SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

JACQUES JUSTIN

Semi-groupes à générations bornées

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A6_0>

Séminaire SCHUTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la théorie des automates)
Année 1969/70, n° 7, 10 p.

6 janvier 1970

SEMI-GROUPES À GÉNÉRATIONS BORNÉES

par Jacques JUSTIN

Introduction. - Nous notons $\underset{\sim}{N}$ (resp. $\underset{\sim}{P}$) l'ensemble des entiers naturels (resp. positifs) considéré ici comme un semi-groupe ([1]) additif. Le produit des parties et les puissances d'une partie d'un semi-groupe sont définis de la façon habituelle.

Soit A un semi-groupe engendré par le système B de générateurs. Appelons i-ième génération (resp. i-ième population) de A (relativement à B) l'ensemble B^i (resp. $P_i = \bigcup_{j=1}^{i} B^j$). L'allure de Card B^i ou Card P_i considéré comme fonction de i entraîne des conséquences quant à la stucture de A. Nous nous proposons ici de caractériser les semi-groupes "à générations bornées", c'est-à-dire tels que Card $B^i \leqslant m < \infty$, $\forall\, i \in \underset{\sim}{P}$. Le théorème suivant [2] est prouvé dans la première partie.

THÉORÈME 1. - *Soit A un semi-groupe admettant un système B de générateurs. Si* Card $B^i \leqslant m \in \underset{\sim}{P}$ ($\forall\, i \in \underset{\sim}{P}$), *il existe un semi-groupe fini S et un entier j tels que l'idéal engendré par B^j est image homomorphe d'un sous-semi-groupe T du produit direct $\underset{\sim}{N} \times S$. En outre, j et* Card S *peuvent être bornés par des fonctions de m seul. Enfin, $(\{n\} \times S) \cap T$ a pour image B^n, $\forall\, n \geqslant j$.*

La deuxième partie généralise quelque peu ce résultat. Dans la troisième partie, nous en déduisons une propriété des semi-groupes répétitifs ([2], [3]).

1. Preuve du théorème 1.

Il est commode de supposer que $B^i \cap B^j = \emptyset$ si $i \neq j$; on peut alors parler sans ambiguïté de la longueur $|u| = i$ d'un élément $u \in B^i$. Ce faisant, on ne restreint pas la généralité. Posons en effet :

$$B_1 = \{(1\ ,\ b) \mid b \in B\} \subset \underset{\sim}{P} \times A\ ,$$

et soit A_1 le sous-semi-groupe de $\underset{\sim}{P} \times A$ engendré par B_1. Il est clair que :

(i) Card B_1^i = Card $B^i \leqslant m$, $\forall\, i \in \underset{\sim}{P}$,

(ii) A est image de A_1 par le morphisme π tel que

$$\pi(n\ ,\ a) = a\ ,\quad \forall\ (n\ ,\ a) \in A_1\ .$$

([1]) Semi-groupe est entendu ici comme synonyme de demi-groupe.

Il suffit donc de prouver le théorème 1 pour $\mathbf{A}_1$ pour qu'il soit vrai pour $\mathbf{A}$. Or $\mathbf{A}_1$ satisfait à $B_1^i \cap B_1^j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Notons $\mathbf{A}'$ le semi-groupe obtenu en adjoignant à A un élément neutre ε de longueur 0, et convenons que $u^0 = \varepsilon$ si $u \in A'$.

Nous allons d'abord établir quatre lemmes.

LEMME 1. - Si $u, v, w \in A'$ et $|u| = |w|$, on a :

$$u^t (vw)^{2t} = u^{2t} (vw)^t \tag{1}$$

où

$$t = m! \tag{2}$$

Preuve. — Les $m+1$ éléments $u^i (vw)^{m-i}$ $(0 \leqslant i \leqslant m)$ ne sont pas tous distincts, car ils appartiennent à une même génération dont le cardinal est $\leqslant m$ par hypothèse. Il existe donc des entiers α, β, ξ, tels que :

$$u^\alpha (vw)^{\beta+\xi} = u^{\alpha+\xi} (vw)^\beta$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant m, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant m, \quad 1 \leqslant \xi \leqslant m. \tag{3}$$

De (3), on déduit

$$u^\alpha (vw)^{\beta+\lambda\xi} = u^{\alpha+\lambda\xi} (vw)^\beta, \quad \forall \lambda \in \underset{\sim}{P}. \tag{4}$$

Prenant $\lambda = t/\xi$, et multipliant (4) à gauche par $u^{t-\alpha}$, et à droite par $w^{t-\beta}$, on obtient (1).

