

SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

MARCEL P. SCHÜTZENBERGER

Une application de la théorie de la décomposition des monoïdes

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 5, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A5_0

© Séminaire Schützenberger

(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schützenberger » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DE LA DÉCOMPOSITION DES MONOÏDES

par Marcel P. SCHÜTZENBERGER

1. Introduction.

Étant donné un alphabet (fini ou non) X , et une famille $\mathcal{M}$ de monoïdes, désignons par $\mathcal{M}(X)$ la famille de toutes les parties de X^* de la forme $Y^* \cap M' \mu^{-1}$, où Y est une partie finie de X , μ un morphisme de X^* dans un monoïde $M \in \mathcal{M}$, et M' une partie de M .

On se propose de caractériser $\mathcal{M}(X)$ par une traduction à peu près directe de la théorie de la décomposition des monoïdes, dans le cas où $\mathcal{M}$ est la famille de tous les monoïdes finis tels que leurs groupes appartiennent à une famille donnée $\mathcal{G} \neq \emptyset$ de groupes finis, fermée par produit en couronne, et contenant les diviseurs de ses membres.

Pour ce faire, on supposera X infini, et, étant donné une famille $\mathcal{A}$ de parties de X^* , et deux parties finies $Y, Z \subset X$, on désignera par $\Lambda(\mathcal{A})$ la famille des substitutions $\lambda : Z^* \rightarrow Y^*$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

- $Z\lambda$ est non ambigu ;
- Il existe une partition $Y = Y_1 \cup Y_2$ telle que, pour chaque $z \in Z$, $z\lambda$ soit une union de parties de la forme $A_y y$, où $y \in Y_1$, $A_y \subset Y_2^*$, $A_y \in \mathcal{A}$.

Ceci posé, on vérifiera la propriété :

Propriété. - $\mathcal{M}(X)$ est la plus petite famille $\mathcal{A}$ de parties de X^* telle que :

- (i) Toute partie finie non ambiguë de X^* appartient à $\mathcal{A}$;
- (ii) $\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{A}$;
- (iii) $\mathcal{A}$ est fermée par les opérations polynomiales non ambiguës (i. e., si $A, B \in \mathcal{A}$,

$$A \cup B \text{ non ambigu} \implies A \cup B \in \mathcal{A} ,$$

$$AB \text{ non ambigu} \implies AB \in \mathcal{A}) ;$$

- (iv) Si Y et Z sont deux parties finies de X , $\lambda \in \Lambda(\mathcal{A})$, $B \in \mathcal{A}$, $B \subset Z^*$, alors $B\lambda \in \mathcal{A}$.

2. Vérification de $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(X)$.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Il résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{S}(X)$ et de $\mathcal{A}$ qu'il existe une partie finie $V \subset X$ telle que $A \subset V^*$. De plus, A est non ambigu par définition, si A est fini, s'il appartient à $\mathcal{S}(X)$, ou s'il est union ou produit de deux autres parties de $\mathcal{A}$. Si A est obtenu par substitution $A = B\lambda$ ($\lambda : Z^* \rightarrow Y^*$, $\lambda \in \Lambda(\mathcal{A})$, $B \subset Z^*$, non ambigu), A est encore non ambigu, puisque $Z\lambda \subset Y_2^* Y_1$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, implique que tout mot de $Z^* \lambda$ ait au plus un facteur gauche dans $Z\lambda$.

Considérant le monoïde syntactique M de A dans V^* , il suffit donc de vérifier que tout groupe dans M appartient à $\mathcal{S}$. Ceci est clair, si A est fini ou appartient à $\mathcal{S}(X)$. Le même résultat découle d'un énoncé connu, si $A = B \cup C$ ou $A = BC$, où $B, C \in \mathcal{M}(X)$. Il suffit donc de considérer le cas où $A = B\lambda$, avec $\lambda : Z^* \rightarrow Y^*$, $\lambda \in \Lambda(\mathcal{M}(Y))$, $B \in \mathcal{M}(Z)$.

