égalant le nième terme du coefficent au développement du binôme de la même fonction. L'influence de l'école est apparue plus tard surtout dans les recherches de Christoph Gudermann (4) maître de Weierstrass.

Donc, nous pouvons dire en résumé que le mémoire de Berlin (1772) avait eu quand même des répercussioins. Condorcet, Arbogast et l'école combinatoire allemande ont subi l'influence du procédé taylorien.

---

(1) v. S.I.C. Weingartner : "Lehrbuch der Kombinatorischen Analysis nach der Theorie des Herrn Professor Hinderburg aus carbeitet. 2 vol. Leipzig 1800-1801

(2) v. E. Netto "Kombinatorik" Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 4 Vol. M. Cantor. Leipzig B.G. Tenbner 1908. p. 20 - 21.

(3) "Der polynomische Lehzsatz, das wichtigste Theorem der gauzen Analysis nebst einigen verwandten und anderen Sätzen". Leipzig 1796.
Beaucoup plus tard "la même idée" figure dans l'oeuvre de Wronski et de Bolzano.

(4) v. l'article de P. Dagac : "Eléments d'Analyse de Karl Weierstrass" Archive for History of Exact Sciences vol. 10 N° 1/2 9373 p. 41-176.

La théorie des fonctions analytiques (1797)

Après tant d'années (1) Lagrange revient à ses idées de jeunesse, entièrement persuadé que la seule base rigoureuse du calcul est l'Algèbre (2).

Pour la première fois un livre consacré à l'Analyse infinitésimale suit un processus basé sur des outils algébriques; la "morphologie" du livre est tout à fait uniforme et homogène.

L'édition de 1797 (3) reflète le caractère "pressé de l'ouvrage. Lagrange déclare qu'il l'écrivit "comme d'un seul jet, à mesure qu'il s'imprimait" (4). L'ouvrage manque de préface, et de chapîtres. Nous devons souligner toutefois qu'un bref aperçu historique du calcul, marquant que les méthodes précédentes n'étaient pas assez efficaces pour fonder le calcul, équivaut à une introduction.

---

(1) Rappelons que "la première publication" de Lagrange est de 1754. Il vient à Paris en 1786 après la mort de Frédéric le Grand, et pendant une longue période il ne fait pas de mathématiques. Delambre explique ce "repos philosophique" par le fait que Lagrange se mit "au service de la Révolution".
Delambre p. XXXIX "Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel (Paris de l'imprimerie impériale 1810).

(2) L'algèbre du 18ème était capable de fournir le cadre convenable pour fonder l'Analyse. "La théorie des fonctions que je me propose d'exposer cette année ... a pour objet de faire disparaitre les difficultés qui se rencontrent dans les principes du calcul différentiel et qui arrêtent la plupart de ceux qui entreprennent de l'étudier en liant immédiatement ce calcul à l'algèbre, dont il a fait jusqu'ici une science séparée"... J.L. Lagrange. Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques (Journal de l'Ecole Polyt. VIe cah. p. 232.

(3) l'ouvrage a paru en 1797, puis en 1813 et il a été ensuite traduit en allemand, portugais, anglais etc. pour plus de détails v. l'article de R. Taton : "L'inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange "Rev. d'Hist. des Sciences 1974, XXVII p. 1-36.

(4) op. cit. 2ème ed. p.13

Puisque aucune méthode n'est "claire et précise", Larange considère (1) que les fondements du calcul peuvent être basés sur l'algèbre des séries de puissances; et il s'efforce de démontrer que f'(x) a les propriétés du quotient différentiel.

Lagrange commence avec le développement (2)(3)

$$f(x + i) = f(x) + ip + i^2q + i^3r + \ldots$$

où p, q, r ... sont des fonctions de x. Il écrit $p = f'(x)$ et il le définit comme la première fonction dérivée de f(x). De la même façon, il définit f''(x) comme la première dérivée de f'(x), f'''(x) la première dérivée de f''(x) etc.

Ayant ces "définitions" comme outils, il démontre par le théorème de Taylor que : $q = f''(x)/2!$, $r = f'''(x)/3!$.

