Georg Kreisel

Les mathématiques : leur philosophie, pédagogie et praxis

Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1975, fascicule 1
« Les mathématiques : leur philosophie, pédagogique et praxis », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1975___1_A1_0>

LES MATHÉMATIQUES :

LEUR PHILOSOPHIE, PÉDAGOGIE ET PRAXIS.

G. Kreisel

Introduction

Le but principal de cette conférence est de formuler quelques constatations aux sujets cités dans le titre, constatations qui me semblent fort utiles au sens suivant. Bien qu'elles ne résolvent pas, par elles-mêmes, des problèmes difficiles, leur oubli conduit souvent à des efforts peu rentables et, par conséquent, à la longue frustrants et insatisfaisants. Autrement dit, il s'agit de ce que les scientifiques considèrent comme des banalités oubliant - il faut l'avouer - l'hygiène intellectuelle qu'elles fournissent.

Une vertu négligée de l'enseignement philosophique est d'apprendre aux gens comment formuler des banalités d'une façon impressionnante ou, du moins, mémorable. Malheureusement je n'ai jamais profité de ce genre d'enseignement. J'adopterai donc le style anglais et j'essayerai à illustrer ces banalités ; en particulier, en citant des expériences en logique intuitioniste. Alors je me propose de vous expliquer d'abord les notions de base et d'énoncer quelques résultats précis et simples qui, je pense, sont de valeur et par leur intérêt intrinsèque et parce qu'ils corrigent des malentendus répandus sur l'intuitionisme (malentendus qui reflètent d'ailleurs ce que les intuitionistes eux-mêmes se sont attendus il y a 50 ans). Ensuite, j'ajouterai des commentaires qui lieront ces résultats - et surtout le choix des questions auxquelles les résultats répondent -aux banalités que j'ai qualifiées comme utiles ci-dessus. Et j'espère que grâce à cette liaison, vous vous souviendrez d'elles pour les utiliser même dans des autres contextes.

1. La logique intuitioniste.

Il s'agit d'une interprétation des opérateurs ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$), interprétation moins simple que celle des textes courants en logique, c'est-à-dire celle qui prend les opérateurs propositionels au sens des fonctions dites de vérité et les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ comme des conjonctions et disjonctions éventuellement infinies. Il va sans dire que des interprétations différentes satisfont en général des lois logiques différentes ; sur le plan formel on se sert des règles formelles différentes. (Il ne faut jamais oublier que la logique s'occupe surtout du choix des règles). Pour l'instant je ne m'intéresse pas outre mesure si oui ou non des interprétations sont très proches à celles qui sont implicites dans les raisonnements courants. Après tout nos raisonnements dans la vie courante ne sont pas tellement bons et il y a des fortes chances qu'on peut faire mieux. Et n'importe comment, comme dans les autres sciences, il y a des fortes chances que les interprétations (ou phénomènes) qui sautent aux yeux, se prêtent pas très bien à une analyse théorique.

Notions de base. La donnée d'une relation R à <u>n</u> arguments $x_1, \ldots x_n$ est sa fonction "caractéristique" ρ_R à (n + 1) arguments $\pi, x_1, \ldots, x_n$ t.q.

$$\rho_R(\pi, x_1, \ldots, x_n) = \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \Leftrightarrow \pi \begin{matrix}\text{est}\\ \text{n'est pas}\end{matrix} \text{ une preuve montrant}$$

que $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

NB. On ne suppose pas qu'on sait décider si oui ou non il existe une lettre

En particulier, la donnée d'une proposition, c'est-à-dire d'une relation à 0 argument (comme dirait l'autre) est une fonction ρ_R ou encore une "méthode de décision" t.q. : $\rho_R(\pi) = \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \Longleftrightarrow \pi \begin{matrix}\text{est}\\ \text{n'est pas}\end{matrix}$ une preuve de P.

Il ne faut pas devenir paranoiaque tout de suite au sujet de la signification exacte des notions citées (preuve, fonction, etc.). D'une part on sait assez bien de quoi on parle, aussi bien que dans le cas de la notion d'ensemble (d'objets quelconques). D'autre part - et toujours comme dans le cas de la théorie des ensembles - pour la plupart des applications qui suivront on n'a besoin que des propriétés très simples des notions de base en question, propriétés que des classes familières de preuves et de fonctions possèdent. Je vous décrirai de telles classes quand j'en aurai besoin. Toujours comme dans le cas des ensembles, on aura des problèmes formellement indécidés. Bien entendu, deux questions s'imposent : 1° Trivialement, de décider ces problèmes, mais aussi, 2° de juger si oui ou non des classes particulières de preuves sont plus maniables que la notion générale du départ.