Adjoignant au besoin une lettre supplémentaire à Z , il est loisible de supposer que $Z\lambda = Y_2^* Y_1$.

Considérons les parties $A_y \subset Y_2^*$ ($y \in Y_1$) intervenant dans la définition de λ . Chacune d'elles a son monoïde syntactique dans $\mathcal{M}$. Comme Y_1 est fini, il existe donc un monoïde $P \in \mathcal{M}$, et un morphisme $\pi : Y^* \rightarrow P$ tel que chaque A_y soit de la forme $P_y \pi^{-1}$ ($P_y \subset P$).

Soit, d'autre part, $\chi : Z^* \rightarrow Q$ le monoïde syntactique de $B \subset Z^*$.

Nous définissons un morphisme ρ de Y^* dans le monoïde des applications $Q \times P \rightarrow Q \times P$ en posant, pour chaque $(q, p) \in Q \times P$, $y \in Y$,

$$\begin{aligned} (q, p)y &= (q, p.y\pi), & \text{si } y \in Y_2, \\ &= (q.z\chi, 1), & \text{si } y \in Y_1, \end{aligned}$$

$$p \in P_y, \quad A_y y \subset z\lambda.$$

Par construction, $B\lambda$ est image inverse d'une partie du monoïde $R = Y^* \rho$, et R est un sous-monoïde du produit en couronne $Q \circ \bar{P}$, où $\bar{P}$ est obtenu en "ajoutant les constantes au t. m. (P, P) " (c'est-à-dire, où $\bar{P}$ est isomorphe au quotient du produit libre $P \star u = P'$ par les relations $p'u \equiv u$ ($p' \in P'$)). Il est connu que $Q, P \in \mathcal{M}$ implique $\bar{P} \in \mathcal{M}$ et $Q \circ P \in \mathcal{M}$, et le résultat est donc établi.

3. Vérification de $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{A}$.

Considérons $A \in \mathcal{M}(X)$. Par hypothèse, il existe une partie finie $Y \subset X$, un monoïde $M \in \mathcal{M}$, et un morphisme $\mu : Y^* \rightarrow M$, tels que A soit une union de parties de la forme $m\mu^{-1}$ ($m \in M$). Sans perte de généralité, on supposera désormais que $A = m\mu^{-1}$, et on prouvera $A \in \mathcal{A}$ par induction sur $\text{Card } M$, en éliminant d'abord trois cas particuliers.

(1) M est un groupe. - La conclusion $A \in \mathcal{A}$ résulte immédiatement de $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{A}$.

Comme $\{1\}$ est un groupe dans $\mathcal{S}$, ceci couvre le premier cas de l'induction. Il en résulte de plus que $Z^* \in \mathcal{A}$, pour toute partie finie Z de X , puisque $Z^* = 1\nu^{-1}$, où ν est le morphisme de Z^* sur $\{1\}$.

(2) M est cyclique. - On a $\mu = \psi\mu'$, où $\psi : Y^* \rightarrow \mathbb{N}$ et $\mu' : \mathbb{N} \rightarrow M$ sont deux morphismes. Donc, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$A = (p + q\mathbb{N})\psi^{-1} \quad (= A(p, q)) ,$$

où, en outre, $\mathbb{Z}_q \in \mathcal{S}$, en convenant que $\mathbb{Z}_0 = \{0\}$.

Si $0 = p = q$, ou si $q > 0$, $0 \leq p \leq q - 1$, on a

$$A(p, q) = p(\psi\pi)^{-1} ,$$

où π est le morphisme naturel de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}_q$, et le résultat découle du (1) ci-dessus.