Le but de Lagrange est de démontrer maintenant que la dérivée ainsi définie a les propriétés du quotient différentiel df(x)/dx (4).

Un effort direct - de démontrer l'équivalence - conduira sans doute Lagrange aux mêmes difficultés métaphysiques qu'il a tant essayé d'éviter. Mais chaque formule qui contient f'(x) pourra "proposer" une formule analogue pour le quotient différentiel.

La proposition que df(x)/dx pourra être identifié avec le coefficient p de la série de puissances rappelle vivement son ancienne idée de 1772 (5). Mais dans son ouveau travail, il va plus loin. Des définitions fondamentales il déduit presque tout le résultat du calcul.

---

(1) il se réfère à son mémoire de Berlin : "... je démontrai par cette théorie le Théorème de Tailor *, quo'n peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites". op. cit. p.5 (* c'est l'orthographe du texte).

(2) à l'époque de Lagrange, on n'utilisait pas les parenthèses, ainsi il écrit "considérons une foncton fx d'une variable quelconque x " op. cit. p.3

(3) nous ne devons pas confondre i, entre initiale du mot incrementum, avec les i, signe des imaginaires. Lagrange utilise les mêmes lettres qu'il a utilisées dans le mémoire de Berlin.

(4) une fois encore nous signalons que Lagrange ne faisait pas usage de parenthèses.

(5) v. le mémoire de Berlin.

Lagrange nomme les fonctions, fonctions simples analytiques (1) (2) d'une variable et conclut que toutes les autres proviennent à partir d'elles par : addition, soustraction, multiplication et divison (3).

Nous présentons un exemple caractéristique :

$$y = ap/q \qquad (4)$$

où p,q sont des fonctions de x et a est une constante.

En remplaçant x par x + i
"la quantité p/q deviendra p + ip'+ etc/qq + iq' + etc .

Développant le dénominateur en série par des règles connues, on aura ... $= p/q + i\,(p'/p - q'p/q^2) +$ etc

Donc $y' = ap'/q - apq'/q^2$ " (5)

A part la "structure homogène" qui caractérise la théorie des fonctions analytiques il nous faut souligner parmi les résultats importants celui du reste de la série de Taylor.

Tout d'abord nous devons commencer par le théorème qui a été déjà établi par Arbogast (6) : Dans une série infinie pour $f(x+i) = fx + ip + i^2q + \ldots$, il existe un i pour lequel ip (ou un autre terme) ne dépasse pas la somme du reste des termes de la série.

---

(1) v. la note où le Prof. A.P. Vouschkevitch explique le sens de l'adjectif "analytique".

(2) Lagrange op. cit. p.28 .

(3) "Les fonctions x^m, a^x, lx, sin x et cos x que nous venons de considérer, peuvent être regardées comme les fonctions simples analytiques d'une seule variable. Toutes les autres fonctions de x se composent de celle-là par addition, soustraction,multiplication ou division, ou sont données en général par des équations dans lesquelles entrent des fonctions de ces mêmes formes" ib. p.28 .

(4) ib. p.29

(5) op. cit. p. 29

(6) v. le mémoire d'Arbogast de 1787.

Ce théorème a été utilisé dans la 1ère édition (1) de la théorie des fonctions analytiques afin de démontrer le lemme suivant : "Si une fonction prime de z, telle que f'z est toujours positive pour toutes les valeurs de z, depuis z = a jusqu'à z = b, b étant > a, la différence des fonctons primitives qui répondent à ces deux valeurs de z, à savoir, f(b) - f(a) sera nécessairement une quantité positive" (2).

C'est ce lemme qu'il utilise pour obtenir le reste qui désormais porte son nom.

Analysons de près quelques remarques de Lagrange, qui conduisent à la démonstration du théorème susdit et qui soulignent l'importance maximale qu'a pour le calcul le concept moderne de la continuité.

Mais auparavant, revenons la "démonstration" que chaque fonction (3) admet un développement en série de Taylor.