LEMME 2. - Si $x \in \underset{\sim}{P}$, il existe un entier $c_1(x)$ tel que tout $f \in A$, avec $|f| \geqslant c_1(x)$, peut s'écrire

$$f = f_1 f_2^x f_3, \quad f_1, f_3 \in A', \quad f_2 \in A. \tag{5}$$

Preuve. - Posons $y = m^{x-1}$, et prenons $c_1(x) = xy$. Soit

$$f = b_1 b_2 \cdots b_{xy} \quad (b_i \in B). \tag{6}$$

Montrons que f satisfait à (5). Posons

$$b_{i+1} b_{i+2} \cdots b_{i+y} = a_i \in B^y \quad (0 \leqslant i \leqslant (x-1)y),$$

et considérons les $(x-1)$-uples d'éléments de B^y :

$$\alpha_i = (a_i, a_{i+y}, a_{i+2y}, \cdots, a_{i+(x-2)y}) \quad (0 \leqslant i \leqslant y). \tag{7}$$

Soient α_i et $\alpha_{i'}$ $(i < i')$ deux quelconques de ces $(x-1)$-uples que nous noterons pour simplifier $(g_1, \cdots, g_{x-1})$ et $(g'_1, \cdots, g'_{x-1})$.

En raison de leur construction, on peut écrire :

(8) $$\begin{cases} f = hg_1\, g_2 \cdots g_{x-1}\, k \\ f' = h'g'_1\, g'_2 \cdots g'_{x-1}\, k' \end{cases}$$

avec $$\begin{cases} g_i = u_i\, v_i\ , \quad g'_i = v_i\, u_{i+1} \\ h' = hu_1\ , \quad k = u_x\, k' \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant x-1)$$

où $$\begin{cases} h'\ , u_i\ , k \in A \\ h\ , v_i\ , k' \in A' \end{cases}$$

On voit que

(9) $$v_j\, g_{j+1}\, g_{j+2} \cdots g_{x-1}\, u_x = g'_j\, g'_{j+1} \cdots g'_{x-1} \qquad (1 \leqslant j \leqslant x-1)$$

Par ailleurs, le nombre de $(x-1)$-uples d'éléments de B^y est au plus $m^{x-1} = y$. Donc deux des α_i, définis par (7), sont égaux. Si on les désigne par $(g_1 \cdots g_{x-1})$ et $(g'_1 \cdots g'_{x-1})$, on aura :

$$g_j = g'_j \quad (1 \leqslant j \leqslant x-1)$$

d'où, en vertu de (9),

$$v_j\, g_{j+1}\, g_{j+2} \cdots g_{x-1}\, u_x = g_j\, g_{j+1} \cdots g_{x-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant x-1)$$

et par récurrence sur j :

$$v_1\, v_2 \cdots v_{x-1}\, u_x^{x-1} = g_1\, g_2 \cdots g_{x-1}\ .$$

En portant dans (8), on voit que f satisfait à (5) avec $f_2 = u_x$.

LEMME 3. - <u>Si</u> $x \in \underset{\sim}{P}$, <u>il existe un entier</u> ℓ <u>indépendant de</u> x, <u>et un entier</u> $c_2(x)$, <u>tels que tout</u> $f \in A$ <u>avec</u> $|f| \geqslant c_2(x)$ <u>satisfait à l'équation (5) avec</u> $|f_2| = \ell$.

<u>Preuve.</u> - Montrons d'abord qu'il existe les entiers λ et $\gamma(x)$ tels que tout f de longueur $\geqslant \gamma(x)$ peut s'écrire sous la forme (5), avec $|f_2| \leqslant \lambda$.