Soient donc P_A et P_B les données des propositions A et B. Alors la donnée de l'implication, $P_{A \to B}$, est déterminé par

$$P_{A \to B}(\pi) = {1 \atop 0} \Leftrightarrow \Big\{ \pi \ {\text{est} \atop \text{n'est pas}} \ \text{un couple } (\pi_1, \pi_2)$$

$${\text{ou} \atop \text{et}} \ \pi_2 \ {\text{prouve} \atop \text{ne prouve pas}} \ \text{que, quelque soit } \pi'$$

$$P_A(\pi') = 1 \Rightarrow P_B[\pi_1(\pi')] = 1 \Big\}$$

On voit donc que 1° π_1 est une application et 2° que la propriété, de π_2, d'être une preuve de l' "identité" : $P_A(\pi') = 1 \Rightarrow P_B[\pi_1 \ (\pi_2)] = 1$ est supposée décidable (pou éviter de la circularité, non forcément vicieuse, dans l'explication de l'implication).

Même des connaissances minimes en logique courante suffisent pour décrire des modèles familiers ou, si vous voulez, concrets de ce qu'on parle ici. Par exemple, on prend comme (codes des) preuves les démonstrations formelles d'un système S donné ou plutôt leurs numéros dits de Gödel et comme fonctions celles des sous classes des fonctions : $\omega \to \omega$ définissables de S. Tout ce qu'on a dit jusqu'à maintenant a un bon sens pour tout S contenant un peu de l'arithmétique et pour tout choix des sous classes. Seules les "lois logiques" du calcul propositionnel dépendent de ces choix.

L'autre opérateur logique qui réquiert un peu de délicatesse est $\forall$. Soit donné un "univers", mettons D dont la donnée est P_D et soit P_R la donnée de la relation R monadique. Alors la fonction caractéristique de la proposition $\forall x$ R ou,plutôt de $(\forall x \in D)$ R est, par définition $P_{\forall x R}$ où

$$P_{(\forall x \in D)R}(\pi) = {1 \atop 0} \Leftrightarrow \Big\{ \Big[\pi \; {\text{est} \atop \text{n'est pas}} \text{ un couple ,}$$

mettons $(\pi_1, \pi_2)\Big]$ ${\text{et} \atop \text{ou}}$ $\Big(\pi_1$ ${\text{prouve} \atop \text{ne prouve pas}}$ que, quelque soit π', x

$$P_D(\pi', x) = 1 \Longrightarrow P_R\big[\pi_1(\pi', x), x\big] = 1 \Big\}$$

On notera que l'énoncé démontré par π , est purement universel, ce qui est typique pour les preuves qu'on considère ici. On voit que ceci n'est guère plus compliqué que l'interprétation de l'implication - en contraste avec l'interprétation courante, qu'on appelle parfois l'interprétation ensembliste. Sans l'élaborer, je mentionne en passant qu'il n'ya aucune difficulté de préciser d'une façon pareille la quantification sur ce qu'on appelle : suites librement choisies. Grossièrement parlant, le but essentiel de cette notion est de n'utiliser que des morceaux finis, et non pas la suite complète, ce qui se traduit par des restrictions (des fonctions π_1 ci-dessus), aux applications continues par rapport à une topologie convenable.

L'interprétation des autres opérations logiques est exactement ce qu'on s'attend selon les idées - même les plus vagues - suggérées par le mot "constructive".

Comme tout le monde sait, Heyting a trouvé un système de règles formelles assez élégant tel que, tout théorème (formellement) dérivable est valide d'après l'interprétation ci-dessus. Bien entendu, la vérification est tellement élémentaire qu'elle n'utilise que des propriétés superficielles de l' "univers" de preuves et de fonctions. Les auditeurs sachant les éléments de la logique classique reconnaîtront l'analogie dans le cas classique. Le système formel de

Heyting a des propriétés assez frappantes ; par exemple, si A v B est démontrable ou bien A ou bien B l'est aussi. Ceci est étonnant parce que, en logique, A et B contiennent des variables relationnelles ; et si $\exists x$ A est démontrable, il existe un terme t tel que A $[x/t]$ l'est aussi où t est indépendant des variables relationnelles dans A. En langage mathématique courant, on a des propriétés d'uniformité.