Lagrange affirme que le calcul différentiel "porte expressement sur cette même supposition, et les cas qui font exception sont précisément ceux où ce calcul a été accusé d'être en défaut (4).

Dans la nouvelle forme de la fonction fx , f(x + i), Lagrange exclut les puissances fractionnaires de i "... les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive fx, et il est clair en même temps que la substitution de x + i, au lieu de x, ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre ce ces radicaux ni en changer la nature, tant que x et i sont des quantités indéterminées" (5) (6).

---

(1) "... dans la série $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ qui naît du développement de $f(x + i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i".

(2) op. cit. p. 45; c'est-à-dire si la dérivée f', d'une fonction f est toujours positive sur l'intervalle $[a,b]$ alors $f(a) \leq f(b)$.

(3) une fois encore nous devons rappeler que le sens du mot fonction est synonyme du terme "expression analytique".

(4) op. cit. p.7

(5) ib. p. (7)

(6) c'est-à-dire puisque $fx^{m/n}$ devient $f(x+i)^{m/n}$ il s'en suit que nous avons toujours la nième racine d'une quantité irrationnelle.

"... on sait par la théorie des équations que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire des combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme" (1), (2), (3).

Alors "si le développement de la fonction $f(x + i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{m/n}$ la fonction fx serait nécessairement irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x + i)$, ainsi que pour son développement.

Mais ce développement étant représenté par la série $fx+pi+qi^2+ \ldots$ etc $+ui^{m/n}$ + etc., chaque valeur de fx de combinerait avec chacune des n valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x + i)$ développée aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde". (4)

Lagrange déclare alors, que si la fonction fx a valeurs (pour x quelconque), il est bien évident qu'avec la substitution $x + i$, le nombre de valeurs sera intact.

Mais le développement $fx + pi + q^2 + \ldots + ui^{m/n} + \ldots$ a $\mu + n$ valeurs, donc "la fonction développée a plus de valeurs que la même non développée." (5)

Ayant "démontré" que toute fonction admet son développement en série de Taylor (6), Lagrange poursuit ses recherches et il examine "en quoi ce développement consiste, et ce que signifie chacun de ses termes" (7).

---

(1) ib. p. 7

(2) la phrase "par la théorie des équations" nous devons "la traduire" par "le théorème.

(3) v. aussi Euler Introduction ... Section 15.

(4) ib. p. 7-8.

(5) ib. p. 8

(6) op. cit. p. 7. C'est l'esprit algébrique du grand mathématicien - basé sur 'influence eulérienne - qui le conduit à ce genre de "démonstration". Lagrange remarque que "cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne que je sache, n'a cherché à la démontrer a priori; ib. p. 7.

(7) ib. p. 8.

Donc dans l'expression $f(x + i)$ (1), "si on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, il n'y a qu'à faire $i = o$, ce qui la réduit à fx. Ainsi fx est la partie de $f(x + i)$, qui reste lorsque la quantité i devient nulle, de sorte que $f(x + i)$ sera égale à fx, plus une quantité qui doit disparaître en faisant $i = o$, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée mulitpliée par une puissance positive de i : et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x + i)$, il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i; elle sera donc de la forme iP, P étant une fonction de x et i, qui ne deviendra point infinie lorsque $i = o$ " (2).

Nous allons essayer de "déchiffrer" la démonstration lagrangienne. Puisque pour $i = o$, $f(x + i)$ devient fx, Lagrange considère que $f(x+i)=f(x)+iP$ où fx est indépendante de i.

En plus, après avoir démontré "qu'il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i "(3), la quantité (4) ne pourra être qu'entière et positive.

De cette façon Lagrange paraît supposer que la seule chose qu'on connaît est que un tel P existe car il a "démontré" que $f(x + i)$ admet un développement en séries des puissances.

Plus précisément il note :

"On aura donc ainsi $f(x + i) = fx + iP$ (5) donc $f(x + i) - fx = iP$, et par conséquent divisible par i ; la division faite, on aura $P = f(x+i)-fx/i$ " (6)(7).

