

SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

CLAUDE LENORMAND

Opérateurs sur les polynômes non commutatifs définitions et notations

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 3, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A3_0

© Séminaire Schützenberger

(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schützenberger » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

25 novembre 1969

OPÉRATEURS SUR LES POLYNÔMES NON COMMUTATIFS

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

par Claude LENORMAND

I. Polynômes et séries sur un monoïde

Dans tout le texte, la lettre A désignera un anneau unitaire ; l'élément unité de A sera noté 1 , et le zéro sera noté 0 . On supposera que A contient l'ensemble des entiers algébriques.

Définition 1. - Etant donnés un monoïde M et un anneau unitaire A , le A -module $S = A^M$ des applications de M dans A est l'espace des séries sur M , à coefficients dans A .

On appelle support d'une série $s \in S$, le support de l'application de M dans A que la série représente, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $m \in M$ tels que $s(m) \neq 0$.

Définition 2. - Le A -module $P = A^{(M)}$ des applications de M dans A , dont le support est fini, est l'espace des polynômes sur M , à coefficients dans A .

Le A -module P est un sous-module du A -module S , et M est une base de P .

Une série $s \in S$ sera dite caractéristique d'une partie M' de M , si l'on a $s(m) = 1$ pour $m \in M'$, et $s(m) = 0$ lorsque $m \in M - M'$.

Toute partie M' de M sera assimilée à sa série caractéristique, à commencer par M lui-même (les éléments de M sont alors appelés les monômes de P).

Définition 3. - On appellera forme fondamentale, l'application bilinéaire de $P \times S$ dans A définie par $\langle m, m' \rangle = 1$ lorsque $m = m'$, et $\langle m, m' \rangle = 0$ lorsque $m \neq m'$, en notant $\langle f, g \rangle$ l'image par la forme fondamentale du couple $(f, g) \in P \times S$.

Ceci permet notamment d'orthogonaliser toute suite libre de polynômes.

Mais, surtout, cette forme bilinéaire permet de considérer les modules S et P comme duaux.

Toute série $s \in S$ s'écrira alors

$$s = \sum_{m \in M} \langle m, s \rangle m ,$$

et toute forme sur P est assimilée à une telle série (par exemple, e étant l'élément unité de M , et $p \in P$ un polynôme, $\langle p, e \rangle$ est ce que l'on appelle le terme constant du polynôme p , et $\langle p, X^* \rangle$ la somme des coefficients dudit polynôme).

Définition 4. - On appelle opérateur de P (resp. S), tout endomorphisme du module P (resp. S).

Pour tout opérateur Θ , on notera $\text{Im } \Theta$ son image, et $\text{Ker } \Theta$ son noyau.

Définition 5. - L'opérateur dual d'un opérateur w de P est l'opérateur de S que nous noterons w^t , défini par

$$\langle wf, g \rangle = \langle f, w^t g \rangle , \quad \text{pour tout couple } (f, g) \in P \times S .$$

Une algèbre sur un module M est définie par une application bilinéaire de $M \times M$ dans M , que nous noterons multiplicativement.

Ainsi, l'ensemble des opérateurs de P (resp. S) constitue un A -module, que l'on munit canoniquement d'une structure d'algèbre dont le produit n'est autre que la composition des applications.

De façon générale, notons fg le produit de deux éléments f et g d'une algèbre.

Une dérivation Θ est un opérateur satisfaisant à $\Theta fg = f\Theta g + \Theta f g$.

Pour tout élément f , d'un module muni d'une structure d'algèbre, nous noterons $\exp f$ l'élément $\sum_{n \in \mathbb{N}} f^n / n!$, et $\log(I + f)$ l'élément $-\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (f^i / i)$, lorsque cela a un sens, I notant l'élément unité de l'algèbre. Lorsque f et g commutent, on a $\exp(f + g) = \exp f \exp g$; enfin, si Θ est une dérivation, et si f commute avec Θf , on a $\Theta \exp f = \Theta f \exp f$.

II. Algèbres sur un monoïde libre

Etant donné un ensemble X fini, nous noterons X^* le monoïde libre engendré par X , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de X , muni de la composition des suites finies par concaténation.

Une suite finie d'éléments de X , ou mot $m = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur l'alphabet X , sera éventuellement notée multiplicativement $m = x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i \in [n]} x_i$,

où l'on note $[n]$ l'ensemble totalement ordonné des n premiers entiers, zéro exclu.

Le mot m apparaît ainsi comme représentatif de l'application μ de $[n]$ dans X , telle que $\mu(i) = x_i$ pour tout $i \in [n]$.

De fait, les constructions qui suivent pourraient être présentées de manière catégorielle, en utilisant les notations d'EILLENBERG et WRIGHT [2].

Nous noterons e l'élément neutre de X^* , et mm' la composition des mots m et m' .

