SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

JEAN BERSTEL

Sur des fractions rationnelles particulières

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 2, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A2_0>

Séminaire SCHUTZENBERGER-LENTIN-NIVAT
(Problèmes mathématiques
de la Théorie des automates)
Année 1969/70, n° 2, 9 p.

18 novembre 1969

SUR DES FRACTIONS RATIONNELLES PARTICULIÈRES

par Jean BERSTEL

1. - Sur des polynômes d'un type particulier.

Rappelons qu'un polynôme $f \in \mathbb{Q}[X]$ est dit à valeurs entières si $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier n. Si f est à valeurs entières de degré m, alors $m!f$ est un polynôme à coefficients entiers. Le théorème suivant est classique ([6], section 8, n° 114 et n° 190) :

THÉORÈME 1.1. Soit $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme à valeurs entières tel que $f(n)$ soit puissance k-ième d'un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est puissance k-ième d'un polynôme g à valeurs entières.

Plusieurs généralisations de ce théorème sont possibles. On peut en effet se demander pour quels types d'ensembles $T \subset \mathbb{Z}$, l'hypothèse " $n \in T$, $f(n)$ puissance k-ième d'un entier" entraîne la conclusion du théorème 1.1. Un premier résultat dans ce sens est le suivant :

THÉORÈME 1.2. - Soit f un polynôme à valeurs entières. S'il existe un entier $M(f)$, dépendant de f, tel que $f(n)$ soit puissance k-ième d'un entier, pour tout n, $0 \leq n \leq M(f)$, alors f est puissance k-ième d'un polynôme g à valeurs entières.

La démonstration est en tout point analogue à celle donnée par PÓLYA et SZEGÖ ([6], section 8, solution du n° 114) pour le théorème 1.1.

Par ailleurs, DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL [2] déduisent d'un résultat beaucoup plus général (théorème 1.8, infra) le corollaire suivant :

THÉORÈME 1.3. - Soit f un polynôme à coefficients entiers. Si dans toute progression arithmétique infinie, il existe un entier n tel que $f(n)$ soit puissance k-ième d'un entier, alors f est puissance k-ième d'un polynôme g à coefficients entiers.

Ce résultat reste vrai si l'on suppose f à valeurs entières. Plus précisément, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.4. - Soit f un polynôme à valeurs entières, et supposons que toute progression arithmétique infinie contienne un entier n tel que $f(n)$ soit puis-

sance k-ième d'un entier. Alors il existe un polynôme g à valeurs entières tel que $f = g^k$.

En effet : Soit m le degré de f , et posons $f' = (m!)^k f$. Alors f' vérifie les hypothèses du théorème 1.3, et s'écrit donc sous la forme $f' = (g')^k$, avec $g' \in \mathbb{Z}[X]$. Comme $m!$ divise $g'(n)$ pour tout n , le polynôme $g = g'/m!$ est à valeurs entières, et on a $f = g^k$.

Q. E. D.

L'existence d'une infinité d'entiers naturels pour lesquels $f(n)$ est puissance k-ième (ou même carré d'un entier) n'implique pas en général que f est puissance k-ième (ou carré d'un polynôme). Considérons en effet le polynôme (irréductible sur $\mathbb{Q}$) :

$$f(x) = dx^2 + 1 , \qquad d > 0 \text{ non carré.}$$

Il existe une infinité d'entiers n tels que $f(n)$ soit un carré, car l'équation de Pell

$$y^2 - dx^2 = 1$$

a une infinité de solutions ([3], § 14.5). On a toutefois le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5. - Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers tel que tout facteur irréductible sur $\mathbb{Q}$ de f soit de degré $\geqslant 3$. Si $f(n)$ est un carré pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$, alors f est le carré d'un polynôme g à coefficients entiers.

La démonstration utilise le théorème suivant, dont LEVEQUE ([4], th. 4-18) attribue la démonstration à un auteur anonyme :

THÉORÈME 1.6. - Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\geqslant 3$, et ayant tous ses zéros distincts. Soit a un entier non nul. Alors l'équation diophantienne

$$ay^2 = f(x)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $x , y \in \mathbb{Z}$.

