

SÉMINAIRE SCHÜTZENBERGER

CLAUDE LENORMAND

**Exponentiation de la dérivation, et intégration des séries
en variables non commutatives**

Séminaire Schützenberger, tome 1 (1969-1970), exp. n° 20, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SMS_1969-1970__1__A12_0

© Séminaire Schützenberger

(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schützenberger » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

28 avril 1970

EXPONENTIATION DE LA DÉRIVATION,
 ET INTÉGRATION DES SÉRIES EN VARIABLES NON COMMUTATIVES

par Claude LENORMAND

I. Exponentiation de D .

Soit X un ensemble fini ; on note P le A -module des polynômes sur X^* .
 L'anneau A est supposé contenir $\mathbb{Z}$.

Définition 1. - Un opérateur w de P est dit localement nilpotent si, pour tout polynôme $p \in P$, il existe un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $w^i p = 0$.

On note S le module des séries sur X^* , dual de P . On note e l'élément neutre de X^* .

Définition 2. - Un opérateur w de P est dégradant si la relation $(\lambda m \geq \lambda m')$ entraîne $(\langle wm, m' \rangle = 0)$, où $\langle m, m' \rangle = 1$ si $m = m'$, et 0 sinon.

Il est clair que tout opérateur dégradant est localement nilpotent. Soient w un opérateur localement nilpotent de P , et I l'opérateur identité ; l'opérateur

$$(I - w)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} w^n,$$

inverse de $I - w$, est un opérateur de P ; de même, $I + w$ est inversible, en tant qu'opérateur de P .

De manière générale, si w est un opérateur de P localement nilpotent, toute série en w représente un opérateur de P commutant avec w . Soit $D_x y = \langle x, y \rangle e$ avec x, y éléments de X .

Ainsi, toute dérivation partielle D_x est localement nilpotente, et la série $T_x = \exp D_x$ représente un opérateur de P ; de plus :

PROPOSITION. - L'exponentielle de la dérivation partielle D_x est le morphisme T_x tel que $T_x y = y + \langle x, y \rangle e$.

En effet,

$$(D_x^n uv)/n! = \sum_{i+j=n} ((D_x^i u)/i!) ((D_x^j v)/j!)$$

parce que

$$(D^n mm')/n! = \sum_{i+j=n} ((D^i m)/i!) ((D^j m')/j!) ,$$

comme on l'établit par récurrence sur n pour tout couple (m, m') de mots de X^* . Soit finalement $T_x uv = T_x u \times T_x v$; T_x est donc un morphisme de l'algèbre de Cauchy de P , et l'on a évidemment

$$T_x y = (I + D_x)y = y + \langle x, y \rangle y$$

pour tout élément $x \in X$.

PROPOSITION. -- Pour tout couple (x, y) d'éléments de X , les dérivations partielles D_x et D_y commutent.

En effet, cela s'établit immédiatement sur la base de P , par récurrence sur le degré des mots :

$$\begin{aligned} D_x D_y mm' &= D_x (D_y mm' + m D_y m') \\ &= D_x D_y mm' + D_y m D_x m' + D_x m D_y m' + m D_x D_y m' \\ &= D_y D_x mm' \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$D_x D_y m = D_y D_x m, \quad D_x D_y m' = D_y D_x m',$$

et il reste à vérifier que

$$D_x D_y ab = D_y D_x ab$$

pour tout couple (a, b) d'éléments de X . On peut donc écrire

$$\exp D = \exp \sum_{x \in X} D_x = \prod_{x \in X} \exp D_x = \prod_{x \in X} T_x ,$$

et $T = \exp D$ est le morphisme de l'algèbre de Cauchy défini par

$$Ty = \left(\prod_{x \in X} T_x \right) y = y + \sum_{x \in X} \langle x, y \rangle e = y + e ,$$

quel que soit l'élément $y \in X$.

Le polynôme Tm , pour tout mot m , sera appelé le polynôme des sous-mots du mot m .

L'involution principale α , morphisme involutif de l'algèbre de Cauchy, est définie par $\alpha x = -x$ pour tout $x \in X$, et donc $\alpha m = (-1)^{\lambda m} m$; finalement, pour toute dérivation partielle D_x ,

$$\alpha D_x \alpha = -D_x ,$$

ce qui peut également s'établir sur X^* par récurrence sur le degré :

$$\begin{aligned} (\alpha D_x \alpha) mm' &= \alpha D_x (\alpha m \alpha m') \\ &= \alpha (D_x \alpha m \alpha m' + \alpha m D_x \alpha m') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha D_x \alpha m m' + m \alpha D_x \alpha m' \\
&= - (D_x m m' + m D_x m') \\
&= - D_x m m'
\end{aligned}$$

On a alors $\alpha T_x \alpha = \exp \alpha D_x \alpha = \exp - D$, et $\alpha T_x \alpha$ coïncide avec l'automorphisme T_x^{-1} de P , inverse de T_x , et tel que $T_x^{-1} y = y - \langle x, y \rangle$.