Prenons en effet $\gamma(x) = kc_1(2t)$ avec $k \in \underset{\sim}{P}$ qui sera choisi plus loin et t donné par (2). Si $|f| = \gamma(x)$, on peut écrire :

$$f = g_1\, g_2 \cdots g_k\ , \quad \text{où} \quad |g_i| = c_1(2t) \quad (1 \leqslant i \leqslant k)\ .$$

En vertu du lemme 2, chaque g_i peut s'écrire :

$$g_i = g'_i\, h_i^{2t}\, g''_i\ , \quad |h_i| \geqslant 1\ , \ g'_i\ , \ g''_i \in A'\ .$$

Les h_i ont leurs longueurs $\leqslant \lambda = c_1(2t)/2t = s$. Donc, si on prend $k = (r-1)s + 1$, où $r \in \underset{\sim}{P}$ sera choisi plus loin, r des h_i auront même longueur. Appelons-les h'_1, ..., h'_r. En appliquant le lemme 1, on peut alors, sans changer f, réduire à t les exposants de ces h'_i sauf celui de h'_1 par exemple, qui deviendra $2t + (r-1)t = (r+1)t$. En choisissant r minimal $\geqslant (x/t) - 1$,

on a le résultat cherché.

Pour achever la preuve du lemme 2, prenons $\ell = \lambda!$, et $c_2(x) = \gamma(\ell x)$. Alors tout f tel que $|f| \geqslant c_2(x)$ pourra s'écrire $f = f' g^{\ell x} f''$, f', $f'' \in A'$ avec $1 \leqslant |g| \leqslant \lambda$. Posons $f_2 = g^{\ell/|g|}$. Alors $|f_2| = \ell$ et $g^{\ell x} = f_2^{|g|x}$, ce qui permet de mettre f sous la forme indiquée dans l'énoncé du lemme 3.

Posons pour la suite :

(10) $$d = \ell t \quad \text{et} \quad c = c_2(2t) .$$

LEMME 4. - Il existe un entier L tel que tout $f \in A$, avec $|f| \geqslant L$, peut s'écrire :

(11) $$f = f_1 f_2^{it} f_3 \quad \text{où} \quad i \in \underset{\sim}{P} , \quad |f_2| = \ell$$

(12) $$f_1 , f_3 \in Q = \bigcup_{c-d \leqslant x < 0} B^x .$$

Preuve. - Prenons $L = c_2(t) + 2c_2(2t)$. Si $|f| > L$, on peut écrire :

$$f = f'f''f''' , \quad |f'| = |f'''| = c_2(2t) , \quad |f''| \geqslant c_2(t) .$$

f'' peut s'écrire (lemme 3) :

$$f'' = v_1 f_2^t v_3 , \quad |f_2| = \ell , \quad v_1 , v_3 \in A' .$$

D'où $f = u f_2^t w$, $|u|$, $|w| \geqslant c_2(2t)$; et u peut s'écrire $u = u_1 u_2^{2t} u_3$ avec $|u_2| = \ell$. Donc (lemme 1) :

$$f = u' f_2^{2t} w \quad \text{où} \quad u' = u_1 u_2^t u_3 .$$

On a $|u'| = |u| - d$. Si $|u'| \geqslant c_2(2t)$, on recommence avec u' l'opération faite sur u , et ainsi de suite. On procède de même en ce qui concerne w , et on obtient finalement pour f la forme indiquée dans l'énoncé.

Nous pouvons maintenant construire le semi-groupe fini S et achever la preuve du théorème 1.

Construction du semi-groupe S . - Soit β un multiple positif de t qui sera choisi plus loin. On prend :

$$S = \{(p , a , q) \mid p \in Q , \ a \in B^\ell , \ q \in a^\beta Q\} ,$$

où Q est toujours défini par (12).