Démonstration du théorème 1.5. - Nous utilisons le théorème 1.6, avec $a = 1$. Procédons par récurrence sur le nombre k de facteurs irréductibles de f .

Si $k = 1$, le théorème est vrai puisqu'un polynôme irréductible a tous ses zéros distincts : $f(n)$ ne peut donc être carré d'un entier pour une infinité de n en vertu du théorème 1.6.

Supposons donc $k > 1$, et supposons que $f(n)$ soit carré d'un entier pour une infinité de n . Alors f a au moins une racine de multiplicité $\geqslant 2$ en vertu du théorème 1.6. Le polynôme f a alors un facteur irréductible, soit h , de multipli-

cité ≥ 2 , car deux polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$ à coefficients entiers ayant un zéro en commun sont égaux. Considérons alors le polynôme $f' = f/h^2$. Pour ce polynôme, $f'(n)$ est encore un carré pour une infinité d'entiers n , et il a $k - 2$ facteurs irréductibles. Il est donc, par hypothèse de récurrence, carré d'un polynôme $g' \in \mathbb{Z}[X]$. Posant $g = hg'$, on a bien $f = g^2$.

Q. E. D.

Dans ses recherches sur les langages formels, OGDEN ([5], p. 9) a démontré la généralisation suivante du théorème 1.1.

THÉORÈME 1.7. - Soient a , $b \in \mathbb{C}[X]$, vérifiant $a(\mathbb{N}) \subset b(\mathbb{N})$. Alors il existe un polynôme $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $a = b \circ r$.

On retrouve le théorème 1.1 en posant $b(x) = x^k$, et en supposant a à valeurs entières. DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ont établi ([2], th. 1) le théorème très général suivant :

THÉORÈME 1.8. - Soit $F(X , Y) \in \mathbb{Z}[X , Y]$ un polynôme à coefficients entiers. Si toute progression arithmétique infinie contient un entier x tel que l'équation $F(x , y) = 0$ ait une solution entière y au moins, alors il existe un polynôme $r \in \mathbb{Q}[X]$ tel que l'on ait identiquement $F(X , r(X)) = 0$.

Le théorème 1.7 en découle si a et b sont à valeurs entières. Il suffit en effet de poser

$$F(x , y) = D(f(x) - g(y)) ,$$

où D est choisi convenablement pour rendre le polynôme F à coefficients entiers.

Plus généralement, le théorème 1.8 signifie que, parmi les fonctions algébriques solutions d'une équation

$$P_0(x) + P_1(x)y + \ldots + P_r(x)y^r = 0 , \qquad P_i \in \mathbb{Z}[X] ,$$

il y en a une qui est un polynôme, si cette équation admet une solution entière y pour un x au moins dans toute progression arithmétique.

Suivant RAUZY [7], nous appellerons arithmétiquement dense un ensemble $A \subset \mathbb{Z}$ qui rencontre toute progression arithmétique de $\mathbb{Z}$, donc tel que, $\forall\, a , m \in \mathbb{Z}$, il existe $b \in A$ avec $b \equiv a \pmod m$. La terminologie est justifiée par la remarque suivante :

Si l'on munit $\mathbb{Z}$ de la topologie la moins fine qui rend continues les injections canoniques $n \longmapsto n$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$, pour tout nombre premier p , alors une base des voisinages d'un entier a est formée des progressions arithmétiques

$$V_m(a) = \{b \in \underset{\sim}{Z} : \ b \equiv a \pmod m\} \quad \text{pour tout} \quad m \in \underset{\sim}{N}^* ,$$

et par conséquent $\underset{\sim}{A}$ est un sous-ensemble dense de $\underset{\sim}{Z}$ pour cette topologie (RAUZY [7]). Il est clair qu'un sous-ensemble $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{N}$ qui rencontre toute progression arithmétique $\{an + b\}_{n \in \underset{\sim}{N}}$ avec $a , b > 0$ est arithmétiquement dense dans $\underset{\sim}{Z}$, et est aussi dense dans $\underset{\sim}{N}$ pour la topologie définie précédemment.