En revanche, la propriété de la complétude est plus délicate que dans le cas classique où la validité d'une formule logique n'est pas très sensible à la classe d'ensembles qu'on considère ; par exemple, s'il y a un contre exemple quelconque, il y en a déjà un qui est dénombrable. Même plus : dans le cas classique, le choix des opérateurs propositionnels est complet au sens familier, à savoir, toute fonction de vérité est définissable par supposition, à partir de $(\neg , \wedge)$ ou de $(\neg , \vee)$. Pour l'interprétation intuitioniste, ces systèmes d'opérations ne sont évidemment pas complets. A mon avis, tout ça laisse soupçonner que dans les mathématiques dites constructives, le rôle de la logique est même moins central que dans les mathématiques ensemblistes. Or, il ne faut pas exagérer dans la direction négative non plus : les auditeurs savants en théorie des ensembles reconnaîtront la relation entre la logique intuitioniste et celle du forcing qui est utile à la "construction", c'est-à-dire à la définition explicite de modèles (par exemple de la théorie formelle des ensembles). Elle l'est aussi pour le choix d'axiomes, par exemple en algèbre, parmi tous ceux qui sont équivalents (au sens classique).

Dans tout ce que je viens de dire on ne s'attend à aucun drame. Evidemment, l'essentiel est le rôle explicite que la notion de preuve joue dans le cadre intuitioniste. Les questions dites "de principe" sont, je pense, évidemment barbantes et certainement pas difficiles, étant donné l'expérience actuelle, en mathématiques. D'une part, le cadre intuitioniste n'est sûrement pas totalement stérile ((et, à plus forte raison, il est cohérent). Même plus : on s'attend que - en ce qui concerne la pensée mathématique- du moins une bonne partie des complexités des structures mathématiques se traduisent assez facilement en termes des preuves qui les concernent. D'autre part, on s'attend que de simplifications découleront d'une interprétation - par exemple de l'interprétation classique - qui supprime toute mention des preuves (avec le sous entendu qu'elle soit adéquate à la question considérée). Bref, il faut pousser les recherches sur la logique intuitioniste assez loin, pour se faire une idée - même approximative - de sa valeur, ce qui laisse soupçonner, puisque par définition, que l'intérêt philosophique.

2. La philosophie des mathématiques

Selon le but formulé dans l'introduction, je commence avec les banalités que l'expérience en logique intuitioniste sert à illustrer. A mon avis, la banalité la plus utile concernant les questions philosophiques traditionnelles est la suivante : elles se présentent quand on sait très peu (et au sens phylogénétique et au sens ontogénétique).

Par conséquent, la plupart d'entre elles ont un bon sens ; par contre, on ne peut pas s'attendre que la plupart restent intéressantes quand on sait plus. Egalement, on s'attend que la plupart ont un caractère très général ou "abstrait", tout simplement parce qu'on sait trop peu pour se référer aux propriétés spécifiques des objets dont il s'agit. (Les mathématiciens parmi les auditeurs sauront bien que les premières solutions d'un problème sont souvent "trop" difficiles parce qu'elles n'utilisent pas "assez" des hypothèses qui sautent aux yeux - ou bien parce que ces hypothèses sont inutiles, c'est-à-dire le problème a un caractère plus abstrait, qu'on ne pense). En effet, souvent il faut des connaissances plutôt détaillées pour la formulation même des questions non triviales tandis qu'on peut toujours poser des questions dites philosophiques, mettons sur la réalité des objets ou sur la validité des preuves, ou des axiomes. Ayant dit tout ça, il faut souligner que les réponses - même des bonnes réponses - à ces questions ne sont pas souvent utiles, comme les réponses aux enfants qui continuent à demander : Pourquoi ? De plus, parfois l'extension de l'expérience (scientifique) est évidemment fort utile pour répondre à des questions naïves, par exemple "Qu' est-ce que la matière ?" et parfois elle ne l'est pas, par exemple, "Qu'est-ce qu'un cercle ?" (avant la découverte de la définition euclidienne).