On munit S d'une opération $\circ$ en posant :

(13) $$(p , a , q) \circ (p' , a' , q') = (p , a , q_1) ,$$

où $q_1 \in a^\beta Q$ satisfait à

(14) $$\exists\, x \in \underset{\sim}{P} : \ x = 0 \pmod t \quad \text{et} \quad qp'q' = a^x q_1 .$$

Prouvons d'abord l'existence de q_1 . Comme $q \in a^\beta Q$, $qp'q'$ est de la

forme $a^\beta u$ où d'ailleurs $|u| > |q' \geq c = c_2(2t)$. En appliquant alternativement les lemmes 3 et 1, on peut écrire :

$$qp'q' = a^\beta u = a^{\beta+t} u_1 = a^{\beta+2t} u_2 = \ldots = a^{\beta+kt} u_k$$

avec $c - d \leqslant |u_k| < c$. On peut donc prendre $q_1 = a^\beta u_k$.

Pour prouver l'unicité de q_1 , remarquons d'abord que si $q_1' \in a^\beta Q$ satisfait également à (14), c'est-à-dire si

$$qp'q' = a^{x'} q_1' , \quad x' \in \underset{\sim}{P} , \quad x' = 0 \pmod t ,$$

on aura $x' = x$. En effet,

$$|q_1'| - |q_1| = (x - x')\ell = 0 \pmod d ,$$

d'où $|q_1'| = |q_1|$, puisque $|q_1|$ et $|q_1'| \in [\beta + c - d , \beta + c - 1]$.

Par ailleurs (14) entraîne $x \leqslant \beta + (2c + d - 3)/\ell$.

Par conséquent, l'unicité du résultat de l'opération $\circ$ sera assurée si

(15) $$a^{x+\beta} r = a^{x+\beta} r' \Longrightarrow a^\beta r = a^\beta r' ,$$

$$\forall\, a \in B^\ell , \quad \forall\, r , r' \in Q , \quad \forall\, x \in [1 , \beta + (2c + d - 3)/\ell] .$$

Nous allons voir qu'une condition analogue à (15) entraîne l'associativité de $\circ$. Soient :

$$(p , a , q) \circ (p' , a' , q') = (p , a , q_1)$$
$$(p , a , q_1) \circ (p'' , a'' , q'') = (p , a , q_2)$$
$$(p' , a' , q') \circ (p'' , a'' , q'') = (p' , a' , q_3)$$
$$(p , a , q) \circ (p' , a' , q_3) = (p , a , q_4)$$

L'opération sera associative si $q_2 = q_4$. En notant x_i les valeurs de x associées aux q_i par (14), un calcul facile, utilisant le lemme 1, donne :

$$a^{x_1 + x_2} q_2 = a^{x_3 + x_4} q_4 = qp'q'p''q'' .$$

On vérifie, en considérant les longueurs, que

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \leqslant 2\beta + h , \text{ avec } h = (4c + d - 5)/\ell ,$$

d'où une condition suffisante pour l'associativité :

(16) $$a^{x+\beta} r = a^{x+\beta} r' \Longrightarrow a^\beta r = a^\beta r' ,$$

$$\forall\, a \in B^\ell , \quad \forall\, r , r' \in Q , \quad \forall\, x \in [1 , 2\beta + h] .$$

Manifestement, (16) entraîne (15). Nous allons choisir β de façon à satisfaire (16). Q étant fini, (16) équivaut à

(17) $\quad \text{Card } a^{x+\beta} Q = \text{Card } a^{\beta} Q \ , \quad \forall\, a \in B^{\ell} \ , \quad \forall\, x \in [1 \ , \ 2\beta + h] \ .$

Comme $\text{Card } a^{i} Q$ est une fonction non croissante de i , (17) sera satisfaite pour β assez grand. Plus précisément, soient $a_1 \ , a_2 \ , \ \dots \ , a_k$ les éléments de B^{ℓ} . Considérons les k-uples

$$\alpha(i) = (\text{Card } a_1^{i} Q \ , \ \text{Card } a_2^{i} Q \ , \ \dots \ , \ \text{Card } a_k^{i} Q) \in \underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{P} \times \dots \times \underset{\sim}{P} \ .$$