Donnons quelques propriétés élémentaires des ensembles arithmétiquement denses $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{Z}$:

(a) [2] A rencontre toute progression arithmétique une infinité de fois.

La démonstration suivante est de DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ([2], p. 109) : soit $x_o \equiv a \pmod d$ un terme de la progression arithmétique $\{dk + a : k \in \underset{\sim}{N}\}$ appartenant à $\underset{\sim}{A}$. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $\underset{\sim}{A}$ contient un entier $x_n \equiv x_o + d^n \pmod{d^{n+1}}$ de la progression arithmétique

$$\{d^{n+1} k + x_o + d^n : \ k \in \underset{\sim}{N}\} .$$

Les entiers x_n sont tous distincts, et vérifient évidemment $x_n \equiv a \pmod d$.

(b) Si $a \in \underset{\sim}{Z}$ et $m \in \underset{\sim}{N}^*$, l'ensemble $B = \{k \in \underset{\sim}{Z} : \ a + km \in \underset{\sim}{A}\}$ est arithmétiquement dense.

Considérons en effet une progression arithmétique

$$\alpha = \{a' + k'm : \ k' \in \underset{\sim}{Z}\} .$$

Parmi les entiers k tels que $a + km \in \underset{\sim}{A}$, il y en a au moins un qui s'écrit sous la forme $k = q' + k'm$, car la progression arithmétique $\{a + a'm + k''mm' : k'' \in \underset{\sim}{Z}\}$ rencontre $\underset{\sim}{A}$. L'ensemble $\underset{\sim}{B}$ rencontre donc la progression arithmétique α, et est par conséquent arithmétiquement dense.

(c) [7] L'ensemble $\underset{\sim}{A}' = \{n \in \underset{\sim}{A} : \ n \geq N_o \text{ fixé}\}$ est arithmétiquement dense.

Ceci découle immédiatement de (a).

Considérons maintenant un sous-ensemble $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{N}$ arithmétiquement dense, et rappelons que la densité supérieure d^+P (resp. densité dP lorsqu'elle existe) d'une partie P de $\underset{\sim}{N}$ est définie par

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \underset{\sim}{\text{Card}}\ P \cap \{0 , \dots , n\}\right) \quad \left(\text{resp. } \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \underset{\sim}{\text{Card}}\ P \cap \{0 , \dots , n\}\right) .$$

(d) Si $d^+P = 1$, alors P est arithmétiquement dense.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que P ne rencontre pas la progression arithmétique $\{an + b : \ n \in \underset{\sim}{N}\}$ $(a > 1)$. Soit $m \in \underset{\sim}{N}$, et $n = \left[\frac{m - b}{a}\right]$. Alors :

$$\underset{\sim}{\text{Card}}\ P \cap \{0 , \dots , m\} = m - (n + 1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{m} \underset{\sim}{\text{Card}}\ P \cap \{0 , \dots , m\} < 1 - \frac{1}{a} ,$$

donc $d^+P < 1$, ce qui n'est pas. La réciproque de cette propriété est fausse :

(e) Il existe un ensemble arithmétiquement dense de densité nulle.

Posons en effet

$$\underset{\sim}{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{n^3 , n^3 + 1 , \ldots , n^3 + n - 1\} .$$

L'ensemble $\underset{\sim}{A}$ contient des intervalles arbitrairement grands de nombres entiers consécutifs, et est par conséquent arithmétiquement dense. D'autre part, on a

$$\underset{\sim}{\text{Card}}\ \underset{\sim}{A} \cap \{0 , \ldots , n^3 - 1\} = \frac{n(n-1)}{2}$$

et par conséquent

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \underset{\sim}{\text{Card}}\ \underset{\sim}{A} \cap \{0 , \ldots , m\} = 0 .$$

Remarquons enfin qu'il existe des parties de $\underset{\sim}{N}$ de densité positive < 1 qui ne sont pas arithmétiquement denses. Une telle partie est constituée par exemple par les entiers impairs.