Suivant le même chemin, Lagrange présente la définiton de Q,R ... respectivement par les équations $P = p + iQ$, $Q = q + i R$ ... où p,q sont "fonctions de x sans i "(7) c'est-à-dire indépendantes de i et iQ , iR sont "la partie de P qui devient nulle lorsque $i = o$, et Q étant une nouvelle fonction de x et i ..."(8) ; c'est-à-dire parties dépendantes de i.

---

(1) Lagrange considère $f(x + i)$ comme $f(x) + f(i)$; la seconde dépendante de i, et la première indépendante.

(2) ib. p.8

(3) ib. p.7

(4) c'est-à-dire dans le développement $fx + pi + qi^2 + ... + ui^a + ...$, Lagrange parle de l'exponent "in absentia" sans le noter.

(5) rappelons que P est une fonction de x et i.

(6) ib. p.8

(7) il ne donne aucune explication pour le cas $i = o$, car quand $i = o$ P devient à la fois P, c'est-à-dire fx, par sa définiton et dfx/dx.

(8) ib. p.8

(9) ib.p.8-9

Revenons à la démonstration lagrangienne (1). Comme nous l'avons présenté, plus haut, "P étant une nouvelle fonction de x et i ... ne s'évanouit pas quand i devient nul"(2). C'est-à-dire $P \neq 0$ quand $i = 0$, $Q \neq 0$ quand $i = 0$, $Q \neq 0$ quand $i = o$ etc. Mais iP, iQ ... puisque ce "sont des fonctions de i qui deviennent nulles, par la nature même du développement lorsque $i = 0$ " (3).

C'est-à-dire que les restes iP, iQ, iR des formules $f(x + i) = f(x) + iP$ $P = P + iQ$, $Q = q + iR$, ... deviennent nuls.

Après cela Lagrange formule sa "propre définition rigoureuse de la continuité " :

"... En considérant la courbe dont i serait l'abscisse, et l'une de ces foncitons l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses; et à moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour les valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec peu de réflexion et par un raisonnement analogue à celui du n°10 ci-dessus, le cours de la courbe sera nécessairement continue depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée; et alors toute valeur plus petite que i répondra aussi à des ordonnées moindres que la quanité donnée". (4), (5), (6), (7)

---

(1) Il s'agit du théorème que nous avons présenté au paravant. "... dans la série $fx+pi+qi^2+ri^3+$...etc qui naît du développement de $f(x+i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour q'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i". ib p.11-12.

(2) ib p.8

(3) p.12

(4) ib p.12

(5) "... l'une de ces fonctions" signifie l'une des fonctions iP, iQ ...

(6) la dernière phrase "et alors toute valeur ... quantité donnée" renferme la définition moderne de la continuité.

(7) En ce qui concerne le raisonnement ... du n°10, c'est le raisonnement qui lui permet d'affirmer "la démonstration" du théorème que toute fonction admet un développement en série de Taylor.

Nous devons remarquer que cette définition lagarngienne de la continuité, nous surprend. Lagrange doué d'un esprit algébrique présente une interprétation géométrique de la continuité, qui plusieurs années plus tard a été formulée par Bolzano et Cauchy (1).

Lagrange déduit que : ..."on pourra donc prendre i assez petit, sans être nul, pour que iP soit moindre que fx ou pour que iQ soit mondre que P, ou pour que iR soit moindre que Q ..., et par conséquent pour que i^2R soit mondre que ip, ou que i^3R soit moindre que i^2Q etc.; donc puisque $iP = iP + i^2Q + i^3R + etc$ $i^2Q = i^2Q + i^3 + etc ...$ $i^3R = i3R + etc$, il s'ensuit qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que chaque terme de la série $fx + iP + i^2Q + i^3R + etc$ devienne plus grand que la somme de tous les termes suivants, et alors toute valeur de i pous petite que celle-là satisfera toujours (2) à la même condition" (3).