En ce qui concerne la validité des déductions mathématiques courantes, la logique, et, en particulier, la logique intuitioniste n'a rien apporté : tout simplement parce que le problème n'est pas là. Il est un fait que, souvent, on pourrait formaliser les raisonnements sans difficulté et on pourrait le faire en n'utilisant que les règles intuitionistes. On ne le fait pas : pour cause, parce que cette espèce de rituel n'ajouterait rien - et c'est une découverte empirique. (Bien entendu, quand il s'agit des programmes de calculatrices et non pas d'explications aux gens, il faut des formalisations.

A mon avis, la logique intuitioniste est inférieure à la logique classique par le fait qu'elle fait semblant d'étudier des preuves. D'une part elle les mentionne (dans l'interprétation logique; d'autre part, elle se contente des énoncés superficiels que toute classe de preuves close par rapport à des conditions assez triviales satisfait. De plus, en mettant l'accent sur l'histoire de la validité des preuves, histoire qui veut être   et profonde, elle cache le problème bien plus délicat d'étudier leurs structures et en particulier de trouver les notions nécessaires à cette étude.

Bien sûr, la possibilité, d'ailleurs mal connue, de développer la plupart des mathématiques courantes dans le cadre intuitioniste, montre "en principe" comme on dit, que les hypothèses dites réalistes des mathématiques ensemblistes ne sont pas nécessaires (aux parties des mathématiques en question). Oui à quoi bon ? Comme toute application du rasoir d'Ockham cela ne montre que l'insuffisance des parties mentionnées à un jugement sur les hypothèses en question ; ici les hypothèses ensemblistes.

3. La pédagogie des mathématiques

Je commence avec la distinction - banale , bien entendu mais absolument essentielle - entre l'enseignement des masses et ce que j'appellerai l'enseignement intime, que j'expliquerai en détail plus tard. Bien que, je pense, la logique intuitioniste n'ait aucune place dans l'enseignement des masses, je rappelle très brièvement une contribution indirecte. Le souci d'éviter des notions ensemblistes a conduit à la mécanisation ou encore formalisation des grandes parties des mathématiques , ce qui est évidemment utile à la bonne exploitation des calculatrices. Puisque celles-ci ne manquent jamais d'énergie, ni donc de patience (elles sont prêtes à répéter n'importe quoi), elles sont destinées à jouer un rôle central dans l'enseignement des masses. De plus, les développements de la programmation permettent l'usage simultané de plusieurs styles de l'enseignement parmi lesquels l'étudiant peut choisir, ce qui fatiguerait l'enseignant moyen. Les premiers essais que je connais dans cette direction, par exemple, à Stanford, ont pris comme point de départ la théorie élémentaire des ensembles ; peut-être à cause de ~~son~~ sa renommée comme un langage "universel". Or l'expérience a déjà montré qu'elle n'est pas tellement utile dans ce but ; par exemple, les systèmes dits fonctionnels, c'est-à-dire algébriques, sans aucun symbolisme logique, se prêtent souvent mieux à la mécanisation. Sans nier l'intérêt objectif des problèmes, y compris des problèmes mathématiques, que l'enseignement (des mathématiques) aux masses soulève, je m'arrête ici, étant très content que je ne suis pas obligé de me mêler dans ce domaine ni même d'exprimer d'opinion.

Par contre, il y a une autre partie de l'enseignement qui, semble-t-il, est utile aux étudiants peu sages ; par exemple ,ceux qui ne sont pas persuadés par les bons conseils mettons, du Bourbaki ; conseils que telle ou telle notion vaut la peine, ou que tel ou tel sujet ne le mérite pas. Autrement dit, manquent de sagesse (le but de la philosophie dans son sens ancien) ces étudiants, bien que doués en mathématiques, ne réalisent pas la valeur des bons conseils que les spécialistes leur donnent ; et après tout puisque ces conseils sont fondés sur des expériences en mathématiques que les débutants ne possèdent pas, on doit s'attendre à ce que parfois, même des très bons conseils risquent de leur sembler bizarres. En particulier, des questions qu'on jugera comme peu utiles après leur analyse, s'imposent ; du moins aux esprits peu sages. Bien entendu, ceux-ci étant souvent légèrement têtus, ne peuvent que mépriser les astuces des petits pédagogues qui prétendent que ces questions n'ont aucun sens. Alors, quoi faire ? Probablement, souvent la bonne réponse est : rien. Comme dans le   , les esprits peu sages payeront le prix de leur manque de sagesse. Seulement, de temps en temps l'un ou l'autre de ces esprits profite, semble-t-il, d'un traitement détaillé de leurs questions délicates, traitement que je propose d'appeler : l'enseignement intime.