Enonçons finalement le théorème suivant, dû à DAVENPORT, LEWIS et SCHINZEL ([2], corollaire au théorème 2) que nous utiliserons dans la deuxième partie.

THÉORÈME 1.9. - Soient $f \in \underset{\sim}{Z}[X]$, et $\underset{\sim}{A}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si, pour tout $n \in \underset{\sim}{A}$, $f(n)$ est somme de deux carrés d'entiers, alors il existe $g_1 , g_2 \in \underset{\sim}{Z}[X]$ tels que $f = g_1^2 + g_2^2$.

2. - Sur des fractions rationnelles particulières [1].

Dans cette partie, nous étendons aux fractions rationnelles sur $\underset{\sim}{Q}$ certains des théorèmes énoncés pour des polynômes dans la première partie.

THÉORÈME 2.1. - Soient $f , g \in \underset{\sim}{Q}(X)$ deux fractions rationnelles, et $A \subset \underset{\sim}{Z}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(\underset{\sim}{A}) \subset g(\underset{\sim}{Z})$, alors il existe $r \in \underset{\sim}{Q}[X]$ tel que $f = g \circ r$.

Démonstration. - Ce théorème est un corollaire immédiat du théorème 1.8. Posons en effet $f = a/b$, $g = a'/b'$, avec $a , b, a' , b' \in \underset{\sim}{Z}[X]$. Par hypothèse, toute progression arithmétique contient un entier x tel que, pour un entier y au moins, on ait :

$$F(x , y) = a(x)\, b'(y) - a'(y)\, b(x) = 0 .$$

Il existe donc, d'après le théorème 1.8., un polynôme $r \in \underset{\sim}{Q}[X]$ tel que l'on ait identiquement

$$a(X).b'(r(X)) = a'(r(X)).b(X) ,$$

ou encore $f = g \circ r$.

Q. E. D.

THÉORÈME 2.2. - Soient $f \in \underset{\sim}{Q}(X)$, $p \in \underset{\sim}{Z}[X]$ unitaire, et $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{Z}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(\underset{\sim}{A}) \subset p(\underset{\sim}{Q})$, alors il existe $g \in \underset{\sim}{Q}(X)$ telle que $f = p \circ g$.

Il suffit de poser $p(x) = x^k$ pour obtenir le corollaire suivant, généralisant le théorème 1.3.

COROLLAIRE 2.3. - Soient $f \in \underset{\sim}{Q}(X)$, et $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{Z}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si $f(x)$ est puissance k-ième d'un nombre rationnel pour tout $x \in \underset{\sim}{A}$, alors il existe $g \in \underset{\sim}{Q}(X)$ telle que $f = g^k$.

Pour établir le théorème 2.2, nous utiliserons le lemme suivant qui est, au moins en partie, classique (voir par exemple [6], section 8, n° 111).

LEMME 2.4. - Deux polynômes a , $b \in \underset{\sim}{Z}[X]$ sont sans facteurs communs sauf peut-être une constante, si, et seulement si, il existe un entier N tel que

$$(a(x) , b(x)) \mid N \text{ , pour tout } x \in \underset{\sim}{Z} .$$

On a alors :

$$(a(x) , b(x)) = (a(y) , b(y)) \text{ si } x \equiv y \pmod N .$$

Démonstration. - Il est clair que si a et b ont un facteur non constant en commun, un tel entier N ne peut exister.

Réciproquement, supposons a et b premiers entre eux. En tant qu'éléments de l'anneau euclidien $\underset{\sim}{Q}[X]$, ils vérifent l'identité de Bezout :

$$au + bv = 1 , \qquad u , v \in \underset{\sim}{Q}[X] .$$

Si N est le p. p. c. m. des dénominateurs des coefficients de u et v , on a

$$a(x)(Nu(x)) + b(x)(Nv(x)) = N \text{ pour tout } x \in \underset{\sim}{Z}$$

donc $(a(x) , b(x)) \mid N$, pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}$.