Lagrange a senti que cette propriété de P joue un rôle principal dans son calcul, et il souligne qu'"on doit regarder ce théorème comme un des principes fondamentaux de la théorie que nous nous proposons de développer : on le suppose tacitement dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions et c'est en cet endroit qu'on peut dir que ces calculs donnent le plus de prise sur eux, surtout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques" (4) il et bien dommage que, vu le caractère natif (5) de l'ouvrage Lagrange n'ait pas avancé sa rechreche et éclairci ce point.

---

(1) voir mon article "sur le concept continuité chez Lagrange" (à paraître).

(2) en ce qui concerne le mot "toujours" évidemment aujourd'hui nous savons par la théorie des séries de puissances que cela n'est pas toujours effectif. Lagrange ne s'intéressa pas à cette difficulté "tout cela" ne le gêne point dans son calcul.

(3) ib p.12.

(4) ib p.12.

(5) Lagrange l'a bien senti; dans ses cours à l'Ecole Polythechnique en 1798 c'est-à-dire un an après la publication de l'ouvrage, il essaye de combler les lacunes. Pour plus de détails voir ma communication à l'Université Libre de Bruxelles : "A propos de notes manuscrites prises en 1798 par un élève de J. L. Lagrange à l'Ecole Polytechnique". 34ème Congrès de l'A.F.A.S. Bruxelles 1975 du Congrès - p.1-10.

Le reste lagrangien est sûrement le résultat le plus connu de la théorie des fonctions analytiques.

Lagrange utilise le reste, pour justifier ses méthodes, pour trouver tangentes, aires, volumes et pour appliquer le calcul à la mécanique.

Dans l'ouvrage existent deux sortes de restes de la série taylorienne.

1. Le premier a la forme de "l'intégrale" mais Lagrange ne l'a pas présentée ainsi (1)(2)

2. La seconde forme du reste est: qu'on nomme le reste lagrangien. L'expression $i^n/n!\ f^n(x+j)$ quand

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + i^2/2!\, f''(x) + \ldots + i^n/n!\, f^{(n)}(x+j) \quad (3)$$

Suivons de près la méthode lagrangienne :

Il reprend la formule $f(x+i) = fx + if'(x) + i^2/2!\, f''(x) + i^3/2.3\, f'''x + \ldots$, puisque x et i sont deux quantités indéterminées, on y peut substituer $x-i$ à la place de x " (4) ainsi il obtient

$fx = f(x-i) + if'(x-i) + i^2/2\, f''(x-i) + \ldots$ où en mettant xz à la place de i, il présente la formule :

$$fx = f(x-xz) + xz\, f'(x-xz) + x^2z^2/2\, f''(x-xz) + \ldots \quad (5).$$

---

(1) C'est Lacroix qui présente pour la première fois la forme de l'intégrale - voir Traité du calcul différentiel et intégral - vol. III. Traité des différences et des séries p. 397-399.

(2) Nous devons souligner que Lagrange n'utilise pas la notation de l'intégrale. Probablement le motif de ce fait se trouve dans la notation (le signe) même de l'intégrale; l'intégrale était inséparablement liée à la théorie leibnizienne, puisque l'intégrale n'était que l'inverse de la différentation. Lagrange a voulu fonder sa théorie sous une forme indépendante et autonome; d'ailleurs le titre complet de l'ouvrage signale son but.

(3) ou évidemment $o < j < i$

(4) ib p.41

(5) "où z est une quantité arbitraire quelconque.

Nous constatons -en langage moderne- que Lagrange développe la fonction $f(x - xz)$ en puissances de xz.

Lagrange, à sa propre manière, calculé le reste :

"...Supposns qu'on veuille s'arrêter au premier terme $f(x - xz)$. Comme tous les termes suivants sont multipliés par x nous supposerons

$f(x) = f(x - xz) + xP$. " (1) , (I) où P étant fonction de z, $p = 0$ quand $z = 0$.

donc $f(x - xz) = fx$.

Ensuite il prend "les fonctions primes" relativement à cette variable, c'est-à-dire il considère les dérivées de z, alors la formule (I) nous avons "$0 = -x\, f'(x - xz) + xP'$ P' étant la fonction prime relativement à z ; d'où l'on tire $P' = f'(x -) xz)$" (2).