Dans la suite, X^* est pris pour monoïde M .

Nous considérerons, sur P , les trois algèbres de Hadamard, Cauchy, et Hurwitz, ainsi définies :

Définition 6. - L'algèbre de Cauchy sur P est définie par l'application bilinéaire b de $P \times P$ dans P , telle que

$$b(m', m) = m'm,$$

pour tout couple (m', m) d'éléments de X , le produit $m'm$ étant celui de X^* .

On notera fg ou $f.g$ le produit non commutatif de deux polynômes dans l'algèbre de Cauchy ; nous utiliserons les deux notations, ainsi, si w est un opérateur, wfg sera interprété comme $w(fg)$, et $wf.g$ comme $(wf)g$. Le crochet de Lie $[f, g]$ sera relatif à l'algèbre de Cauchy, et l'on notera f^n la puissance n -ième de f dans l'algèbre de Cauchy. Nous utiliserons aussi le crochet de Lie $[w, w']$ pour deux opérateurs w, w' .

Il est clair que l'application bilinéaire, définissant l'algèbre de Cauchy sur P , s'étend en une application bilinéaire de $S \times S$ dans S , et l'algèbre de Cauchy est définie sur S .

L'algèbre de Cauchy admet un anti-isomorphisme déterminé par

$$\sim mm' = \sim m' . \sim m, \quad \sim x = x \text{ si } x \in X,$$

et à tout opérateur W correspond l'opérateur $\sim W \sim$, conjugué de w par $\sim$.

Par ailleurs, le morphisme d'algèbre α , tel que $\alpha x = -x$ pour tout $x \in X$, est appelé involution principale de l'algèbre de Cauchy de P .

Lorsque l'on parlera de l'opérateur conjugué de l'opérateur w , sans autre précision, il s'agira de l'opérateur $\alpha w \alpha$, conjugué de w par l'involution principale.

L'algèbre de Cauchy peut être définie sur l'espace des polynômes de tout monoïde,

et sur l'espace des séries de tout monoïde M à factorisation finie, c'est-à-dire tel que tout élément $m \in M$ puisse s'écrire d'un nombre fini de façons sous la forme $m = m'm''$, m' et m'' étant deux éléments de M . Dans ce cas, M^{-1} est la série de Möbius du monoïde (cf. [1]), et la série de Möbius du produit direct des deux monoïdes est le produit tensoriel des séries de Möbius.

Définition 7. - L'algèbre de Hurwitz sur $P = Z^{(X^*)}$ peut être définie par l'application bilinéaire b de $P \times P$ dans P , définie par récurrence sur la base de P par

$$b(xm, ym') = xb(m, ym') + yb(xm, m'),$$

pour tout couple (m, m') d'éléments de X , et tout couple (x, y) d'éléments de X , étant donné que $b(e, m) = m$.

Il est immédiat que ce produit est commutatif, et l'application b ainsi définie s'étend en un produit commutatif sur S .

On notera $f \omega g$ le produit de Hurwitz de deux séries, et f^{un} la puissance n -ième de la série f pour ce produit.

Remarque 1. - Si l'on assimile toute partie de X^* ou X à sa série caractéristique, on a $X^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} X^n$, en notant X^n le polynôme puissance n -ième du polynôme caractéristique de X ; la série X^* est inverse de $e - X$ dans l'algèbre de Cauchy.

Par ailleurs, $X \omega X^n = X.X^n + X.X \omega X^{n-1}$, soit finalement $X \omega X^n = (n+1)X^{n+1}$, et $X^{un} = n! X^n$; la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n! X^n$ est ainsi inverse de $e - X$ pour le produit de Hurwitz (ceci a un sens, même si X est infini).

Remarque 2. - Voici une importante propriété du produit de Hurwitz; soit X et Y deux alphabets disjoints, et $X + Y$ leur union (on réservera la notation $X + Y$ au cas $X \cap Y = \emptyset$); on a

$$(X + Y)^* = X^* \omega Y^*,$$

ce qui résulte de

$$(X + Y)^n = \sum_{i+j=n} X^i \omega Y^j,$$

comme cela s'établit immédiatement par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$.

En particulier, on a

$$X^* = \omega_{x \in X} (1 - x)^{-1} = \omega_{x \in X} \{x\}^*.$$

Remarque 3. - On notera σ l'homomorphisme canonique de l'algèbre de Cauchy dans celle de Hurwitz, défini par $\sigma m' m = \sigma m' \omega \sigma m$, pour tout couple (m, m') d'éléments de X^* , et $\sigma x = x$ pour $x \in X$.

Ce morphisme d'algèbre est un isomorphisme, lorsque l'alphabet X est réduit à une lettre, et seulement dans ce cas.