Cette suite est décroissante au sens large pour l'ordre induit dans $\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{P} \times \dots \times \underset{\sim}{P}$ par l'ordre des entiers. Partant de $\beta_o = t$, définissons β_{u+1} comme le plus petit multiple de t tel que $\beta_{u+1} \geqslant 3\beta + h$, et considérons la suite des k-uples $\alpha(\beta_u)$. Il existe un $u \leqslant (m - 1)k$ tel que $\alpha(\beta_u) = \alpha(\beta_{u+1})$. En prenant $\beta = \beta_u$, on aura :

$$\alpha(\beta + x) = \alpha\beta \ , \quad \forall\, x \in [1 \ , \ 2\beta + h] \ ,$$

donc (17) sera satisfaite.

Fin de la preuve du théorème 1 . - Si $s = (p \ , \ a \ , \ q) \in S$ et $x \in \underset{\sim}{N}$, posons $f(s \ , \ x) = pa^{tx} q \in \mathbb{A}$.

Soit $j = \max (L \ , \ \beta\ell + 2c - 2)$ .Définissons dans le produit direct $\underset{\sim}{N} \times S$:

$$T = \{(n \ , \ s) \mid \ s \in S \ , \ \exists\, x \geqslant 0 : \ n = |f(s \ , \ x)| \geqslant j\} \ .$$

On vérifie comme ci-dessous que T est un sous-semi-groupe de $\underset{\sim}{N} \times S$:

Soit l'application :

$$\varphi : \ T \longrightarrow (B^{j}) = \bigcup_{i \geqslant j} B^{i} \ ,$$

donnée par $\varphi(n \ , \ s) = f(s \ , \ x)$ tel que $|f(s \ , \ x)| = n$.

Cette application est un morphisme.

Soient en effet $(n \ , \ s)$ et $(n' \ , \ s') \in T$, avec

$$s = (p \ , \ a \ , \ q) \ , \quad s' = (p' \ , \ a' \ , \ q') \ , \quad s \circ s' = (p \ , \ a \ , \ q_1) \in A \ ,$$

$$\varphi(n \ , \ s) = pa^{tx} q \ , \quad \varphi(n' \ , \ s') = p'a'^{tx'} q'$$

et

$$\varphi[(n \ , \ s)(n' \ , \ s')] = \varphi[n + n' \ , \ s \circ s'] = pa^{tx_1} q_1 \ .$$

En utilisant le lemme 1 et la définition du produit dans S , il vient :

$$\varphi(n \ , \ s) \ \varphi(n' \ , \ s') = pa^{tx} qp'a'^{tx'} q' = pa^{t(x+x')} qp'q' = pa^{t(x+x'+y)} q_1 \ ,$$

d'où $\varphi(n \ , \ s) \ \varphi(n' \ , \ s') = \varphi[(n \ , \ s)(n' \ , \ s')]$ puisque ces deux éléments ont même longueur $n + n'$.

Montrons enfin que φ est surjectif. En vertu du lemme 4, tout élément $u \in (B^{j})$ peut s'écrire $pa^{it} r \ , \ p \ , \ r \in Q \ , \ a \in B^{\ell}$.

De $|u| \geqslant j \geqslant \beta\ell + 2c - 2$, on tire $it \geqslant \beta$, d'où

$$u = pa^{xt} q \quad q \in a^{\beta} Q .$$

Donc u est l'image par φ de $(|u| , (p , a , q)) \in T$.

2. Généralisation.

Nous noterons X^* le monoïde libre engendré par un ensemble quelconque X , et $|f| = d \in \underset{\sim}{N}$ la longueur de $f \in X^d$.

Définition. - A étant un semi-groupe engendré par B , on dira que A est muni d'une pseudo-longueur λ (relativement à B) si λ est une application de A dans l'ensemble dès parties non vides de $\underset{\sim}{N}$ telle que, pour tout $a \in A$,

$$(18) \quad \lambda a = \{ \sum_{i=1}^{p} d_i \mid p \in \underset{\sim}{P} , \ a = \prod_{i=1}^{p} b_i , \ d_i \in \lambda b_i , \ b_i \in B \ \ (1 \leqslant i \leqslant p) \}$$

On dira aussi que a possède la pseudo-longueur d si $d \in \lambda a$.