L'expérience que je vais citer plus bas, montre, à mon avis, que la logique intuitioniste et ses variantes sont fort utiles dans ce but. Pour éviter des doutes superflus, je ne me réfère qu'aux gens considérés comme vraiment doués en mathématiques, et comme possédant un peu de sagesse, à savoir les mathématiciens Littlewood, Emil Artin et Alan Baker. Je n'invente pas d'histoire imaginaire. Toutes les questions concernaient des bornes dites explicites ; non pas des bornes optimales (qui auraient un intérêt mathématique intrinsèque), mais tout simplement bornes fournies par des démonstrations connues.

Littlewood a démontré que

$$\forall n\, \exists m_1\, \exists m_2 \left[m_1 > n \wedge m_2 > n \wedge \pi(m_1) - \mathrm{li}\,(m_1) > 0 \wedge \mathrm{li}(m_2)\, \pi(m_2) > 0 \right].$$

Bien sûr, en principe on trouvera de tels m_1 et m_2 par essais La question de Littlewood était de savoir si oui ou non l'analyse de sa démonstration, sans aucune astuce supplémentaire, donne des bornes $\mu_1(n)$ et $\mu_2(n)$ pour m_1 et m_2 respectivement. Evidemment une réponse positive n'a pas besoin d'une définition générale de la notion "analyse... sans... astuce". En effet, l'application mécanique de l'analyse fournie par les preuves dites de la cohérence de l'arithmétique formelle donne une réponse positive. (On sait d'ailleurs améliorer ces bornes pas mal par l'utilisation astucieuse des calculatrices, et donc l'analyse sans astuce est démontrablement inutile).

Artin a démontré que, pour tout corps K ordonné et pour tout polynome $p(x_1, \ldots, x_n)$ (du degré $\underline{d}$), si $p \geqslant 0$ dans la clôture réelle de K (et donc dans toutes les extensions de K réelles fermées) alors il existe des éléments $c_i \geqslant 0$ de K et des polynomes p_i , q : de $K[x_1, \ldots x_n]$ tel que

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \left[p = \Sigma c_i (pi/qi)^2 \right].$$

(La formulation est légèrement différence de celle d'Artin). Artin voulait savoir si l'analyse sans astuce de sa démonstration donne une borne pour le nombre de carrés (pi/qi)2 , par exemple indépendante du corps K. (Il aurait pu demander aussi une borne des degrés des pi et qi, ou des hauteurs des ci dans le sous corps de K engendré par les coefficients de p). Encore une fois, les preuves de la cohérence de la logique classique, preuves n'utilisant que la logique intuitioniste, fournissent la réponse positive. (On sait d'ailleurs améliorer ces bornes à la Pfister, du moins par des corps K réels fermes et donc l'analyse sans astuce est, encore une fois, démontrablement inutile).

Roth a démontré que, pour tout nombre algébrique α

$$\forall n\ \exists q_0\ \forall p\ \forall q\ \left(q \geq q_0 \rightarrow /\alpha - \frac{p}{q}\ / > \frac{1}{q^{2\ +\ n^{-1}}}\right)$$

et Davenport et Roth ont donné des bornes pour le nombre, mettons $\nu(\alpha, n)$ de q :

$$\exists p \left(/\alpha - \frac{p}{q}\ / \leqslant \frac{1}{q^{2\ +\ n^{-1}}}\right),$$

en fonction du degré et de la hauteur de α. Baker a utilisé ces bornes et voulait savoir si oui ou non 1° l'analyse sans astuce de la démonstration de Roth donne, elle aussi une borne pour ν (αn) et 2° cette borne suffit dans son but. La réponse au 1° est positive et celle du 2° est négative. Il ne pense pas qu'on sait assez de la matière pour décider de façon définitive si oui ou non les questions de Baker sont peu sages. Or, il y a de fortes chances qu'elles le soient.