Notons alors $\exp X$ la série

$$\exp X = \sum_{n \in \mathbb{N}} X^n / n! ,$$

en supposant que l'anneau A contient l'anneau $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. En vertu de la remarque 1 ci-dessus, on a

$$\sigma \exp X = X^* .$$

Remarque 4. - Soient S^+ le sous-module des séries $s \in S$, telles que $\langle s, e \rangle = 0$, β la bijection de S^+ sur S^+ , définie par

$$\beta s = \sum_{n \in \mathbb{N}} s^{n+1} ,$$

et i l'involution telle que

$$is = -s .$$

On a alors

$$\beta^{-1} = i\beta i ,$$

mais β n'est pas linéaire, et ce n'est pas un opérateur.

Par ailleurs, la bijection ζ de S^+ sur S^+ , définie par

$$\zeta s = \exp s - 1 = \sum_{n > 0} s^n / n! ,$$

pour tout $s \in S^+$, admet pour inverse la bijection

$$\zeta^{-1} s = \log(1 + s) = - \sum_{n > 0} (-s)^n / n .$$

Définition 8. - L'algèbre de Hadamard sur P est définie par l'application bilinéaire b ainsi définie sur la base X^* de P :

$$b(m, m') = \begin{cases} m , & \text{si } m = m' , \\ 0 , & \text{si } m \neq m' , \end{cases}$$

où 0 est la série dont tous les coefficients sont nuls.

Le produit de Hadamard s'étend en un produit de S , et ce produit est évidemment commutatif.

On notera $f \text{ H } g$ le produit de Hadamard des séries f et g .

Il est clair que le produit de Hadamard peut être défini, quel que soit le monoïde M considéré, et quel que soit l'anneau unitaire A .

Toute dérivation ∂ du produit de Hadamard satisfait à

$$\partial(m \text{ H } m) = 2m \text{ H } \partial m,$$

ce qui entraîne

$$\partial m = \lambda m \quad \text{et} \quad \lambda m = 2\lambda m.$$

Excepté sur un anneau de caractéristique 2, le produit de Hadamard n'admet que la dérivation triviale $\partial m = 0$ pour tout $m \in X^*$.

III. Quelques opérateurs essentiels

Module des dérivations. - Toute dérivation ∂ de l'algèbre de Cauchy de P s'étend en une dérivation de S ; par contre, toute dérivation de S n'est pas une dérivation de P . Toute dérivation de P ou S est déterminée par son action sur les éléments de X .

Ainsi, pour définir une dérivation de P (resp. S), il suffit de se donner une application de X dans P (resp. S).

A tout élément $x \in X$, associons la dérivation partielle D_x définie par

$$D_x y = \langle x, y \rangle e.$$

L'ensemble des dérivations de P (resp. S) est donc un P -module (resp. S -module), dont une base est constituée par l'ensemble des dérivations partielles D_x , lorsque x parcourt X .

On notera ∂_x la dérivation qui s'écrit $x D_x$ dans le module des dérivations, et telle que $\partial_x y = \langle x, y \rangle x$ pour tout $y \in X$.

Nous noterons $D = \sum_{x \in X} D_x$ la dérivation totale, et c'est de D qu'il s'agira lorsque l'on parlera de l'opérateur de dérivation, sans autre précision; on a

$$Dx = e, \quad \text{quel que soit } x \in X.$$

On notera $\partial = \sum \partial_x$, la dérivation satisfaisant à $\partial x = x$ quel que soit $x \in X$.

Image commutative et degrés. - Notons $M = \prod_{x \in X} \{x\}^*$ le produit direct des monoïdes libres monogènes engendrés par les éléments de X , et γ l'homomorphisme canonique de X^* sur M tel que $\gamma x = x$ (l'élément x est considéré, à gauche de cette dernière relation comme élément de X , et à droite comme élément de M) et

$$\begin{aligned}\gamma m m' &= \gamma m \cdot \gamma m' \\ &= \gamma m' \cdot \gamma m \quad .\end{aligned}$$

Soient p_x le projecteur de M sur $\{x\}^*$, et φ_x l'isomorphisme de $\{x\}^*$ sur $\mathbb{N}$; l'application $\lambda_x = \varphi_x \circ p_x \circ \gamma$ fait correspondre à tout mot $m \in X^*$ son degré partiel en x , et l'on a aussi $\partial_x m = (\lambda_x m) \cdot m$. On notera

$$\lambda m = \sum_{x \in X} \lambda_x m$$

le degré (total) de tout mot $m \in X^*$, c'est-à-dire l'image de m par l'homomorphisme ψ de M dans $\mathbb{N}$ tel que $\psi x = 1$ pour tout $x \in X$.

On a $\partial m = (\lambda m) m$.

On notera P_n le sous-module des polynômes homogènes de degré n , et éventuellement W_n la restriction d'un opérateur W à P_n : ainsi, D_n est une application de P_n dans P_{n-1} .