Le théorème 1 se généralise alors en un nouveau résultat.

THÉORÈME 2. - Soit A un semi-groupe muni d'une pseudo-longueur λ relativement à un système B de générateurs. Notons A_d la classe des éléments de A qui possèdent la pseudo-longueur $d \in \underset{\sim}{N}$. Si Card $A_d \leqslant m < \infty$; $\forall\, d \in \underset{\sim}{N}$, il existe $j \in \underset{\sim}{N}$ et un semi-groupe fini S tels que $\bigcup_{d \geqslant j} A_d$ est image homomorphe d'un sous-semi-groupe T de $\underset{\sim}{N} \times S$. En outre, j et Card S sont bornés par des fonctions de m , λ et Card B . Enfin l'image de $(\{d\} \times S) \cap T$ est A_d , $\forall\, d \geqslant j$.

Preuve. - Remarquons d'abord qu'on peut supposer $\lambda b \subset \underset{\sim}{P}$, $\forall\, b \in B$. Posons en effet $\bar{A} = A \setminus A_o$ et $H = B \cap \bar{A}$, où A_o est la classe des éléments de A possédant la longueur 0 . Il suffit de prouver le théorème pour $\bar{A}$. Or $\bar{A}$ est engendré par l'ensemble fini :

$$\bar{B} = A_o H A_o \cup A_o H \cup H A_o \cup H$$

qui satisfait à $\lambda \bar{b} \subset \underset{\sim}{P}$, $\forall\, \bar{b} \in \bar{B}$.

Par ailleurs on peut supposer Card $\lambda a = 1$, $\forall a \in A$ (λ se réduit alors à un morphisme de A dans $\underset{\sim}{N}$) . Soit en effet A_1 se semi-groupe de $\underset{\sim}{N} \times A$ engendré par $B_1 = \{(n , b) \mid b \in B , \ n \in \lambda b\}$. Les projections $\pi_1 : A_1 \to \underset{\sim}{N}$ et $\pi_2 : A_1 \to A$ vérifient $\lambda a = \pi_1(\pi_2^{-1} a)$, $\forall a \in A$. Il suffit donc de prouver le théorème 2 pour A_1 .

Nous allons donc poser $B = \{b_1 , b_2 , \ldots , b_k\}$, et considérer λ comme un morphisme de A dans $\underset{\sim}{P}$ donné par $\lambda b_i = d_i \in \underset{\sim}{P}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Il est commode de considérer au lieu de A le monoïde A' obtenu en lui adjoignant un élément neutre $\varepsilon \notin A$, et de poser $\lambda\varepsilon = 0$.

Donnons-nous un ensemble $X = \{x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant j \leqslant d_i\}$, et posons

$$\bar{B} = \{\bar{b}_i = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{d_i}} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \subset X^* .$$

Soient $\hat{\alpha} : \bar{B}^* \to A'$ le morphisme de monoïdes tel que $\hat{\alpha}\bar{b}_i = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, et α la congruence sur $\bar{B}^*$ canoniquement associée à $\hat{\alpha}$. On remarque que $|g| = \lambda(\hat{\alpha}g)$, $\forall\, g \in \bar{B}^*$. Soient β la congruence sur X^* engendrée par α, et $\hat{\beta} : X^* \to Q = X^*/\beta$ le morphisme associé. On a $\alpha = \beta \cap (\bar{B}^* \times \bar{B}^*)$. On peut donc ([1], vol. 2, § 9.1) **plonger d'une façon naturelle A' dans Q en écrivant (à un isomorphisme près) :**

$$\hat{\beta}g = \hat{\alpha}g , \quad \forall\, g \in \bar{B}^* . \tag{19}$$

Posons :

$$J = \{f \in X^* \mid X^* f X^* \cap \bar{B}^* = \emptyset\}$$
$$R = \{r \in X^* \mid XX^* r \cap \bar{B} \neq \emptyset\}$$
$$L = \{\ell \in X^* \mid \ell X X^* \cap \bar{B} \neq \emptyset\}$$
$$C = \{c \in XX^* \mid XX^* c X X^* \cap \bar{B} \neq \emptyset\} .$$