De la même façon si

$$fx = f(x - xz) + xz\, f'(x - xz) + x^2Q$$

il obtient $Q' = zf''(x - xz)$ (3).

Si

$$fx = f(x - xz) + xz\, f'(x - xz) + x^2z^2/2\, f''(x - xz) + x^3R$$

il obtient $R' = z^2/2\, f'''(x - xz)$ (4)

Lagrange ne donne pas la formule générale du nième terme (5); mais il se préoccupe de trouver "les limites de ces quantités" (6), c'est-à-dire les bornes du reste de la série taylorienne.

Pour démontrer cela, Lagrange, propose le lemme (7) suivant :

---

(1) ib. p.43

(2) ib. p.43

(3) ib. p.44
note : pour les textes anciens, nous avons adopté l'orthographe de l'époque.

(4) ib. p.44

(5) Dans la seconde édition de sa "Théorie des fonctiosn analytiques..." Lagrange donne comme ex. le calcul du reste des différentes fonctions voir p.74-75.

(6) le mot limites, a pour Lagrange le sens du mot "bornes".

(7) Lagrange le nomme lemme général - ib. p.45.

"Si une fonction prime de z, telle que $f'z$ est toujours positive pour toutes les valeurs de z, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, b étant $> a$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de z à savoir $fb - fa$ sera nécessairement une quantité positive" (1)(2).

Avec ce lemme, Lagrange signale les bornes du reste de la série taylorienne. Caractéristique est la phrase suivante : "à l'aide de ce lemme, on peut trouver des limites en plus et en moins de toute fonction primitive dont on connaît la fonction prime" (3)(4).

"Soit la fonction primitive Fz dont la fonction prime $F'z$ soit exprimée pour $z^m Z$, Z étant une fonction donnée de z. Soit M la plus grande et N la plus petite valeur de Z pour toutes les valeurs de z comprises entre les quantités a et b, en regardant comme les plus grandes les négatives moindres, et comme moindres les négatives plus grandes... Donc les quantités $M - Z$ et $Z - N$ seront toujours positives depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, et il en sera de même des quantités $z^m(M - Z)$ et $z^m(Z - N)$.

Donc si on fait $f'z = z^m(M - Z)$ on aura par le lemme précédent $fb-fa > o$; (5) or $z^m Z$ étant $F'z$ sa fonction primitive sera Fz et comme M est une quantité constante, la fonction primitive de Mz^m est $Mz^{m+1}/m+1$, puique la fonction prime de celle-ci est, par la règle générale (n° 18)
$(m + 1) Mz^m/m+1 = Mz^m$. Donc on aura $fz = Mz^{m+1}/m+1 - Fz$; et faisant successivement $z = a$ et $z = b$, l'équation $fb - fa > o$ donnera

$$Mb^{m+1}/m+1 - Fb - Ma^{m+1}/m+1 + Fa > o$$

d'où l'on tire

$$Fb < Fa + M(b^{m+1} - a^{m+1})/m+1 \quad (6)$$

D'une manière analogue il obtient

$$Fb > Fa + N(b^{m+1} - a^{m+1})/m+1 \quad (7)$$

Ayant démontré les formules, Lagrange les applique aux quantités P, Q, R ...

---

(1) ib p.45
(2) nous devons souligner qu'à l'époque, de Lagrange, on ne distinguait pas l'intervalle fermé ou ouvert.
(3) par limite de plus on doit entendre borne supérieure.
par limite de moins on doit entendre borne inférieure.
(4) ib p.46
(5) il ne fait pas usage de parenthèses.
(6) ib p.47, il considère les inégalités strictement monotones.
(7) ib p.47.

Il applique le même procédé, en considérant d'abord P = Fz , Q = Fz etc. (1).

Suivons de près son calcul :

"...nous supposerons d'abord P = Fz, et par conséquent P' = F'z = F'(X - xz) donc puisqu'on a supposé $P'z = z^mZ$, prenons m = o, on aura Z = f'(x - xz). Supposons maintenant a = o , b = 1 , la condition de la fonction P , qui doit être nulle lorsque z = o , donnera Fa = o et alors Fb sera la valeur de P, répondant à z = 1.