J'ajoute deux commentaires qui sont sûrement pertinents à l'enseignement intime ; l'un auquel je me réfère aussi plus bas concernera éventuellement aussi la praxis (future). 1° Evidemment la question de Baker fait intervenir une distinction très familière aux spécialistes en logique intuitioniste, mais souvent qualifiée comme "subtile", c'est-à-dire mal comprise, par des autres ; à savoir, entre une

borne pour le nombre et pour la grandeur des q :
$\exists p\ (/\alpha - p/q\ / \leqslant q^{-1-n^{-1}})$; 2° Vue en termes intuitionistes, en particulier , en termes de suites librement choisies, la variante suivante de la question d'Artin s'impose, par exemple si K est le corps ordonné des réels (librement choisis). On voudrait savoir si oui ou non, mettons, les ci dépendent d'une façon continue des coefficients du polynome p, parce qu'on n'opère que sur des "approximations". Moins trivialement : la réponse risque d'être sensible au choix précis de la topologie sur les "réels", par exemple, la topologie habituelle ou la topologie produite sur $\omega \dashrightarrow 2$ quand on distingue entre $1.\dot{0}$ et $0.\dot{1}$. Ceci n'est point farfelu. Considérons

$$\forall c\ \exists x\ (x^3 - 3x = c).$$

Est-ce qu'il existe une application $\xi : c \rightarrow x$ tel que

$$\forall c[\xi^3 (c) - 3\xi(c) = c]$$

qui est continue 1° pour la topologie habituelle ? et 2° pour la topologie produit sur 2^{ω} (et non forcément "extensionnelle"). La réponse au 1° est évidemment négative, au 2° également, évidemment,positive. Bien entendu on n'a besoin de la logique intuitioniste pour comprendre ni les questions posées ni les solutions. Son rôle est de nous rendre sensibles à ces questions et de nous orienter sur leurs solutions. Si oui ou non elles sont utiles, c'est l'affaire de la praxis que je vais discuter maintenant.

4. La praxis des mathématiques

La banalité déterminante à ce sujet est liée au fait bien connu que plusieurs idées qui nous sautent à l'esprit, quand nous savons très peu, restent utiles, y compris les idées générales derrière la logique intuitioniste. De telles idées sont souvent même très utiles parce que - d'après ce qu'on vient de dire - elles nous sont particulièrement maniables. Elles font partie de la praxis sans qu'on s'aperçoive souvent de leur origine. En particulier, Poincaré et Brouwer étaient fortement attirés par les idées plus ou moins intuitionistes, comme tout le monde le sait. Or, contrairement à ce que beaucoup de gens simplistes supposent, Brouwer s'est intéressé à ces idées dans sa thèse, bien avant ses travaux topologiques ; en fait sa thèse qui était vide sur le plan mathématique ne contenait que des polémiques contre les fondements ensemblistes. Et le point de départ de ses travaux topologiques était sa critique du livre de Schönflieb, livre appartenant plutôt au bord de la théorie dite descriptive des ensembles et de la topologie. Ses préférences pour l'utilisation des polyèdres et des opérations sur des morceaux finis, bref pour la topologie algébrique, sont étroitement liées à ses soucis de constructivité.

Par conséquent - et ceci est tout à fait banal, mais important - un grand nombre d'applications mathématiques que l'étude systématique de la logique intuitioniste aurait suggérées presque automatiquement, font déjà partie de la praxis. On n'avait pas besoin d'une étude systématique : les idées générales et même assez vagues sans analyse plus précise qui a conduit à la logique intuitioniste, suffisent aux applications en question. Autrement dit, l'usage purement heuristique de ces idées était tellement rentable (du moins, aux mains de Brouwer) que la question se pose si oui ou non aussi leur analyse plus précise et systématique vaut la peine. En termes de la théorie économique : est-ce qu'on a déjà atteint le point of diminishing returns ?

A l'heure actuelle, cette question me semble ouverte. Pour prendre un exemple concret, je n'ai rien trouvé dans les textes récents de Bishop qu'on ne peut pas formuler d'une façon absolument adéquate en termes de mathématiques courantes - et j'en suis sûr, Bishop ne réalise pas combien il a profité des mathématiques qu'il a apprises à Chicago. Considérons le théorème de Brouwer lui-même sur les points fixes, mettons pour la dimension 2 où f est une application continue au sens habituel : $f : S^2 \dashrightarrow S^2$.

Question (pour la topologie de la convergence uniforme sur f) : Est-ce qu'il existe une application continue $F : f \dashrightarrow S^2$ tel que $F(f)$ est un point fixe de f ?

La réponse est évidemment négative. Or la continuité en question est sûrement une condition minimale pour qu'il existe une preuve constructive du théorème de Brouwer, sans aucune analyse plus fine de la notion de la constructivité.