On a

$$X^* = J \cup R\bar{B}^*L \cup C \quad \text{et} \quad J \cap (R\bar{B}^*L \cup C) = \emptyset . \tag{20}$$

J, résidu de $\bar{B}^*$ dans X^*, est non vide sauf si $d_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ auquel cas le théorème 2 se réduit trivialement au théorème 1. J étant idéal de X^*, $\hat{\beta}J$ est idéal de Q. Soit $\hat{\theta} : Q \to \mathbb{D}$ le morphisme canoniquement associé à la congruence de Rees modulo $\hat{\beta}J$ [1]. $\mathbb{D}$ est engendré par $E = \hat{\beta}\hat{\theta}X$. Soit $z = \hat{\beta}\hat{\theta}f$, $\forall\, f \in J$ le zéro de $\mathbb{D}$. Montrons que $\mathbb{D}$ est à générations bornées. Soit $t \in \underset{\sim}{P}$. Si $u \in E^t$, il existe $f \in X^*$ tel que $|f| = t$ et $u = \hat{\beta}\hat{\theta}f$.

Si en outre $u \neq z$, on a $f \notin J$, donc, par (20), $f \in R\bar{B}^*L \cup C$.

Si $f \in R\bar{B}^*L$, on peut écrire $f = rg\ell$, $r \in R$, $g \in \bar{B}^*$, $\ell \in L$.

Si $\Lambda = \sup\{d_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, on a :

$$t - 2(\Lambda - 1) \leqslant |g| = t - |r| - |s| \leqslant t .$$

Or $|g| = \lambda(\hat{\theta}g)$. Donc $\hat{\theta}g$ appartient à un ensemble de cardinal $\leqslant m(2\Lambda - 1)$.

Si, au contraire, $f \in R\bar{B}^*L$, $f \in C$ qui est un ensemble fini. Par conséquent, on a

$$\operatorname{Card} E^t \leqslant 1 + (\operatorname{Card} R)^2\, m(2\Lambda - 1) + \operatorname{Card} C = m_1 .$$

En vertu du théorème 1, il y aura alors $j \in \underset{\sim}{P}$, un semi-groupe fini S, $T_1 \subset \underset{\sim}{N} \times S$, et un épimorphisme

$$\varphi_1 : T_1 \to (E^j) = \bigcup_{t \geqslant j} E^t .$$

Par ailleurs, la restriction de $\hat{\theta}$ à $A' = \hat{\rho}\overline{B} \subset Q$ est un isomorphisme ψ de A' sur $A'' \subset D$ qui est tel que $\forall a'' \in A''$, $a'' \in E^t \iff t = \lambda(\psi^{-1} a'')$.

On a donc

$$\psi^{-1}(A'' \cap (E^j)) = \bigcup_{d \geqslant j} A_d ,$$

d'où l'existence d'un épimorphisme

$$\varphi : T \to \bigcup_{d \geqslant j} A_d ,$$

en prenant

$$\varphi = \psi^{-1} \varphi_1 \quad \text{et} \quad T = \varphi^{-1} \bigcup_{d \geqslant j} A_d .$$

3. Application aux semi-groupes répétitifs.

Si X est un ensemble, appelons mots les éléments du semi-groupe libre sans élément neutre $XX^* \subset X^*$. Si $g \in XX^*$ et $f \in X^* g X^*$, g est facteur de f. Si en plus $g = g_1 g_2 \cdots g_k$, $g_i \in XX^*$, $g_1, g_2, \ldots$ sont k facteurs consécutifs de f.

Reprenons la définition ([2], [3]) des semi-groupes répétitifs.

Définition. - Un semi-groupe D est dit répétitif si, quels que soient l'ensemble fini X, le morphisme $\varphi : XX^* \to D$ et $k \in \underset{\sim}{P}$, il existe un entier $L = L_\varphi(k)$ tel que tout $f \in X^L X^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo φ.