Si maintenant $x \equiv y \pmod N$, il existe des entiers k et k' tels que

$$a(x) = a(y) + kN , \quad b(x) = b(y) + k'N ,$$

et tout diviseur commun à $a(x)$ et $b(x)$, divisant N , est diviseur de $a(y)$ et $b(y)$, et réciproquement.

Q. E. D.

Exemples. - Soient $a(x) = x^2 + 1$, $b(x) = 2x + 1$, on a $(a(x) , b(x)) \mid 5$ pour tout x , comme on le voit immédiatement.

Si $a(x) = x(x + 1)$, et $b(x) = (x - 1)(x - 2)$, on a

$$2 \mid (a(x) , b(x)) \mid 6 \text{ pour tout } x .$$

Démonstration du théorème 2.2. - Posons $f = a/b$, avec a , $b \in \underset{\sim}{Z}[X]$, sans facteur commun, le coefficient directeur de b étant positif, et soit

$$p(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k \qquad p_i \in \underset{\sim}{Z} .$$

Constatons d'abord que si, pour $n \in \underset{\sim}{Z}$, on a :

$$f(n) = p(y_n/z_n) \text{ , avec } (y_n , z_n) = 1 , \quad z_n > 0 ,$$

alors

(1) $$b(n) = \varepsilon_n(a(n) , b(n))\, z_n^k , \text{ avec } \varepsilon_n = \pm 1 .$$

En effet, on a :

$$a(n)/b(n) = p(y_n/z_n) = \frac{y_n^k + p_1 y_n^{k-1} z_n + \ldots + p_k z_n^k}{z_n^k} ,$$

et cette dernière fraction ne peut être réduite car sinon un diviseur de z_n diviserait y_n . D'autre part, $a(n)/(a(n) , b(n))$ et $b(n)/(a(n) , b(n))$ sont premiers entre eux, d'où l'assertion.

Soit maintenant q $(0 \leqslant q \leqslant N - 1)$ fixé, où N est donné par le lemme 2.4 , et définissons le polynôme $\bar{b}$ par

$$\bar{b}(X) = b(q + XN)/d , \text{ avec } d = (a(q) , b(q)) .$$

On vérifie immédiatement que $\bar{b}$ est à coefficients entiers puisque

$$(a(q) , b(q)) = (a(q + nN) , b(q + nN))$$

pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$ en vertu du lemme 2.4. D'après la propriété (b) des ensembles arithmétiquement denses, l'ensemble $\underset{\sim}{B} = \{n : q + nN \in \underset{\sim}{A}\}$ est arithmétiquement dense, et d'après la remarque précédente, on a :

$$\bar{b}(n) = \varepsilon_{q+nN}(z_{q+nN})^k \quad \text{pour} \quad n \in \underset{\sim}{B} .$$

Si l'on pose $b' = b^2$, $b'(n)$ est puissance $2k$-ième d'un entier pour tout $n \in \underset{\sim}{B}$. En appliquant le théorème 1.3 , il en résulte l'existence d'un polynôme $u \in \underset{\sim}{Z}[X]$ tel que $b' = u^{2k}$. Comme on a également $b' = (-u)^{2k}$, on peut supposer positif le coefficient directeur de u , et il en découle que $\bar{b}(n) = u(n)^k$ pour tout entier n assez grand et donc pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$.

Posons maintenant $\underset{\sim}{B'} = \{n \in B : n \geqslant N_o\}$, où N_o est assez grand pour que $u(n).n > 0$ si $n \geqslant N_o$. $\underset{\sim}{B'}$ est arithmétiquement dense d'après la propriété (c) des ensembles arithmétiquement denses. Comme précédemment, le polynôme

$$\bar{a}(X) = a(q + nX)/d$$

est à coefficients entiers. Je dis que, pour tout $n \in \underset{\sim}{B'}$, il existe $m \in \underset{\sim}{Z}$ tel que l'on ait :

(2) $$F(n\ ,\ m) = \bar{a}(n) - (m^k + p_1\ m^{k-1}\ u(n) + \ldots + p_k\ u(n)^k) = 0\ .$$