Séries comme opérateurs. - À tout mot $m \in X^*$ sont associés les opérateurs suivants, que nous définirons sur la base de P :

(1) L'opérateur $\hat{m}$ qui, à tout mot $m' \in X^*$, fait correspondre le mot mm' ; mais aussi l'opérateur qui, au mot m' , fait correspondre le mot $m'm$: c'est là l'extension à l'algèbre de X^* des représentations régulières de X^* ; si $m = m_1 m_2 \dots m_p$ est la décomposition de m sur X , $\hat{m}$ est le produit $\hat{m}_1 \hat{m}_2 \dots \hat{m}_p$; le dual de $\hat{x}$, pour $x \in X$ est défini, par

$$\langle \hat{x} m', m'' \rangle = \langle m', \hat{x}^t m'' \rangle = 1$$

si $m'' = xm'$, et 0 dans tout autre cas: l'opérateur $\hat{x}^t$ satisfait donc à

$$\hat{x}^t m'' = m' \quad \text{si } m'' = xm', \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon} \quad .$$

Notons alors $\hat{X}$ l'opérateur $\sum_{x \in X} \hat{x}$; l'opérateur dual $\hat{X}^t = \sum_{x \in X} \hat{x}^t$ satisfait à $\hat{X}^t xm = m$ pour tout $m \in X^*$ et tout $x \in X$, et $\hat{X}^t e = 0$.

Considérons l'opérateur $\hat{X}^*$ tel que $\hat{X}^* m = X^* m$: l'opérateur dual $\hat{X}^{*t}$ est tel que, pour tout mot $m \in X^*$, $\hat{X}^{*t} m$ est le polynôme caractéristique des

facteurs droits de m ; l'opérateur $\hat{X}^{*t}$, conjugué par l'anti-isomorphisme $\sim$, fait alors correspondre à tout mot le polynôme caractéristique de ses facteurs gauches (e et m inclus) ; finalement, le polynôme $\hat{X}^{*t} \hat{X}^{*t} m$ est le polynôme des facteurs de m .

(2) L'opérateur associé à m qui, à tout mot $m' \in X^*$, fait correspondre le polynôme $m \omega m'$. En particulier, à tout $x \in X$, on associe ainsi l'opérateur dual de la dérivation partielle D_x :

PROPOSITION. - L'opérateur de dérivation partielle D_x admet pour opérateur dual l'opérateur D_x^t tel que $D_x^t m = m \omega x$.

Démonstration. - Soient un couple (m, m') d'éléments de X , et un couple (y, z) d'éléments de X ; on a alors (démonstration par récurrence sur les degrés)

$$\langle D_x ym, zm' \rangle = \langle y D_x m, zm' \rangle + \langle x, y \rangle \langle m, zm' \rangle.$$

Or,

$$\langle y D_x m, zm' \rangle = \langle y, z \rangle \langle D_x m, m' \rangle,$$

et, en vertu de l'hypothèse de récurrence,

$$\langle D_x m, m' \rangle = \langle m, x \omega m' \rangle,$$

donc

$$\langle y, z \rangle \langle D_x m, m' \rangle = \langle ym, z(x \omega m') \rangle.$$

Par ailleurs,

$$\langle x, y \rangle \langle m, zm' \rangle = \langle ym, xzm' \rangle,$$

et finalement

$$\langle D_x ym, zm' \rangle = \langle ym, xzm' \rangle + \langle ym, z(m' \omega x) \rangle,$$

soit

$$\langle D_x ym, zm' \rangle = \langle ym, zm' \omega x \rangle,$$

ce que l'on voulait précisément établir. Par ailleurs, il est exact que

$$\langle D_x e, e \rangle = \langle e, e \omega x \rangle = \langle e, x \rangle = 0.$$

(3) À tout mot $m \in X^*$ correspond l'opérateur qui, à tout mot $m' \in X$, associe $m H m'$; cet opérateur, d'une part est idempotent (c'est un projecteur), d'autre part est son propre dual : en effet, on a d'une part,

$$m H m H m' = m H m',$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
 \langle m H m' , m'' \rangle &= \langle m' , m H m'' \rangle \\
 &= 1 \quad \text{si } m = m' = m'' \\
 &= 0 \quad \text{sinon} .
 \end{aligned}$$

De manière générale, tout opérateur w de P , dont la restriction à X^* est une permutation de X :

- (a) peut être étendu en un opérateur de S ,
- (b) est tel que $w^t = w^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTIER (P.) et FOATA (D.). - Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 85).
- [2] EILENBERG (S.) and WRIGHT (J. B.). - Automata in general algebras, Information and Control, t. 11, 1967, p. 452-470.

(Texte reçu le 1er décembre 1970)

Claude LENORMAND
 70 avenue de Verdun
 94 - IVRY