Remarque. - Il revient au même d'imposer φX fini au lieu de X fini.

Le théorème 2 de [3] peut se généraliser ainsi :

THÉORÈME 3. - Soit $\theta : D \to E$ un morphisme de semi-groupe tel que $\operatorname{Card} \theta^{-1} u \leqslant m \in \underset{\sim}{P}$, $\forall u \in E$. Alors si E est répétitif, D l'est aussi.

Preuve. - Soit le morphisme $\varphi : XX^* \to D$ où X est fini. On va montrer que si L est convenablement choisi, tout $f \in X^L X^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo φ. Considérons le morphisme $\psi = \theta\varphi : XX^* \to E$. E étant répétitif, prenons $L = L_\psi(q)$ où $q \in \underset{\sim}{P}$ est arbitraire pour l'instant. Le mot f possède q facteurs consécutifs $f_1, f_2, \ldots, f_q$ ayant même image u par ψ.

Posons :

$$\varphi f_i = b_i \in D , \text{ d'où } \theta b_i = u \in E \quad (1 \leqslant i \leqslant q) .$$

Le sous-semi-groupe A de D engendré par $B = \{b_i \mid 1 \leqslant i \leqslant q\}$ est à générations bornées par m puisque $B^t \in \theta^{-1}(u^t)$.

On peut donc, par le théorème 1, trouver $j \in \underset{\sim}{P}$ borné par une fonction de m seul un semi-groupe fini S de cardinal $< s$ fonction de m seul, $T \subset \underset{\sim}{N} \times S$ et un épimorphisme $\alpha : T \to \bigcup_{t \geqslant j} B^t$.

Comme on peut sans inconvénient remplacer j par une valeur supérieure, on considèrera que j ne dépend que de m .

Pour tout $a \in B^j$, choisissons un élément noté $\mu(a)$ dans $T \cap (\{j\} \times S) \cap \alpha^{-1} a$

Soient $G = \{g \in XX^* \mid \varphi g \in B^j\}$, et $\bar{G}$ un ensemble en correspondance bijective avec G par la bijection $\beta : \bar{G} \to G$.

Considérons le morphisme $\omega : \bar{G}\bar{G}^* \to \underset{\sim}{N} \times S$ donné par

$$\omega \bar{g} = \mu\varphi(\beta \bar{g}), \quad \forall\ \bar{g} \in \bar{G} . \tag{21}$$

Il appartient à l'ensemble de morphismes de semi-groupes

$$\Omega = \{\omega' \mid \omega' : Y Y^* \to \underset{\sim}{N} \times S' , \ \text{Card } S' < s , \ \omega' Y \subset \{j\} \times S'\} .$$

D'après le théorème 1 de [3], tout produit direct de $\underset{\sim}{N}$ par un semi-groupe fini est répétitif. On voit facilement que l'ensemble $\{L_{\omega'}(k) \mid \omega' \in \Omega\}$ est fini. Soit r sa borne supérieure. Nous prendrons $q = rj$.

Mettons en évidence, dans f , r facteurs consécutifs

$$g_i = f_{x+1} f_{x+2} \cdots f_{x+j} \quad \text{où} \quad x = (i-1)j .$$

Soit $\bar{g}_i = \beta^{-1} g_i \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$. Le mot $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \cdots \bar{g}_r \in \bar{G}\bar{G}^*$ possède k facteurs consécutifs congrus modulo ω , puisque $r \geqslant L_\omega(k)$. En vertu de (21), les facteurs correspondants de $g_1 g_2 \cdots g_r$ seront congrus modulo φ .

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.), PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups. Vol. 1 and vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] JUSTIN (J.). - Propriétés combinatoires de certains semi-groupes. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, série A, p. 1113-1115.

[3] JUSTIN (J.). - Généralisation du théorème de Van der Waerden sur les semi-groupes répétitifs (à paraître).

Jacques JUSTIN
19 rue de Bagneux
92 - SCEAUX

(Texte reçu le 11 mars 1970)