Par contre, une condition supplémentaire sur f et non pas farfelue entraîne la continuité : on se conforme à des f qui possèdent des points fixes isolés. (Cette condition n'est pas farfelue, par exemple pour des applications du théorème de Brouwer à la solution des équations différentielles : des exigences de la stabilité requièrent souvent des solutions isolées).

En termes plus pédantesques, pour trouver une solution continue de l'équation fonctionnelle, pour tous les f d'une classe convenable

$$f\left[F(f)\right] = F(f)$$

on "enrichit" la donnée de f par un intervalle i_f dans lequel f possède un seul point fixe et on opère sur cette donnée enrichie. Bien entendu, cette remarque n'est utile que si l'on a de bonnes classes d'applications pour lesquelles un tel i_f est effectivement trouvable. (1)

Malgré l'adéquation des mathématiques courantes à la plupart des problèmes intuitionistes (dans un sens plus ou moins précis), je ne suis pas persuadé que l'analyse systématique de la logique intuitioniste restera inutile sur le plan mathématique, pour la raison suivante. L'adéquation dont je viens de parler est assez faible , surtout parce qu'elle dépend d'un bon choix d'enrichissements, choix souvent qualifié comme "astucieux).

Peut-on faire mieux ?

En principe, oui. (En termes familiers aux logiciens, ce qu'on appelle "interprétations fonctionnelles" et aussi "élimination des suites librement choisies" fournit, en général, de tels enrichissements à partir des démonstrations formelles). En pratique, la réponse est plus délicate - et, je pense, tout à fait pareille à la situation en ce qui concerne la théorie des modèles. Dans la plupart des cas, on trouve la solution, c'est-à-dire l'enrichissement qui convient (comme on avait trouvé la plupart des solutions que le théorème de finitude en théorie des modèles donne d'une façon plus systématique). Sans doute, l'explication systématique

(1) Pour éviter des malentendus : Bishop ne donne pas les considérations ci-dessus ; au contraire sa "version constructive" n'est rien d'autre que $\forall n\ (\exists x \in S^2)\ (|f(x) - x| < n^{-1})$
L'analyse logique donne -automatiquement- une version beaucoup plus forte.

de ces choix est satisfaisante pour l'esprit - ou, plutôt, pour les esprits peu sages : ce qui revient à la constatation déjà faite sur l'utilité de la logique intuitioniste (qui fournit l'explication) à la pédagogie intime. Or, la possibilité reste qu'un jour on aura besoin des théorèmes généraux pour faire un choix (d'enrichissement) qui marche. Ce genre de question admet , bien entendu, un jugement objectif ; mais il n'est pas facile. Le mathématicien pensera à la question si oui ou non les méthodes topologiques sont essentielles à la théorie des nombres, par exemple, à l'hypothèse de Riemann - pour les courbes algébriques et pour les variétés - et la difficulté d'en juger, mettons en 1950, 1970 et 1975. La plupart d'entre nous savent bien que nous n'y sommes compétents qu'au plus dans un domaine bien limité.

Pour terminer. Les idées générales de la logique intuitioniste, c'est-à-dire de l'interprétation des énoncés logiques qui fait intervenir les preuves, se prêtent à une théorie cohérente. Elle est sûrement utile à la pédagogie intime. La question semble être ouverte si oui ou non elle est utile à la praxis. A mon avis il est presque certain qu'elle n'apporte rien aux questions de la philosophie mathématique traditionnelle (bien qu'elles soient à l'origine du développement de la logique intuitioniste). La raison n'est pas du tout dramatique (par exemple, il ne s'agit pas de questions qui n'ont pas de sens). On n'a pas les éléments pour une réponse qui vaut la peine. Je compare souvent ces questions à la question tout à fait normale : Pourquoi le verre est-il transparent ? Bien sûr, parce qu'on voit à travers. Or une bonne réponse n'était possible sans extension considérable de l'expérience physique (aux phénomènes atomiques) ou, si vous voulez , sans progrès d'ordre technologique. Il me semble que notre expérience des possibilités de l'imagination mathématique est beaucoup trop limitée pour donner des réponses utiles. Bien entendu, avec un peu d'esprit, des spéculations inutiles peuvent être satisfaisantes : après tout, ce que Galilé et Newton ont dit sur la structure de la matière était - forcément - inutile et néanmoins aussi spirituel que leur oeuvre scientifique (et eux ils s'en doutaient).