Donc si M et N sont la plus grande et la plus petite valeur de f'(X - xz) relativement à toutes les valeurs de z depuis z = o, jusqu'à z = 1 , on aura Fb < M et > N . Par conséquent M et N seront les deux limites de la quantité P, en y faisant z = 1 (2).

De la même façon, il poursuit le procédé pour Q = Fz (3) . Ainsi il obtient $Fb < M_1/2 > N_1/2$ (4).

"Maintenant il est clair qu'en donnant à z, dans une fonction x(1 - z), toutes les valeurs depuis z = o , jusqu'à z = 1 , les valeurs que recevra cette fonction seront les mêmes que celles que recevrait une pareille fonction de x, en donnant successivement à u toutes les valeurs depuis u = o jusqu'à u = x " (5).

Ainsi il pose : x(1 - z) = u , u parcourt "l'intervalle" o,x et z se trouve entre o et 1. De cette façon f'u prendra toute valeur intermédiaire entre M et N .

"Donc la valeur de la quantité P relative à Z = 1 pourra être exprimée par f'u , u étant une quantité entre o et x . On en conclura de même que la valeur de Q répondant à z = 1 pourra être exprimée par 1/2 f"u , en donnant à u une valeur intermédiaire entre o et x " (6).

(1) ib p.47
(2) ib p.47
(3) ib p.47-48
(4) ib p.48 c'est-à-dire $N_1/2 < Fb < M_1/2$
(5) ib p.48
(6) ib p.48

De toute cela Lagrange conclut enfin "ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité"(1) : "on peut développer successivement toute fonction de x ... suivant les puissances de x, de cette manière

$$fx = f. + xf'u$$

$$= f. + xf'. + x^2/2\ f''u$$

$$= f. + xf'. + x^2/2f''. + x^3/2.3f'''u$$

etc.

les quantités f. , f'. , f''. étant les valeurs de la fonction fx et de ses dérivées f'x, f''x, lorsque on y fait x = o ". (2)(3).

En plus pour le développement de f(z + x), Lagrange en déduit :

$$f(Z + x) = fz + xf'(z + u)$$

$$f(Z + x) = fz + xf'z + x2/2(z + u)$$

$$= fz + xf'z + x^2/2\ f''z + x^3/2.3\ f'''(z + u)$$

etc.

où u désigne une quantité indéterminée, mais renfermée entre les limites o et x ".(4)

Les formules susdites, sont ce que nous appelons aujourd'hui la série de Taylor avec le reste lagrangien.

Cependant la démonstration lagrangienne contient des points faibles (5), le grand mathématicien (6) par son intuition a préssenti les méthodes rigoureuses qui ont été réalisées par les travaux de Bolzano, Cauchy et Weierstrass. La "vue" algébrique de Lagrange comme base de calcul. Le chemin étant ouvert pour les recherches de Bolzano, Cauchy et Weierstrass.

(1) ib p.49
(2) ib p.49
(3) rappelons que u est entre o et x .
(4) ib p.49
(5) le fait que toute fonction f, avec f'> o admet que f(b) > f(a) n'est pas toujours vrai et qu'aussi une fonction continue atteint son maximum et minimum sur un intervalle fermé.
(6) de la méthode pour trouver le reste de la série taylorienne, Ampère a conçu une définition succinte et simple de la dérivée.

L'algébrisation de l'Analyse but et rêve de Lagrange se réalise beaucoup plus tard avec les travaux de Weierstrass (1) ; le développement de fonctions analytiques devient son outil principal. Les notions de limite, de bornes supérieures et inférieures, de point d'accumulation et de convergence ont réalisé cette ambition de Lagrange.

---

(1) v. P. Duyac : Elements d'Analyse de Karl Weierstrass" Archive for History of Exact Sciences - Vol. 10 No 1/2 1973 p. 41 - 176.