Dans les autres cas, on a la formule

$$A(p, q) = \sum_{1 \leq j} (Y_n \circ \psi^{-1})^* (Y_n j\psi^{-1}) A(p_j^!, q) ,$$

où $p_j^!$ est le plus petit élément de $\mathbb{N} \cap (p - j + q\mathbb{N})$. Comme le membre de droite est manifestement non ambigu, le résultat découle de l'hypothèse d'induction du cas traité ci-dessus, puisque $p_j^! \geq q \implies p_j^! < p$.

(3) $M = 1 \cup L$, où L est une $\mathcal{L}$ -classe. - On sait qu'il existe un groupe G , et un morphisme $\gamma : M \rightarrow G$ tel que, pour chaque $h \in L$, la restriction à hM de γ soit un isomorphisme.

Ceci implique

$$h\mu^{-1} = (Y_n 1\mu^{-1})^* \sum \{ (Y_n h'\mu^{-1}) \cdot g(\mu\gamma)^{-1} : h' \in hM, g = (h'\gamma)^{-1} (h\gamma) \in G \} ,$$

établissant $h\mu^{-1} \in \mathcal{A}$ pour $h \in L$. Comme $L^2 = L$, on a $1\mu^{-1} = (Y_n 1\mu^{-1})^*$, un cas déjà traité.

Nous considérons maintenant le cas où M ne rentre dans aucune des catégories envisagées ci-dessus. D'après le lemme de Krohn et Rhodes, il existe :

- Un idéal à gauche non vide $L \not\subseteq M \setminus 1$,
- Un sous-monoïde $T \neq 1, M$,

tels que $M \subset L \cup T$.

Posons

$$Y_1 = Y \cap L\mu^{-1}; \quad Y_2 = (Y \setminus Y_1) \cap T\mu^{-1}.$$

L'hypothèse d'induction permet de supposer que Y_1 et Y_2 sont non vides, et comme M est fini, nous pouvons prendre un alphabet fini Z et une bijection $\nu : Z \rightarrow L' = L \cap (Y_2^* Y_1)\mu$. Définissons une substitution $\lambda : Z^* \rightarrow Y^*$, en posant, pour chaque $z \in Z$,

$$z\lambda = \{g \in Y_2^* Y_1 : g\mu = z\nu\}.$$

Par construction, $z\lambda$ est union disjointe de parties de la forme $A_y y$, où $y \in Y_1$, $A_y \in Y_2^*$, $Y_2 \cap Y_1 = \emptyset$, et où $A_y \in \mathcal{A}$, puisque A_y est image inverse, donc partie du sous-monoïde $T \not\subseteq M$. Donc $\lambda \in \Lambda(\mathcal{A})$.

Maintenant, l'identité $Y^* = (Y_2^* Y_1)^* Y_2^*$ montre que chaque $a \in A$ a exactement une factorisation $a = a_1 a_2$, où $a_1 \in (Y_2^* Y_1)^*$, $a_2 \in Y_2^*$. Par conséquent, A est une union finie disjointe de produits non ambigus de la forme $A_1 A_2$, où

$$A_1 = (Y_2^* Y_1)^* \cap m\mu^{-1} \quad (m \in 1 \cup L),$$

$$A_2 = Y_2^* \cap m\mu^{-1} \quad (m \in T).$$

La deuxième relation implique $A_2 \in \mathcal{A}$, d'après $T \not\subseteq M$ et l'hypothèse d'induction, et, puisque $\mathcal{A}$ est fermé, par les opérations polynomiales non ambiguës, il suffit de montrer $A_1 \in \mathcal{A}$. Or la première relation équivaut à $A_1 = B\lambda$, où $B = m\nu^{-1}$, et où $\nu : Z^* \rightarrow 1 \cup L$ est le morphisme étendant la bijection $\nu : Z \rightarrow L'$. Comme $L \not\subseteq M \setminus 1$, on a $\text{Card}(1 \cup L) < \text{Card}(M)$, d'où $B \in \mathcal{A}$, par induction, et le résultat est établi.

(Texte reçu le 19 janvier 1971)