En effet, il est clair que k divise le degré ℓ de $\bar{b}$. Par conséquent, si k est pair (et donc ℓ est pair), ou si k est impair et ℓ est pair, on a

$$\varepsilon_{q+nN} = +\ 1 \quad \text{pour} \quad n \in \underset{\sim}{B'}$$

puisque z_{q+nN} et le coefficient directeur de b sont positifs. Il en découle que $u(n) = z_{q+nN}$ et que $m = y_{q+nN}$ satisfait (2). Si par contre k et ℓ sont impairs, on a

$$u(n) = z_{q+nN} \quad \text{si} \quad n \geqslant N_o\ , \text{ et } \quad u(n) = -\ z_{q+nN} \quad \text{si} \quad n \leqslant N_o\ .$$

L'équation (2) est alors satisfaite par $m = y_{q+nN}$ dans le premier cas, et par $m = -\ y_{q+nN}$ dans le second. Les hypothèses du théorème 1.8 sont donc satisfaites par le polynôme F, et il existe donc un polynôme $v \in Q[X]$ tel que l'on ait identiquement :

$$\bar{a}(X) = v(X)^k + p_1\ v(X)^{k-1}\ u(X) + \ldots + p_k\ u(X)^k\ ,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\bar{a}(X)}{\bar{b}(X)} = p\left(\frac{v(X)}{u(X)}\right)\ ,$$

et finalement

$$f = p \circ g\ ,\ \text{avec} \quad g(X) = \frac{v((X-q)/N}{u((X-q)/N}\ .$$

Q. E. D.

Finalement, nous allons montrer que le théorème 1.9 admet lui aussi une généralisation aux fractions rationnelles. On a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 2.5. - Soient $f \in \underset{\sim}{Q}(X)$, et $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{Z}$ un ensemble arithmétiquement dense. Si pour tout $x \in \underset{\sim}{A}$, $f(x)$ est somme de deux carrés de nombres rationnels, alors il existe $g_1\ ,\ g_2 \in \underset{\sim}{Q}(X)$ telles que

$$f = g_1^2 + g_2^2\ .$$

Démonstration. - Posons $f = a/b$, avec $a\ ,\ b \in \underset{\sim}{Z}[X]$. D'après [8] (p. 352), $a(x)/b(x)$ est somme de deux carrés de nombres rationnels si, et seulement si, $a(x)b(x)$ est somme de deux carrés d'entiers. Ainsi pour tout $x \in \underset{\sim}{A}$, $a(x)b(x)$ est somme de deux carrés d'entiers, et il existe donc, en vertu du théorème 1.9, deux polynômes $u\ ,\ v \in \underset{\sim}{Z}[X]$ tels que l'on ait identiquement

$$a(X)b(X) = u(X)^2 + v(X)^2\ .$$

Mais alors

$$f = a/b = (u/b)^2 + (v/b)^2\ .$$ Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERSTEL (J.). - Sur des fractions rationnelles particulières, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 304-306.

[2] DAVENPORT (H.), LEWIS (D. J.) and SCHINZEL (A.). - Polynomials of certain special types, Acta Arithm., t. 9, 1964, p. 107-116.

[3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, Clarendon Press, 1965.

[4] LEVEQUE (W. J.). - Topics in number theory. Vol. 2, 2nd edition. - New York, Addison-Wesley publishing Company, 1961 (Addison-Wesley Mathematics Series).

[5] OGDEN (H. S.). - Intercalation theorems for pushdown store and stack languages, Phil. D. Thesis, Stanford Univ., Stanford, 1968.

[6] POLYA (G.) und SZEGO (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2ter Band, 3te Auflage. - Berlin, J. Springer, 1964 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 20).

[7] RAUZY (G.). - Ensembles arithmétiquement denses, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 37-38.

[8] SIERPINSKI (W.). - Elementary theory of numbers. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964 (Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, 42).

(Texte reçu le 20 avril 1970)

Jean BERSTEL
M. Ass. Fac. Sc. Paris
11 ter avenue de Taillebourg
75 - PARIS 11