De même que $T = \exp D$, on a $T^{-1} = \exp - D$.

L'opérateur T_x de P n'est pas localement nilpotent, mais il peut s'écrire $T_x = I + \Delta_x$, avec Δ_x localement nilpotent, et $I - \Delta_x$, comme $I + \Delta_x$, est inversible ; la conséquence la plus intéressante de l'écriture de T_x sous la forme $I + \Delta_x$ est que l'opérateur D_x peut s'écrire

$$D_x = \log(I + \Delta_x).$$

Par ailleurs, puisque D_x et D_y commutent, et puisque Δ_x et Δ_y s'expriment en D_x et D_y respectivement, on a

$$D = \sum_{x \in X} \log(I + \Delta_x) = \log(I + \Delta),$$

avec $T = I + \Delta = \prod_{x \in X} (I + \Delta_x)$.

L'opérateur Δ n'est pas une dérivation, ni un morphisme, mais on a la remarquable relation par rapport au produit de polynômes :

$$\Delta f g = \Delta f \cdot g + f \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g.$$

On a également $\Delta f g = E^{-1} f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot E^{-1} g$, où $E^{-1} = (T + I)/2$, E étant l'opérateur d'Euler que nous considérerons ultérieurement.

L'opérateur $\delta = (T + T^{-1})/2$ est inversible, et δm est le polynôme des sous-mots de m dont la parité du degré est celle de m , alors que l'opérateur localement nilpotent $(T - T^{-1})/2$ fournit le polynôme des sous-mots de parité opposée.

Nous avons vu que $D_x^t m = m \omega x$; il en résulte que l'opérateur $(I - D^t)$ de l'espace des séries a pour inverse l'opérateur "produit de Hurwitz par $\sum_{n \in \mathbb{N}} X^{\omega n}$ ".

Par ailleurs, T admet un opérateur dual T^t tel que

$$T^t m = m \omega (\sum X^{\omega n})/n!$$

Or, nous avons vu que $X^{\omega n} = n! X^n$; le dual de T est donc le produit de Hurwitz par X^* .

Opérateurs de S . - Tout opérateur w de P ne peut être étendu en un opérateur de S ; ainsi, bien que $I - D$ soit un opérateur de S , $I - D$ est inversible pour P , et non pour S .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur w de P soit égale-

ment un opérateur de S est la suivante :

Pour tout élément $m \in X$, l'ensemble des mots $m' \in X$, tels que l'on ait $\langle wm', m \rangle \neq 0$, est fini,

cette condition étant satisfaite pour tout opérateur de S .

Ainsi, T n'est pas un opérateur de S ; on peut cependant considérer la sous-algèbre de l'algèbre de Cauchy sur S constituée des séries $f \in S$ telles que Tf existe (et de façon générale, associer à tout opérateur w de P le module des séries $f \in S$ telles que wf existe) ; cette sous-algèbre F est telle que $FP = PF = F$.

Coefficients binomiaux. - Lorsque $X = \{x\}$ est réduit à une lettre, l'expression de T dans la base X^* de P fournit les coefficients binômiaux,

$$\langle Tx^n, x^i \rangle = \binom{n}{i}.$$

De manière générale, si m est un mot,

$$\langle Tm, X^i \rangle = \binom{\lambda m}{i}$$

et

$$\langle Tm, X^* \rangle = 2^{\lambda m},$$

comme on peut l'établir, par exemple, par récurrence sur le degré de m , en remarquant que

$$\begin{aligned} \langle T y m, X^i \rangle &= \langle y T m, \sum x X^{i-1} \rangle + \langle T m, X^i \rangle \\ &= \langle T m, X^i + X^{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

On a par ailleurs, α étant l'involution principale,

$$\begin{aligned} \langle T^{-1} m, m' \rangle &= \langle \alpha T \alpha m, m' \rangle \\ &= \langle T \alpha m, \alpha m' \rangle \\ &= (-1)^{\lambda m'} \langle \alpha m, T^t m' \rangle \\ &= (-1)^{\lambda m' + \lambda m} \langle T m, m' \rangle \end{aligned}$$

et, T et T^{-1} étant inverses,

$$\sum_{m' \in X^*} \langle T m, m' \rangle \langle T^{-1} m', m'' \rangle = \langle m, m'' \rangle.$$

II. Intégration des séries.

On notera S l'espace des séries sur X^* .

Sous-algèbre des séries de dérivée nulle. - L'ensemble des séries $f \in S$ telles que $Df = 0$ constitue une sous-algèbre ; il suffit de connaître, pour chaque

$n \in \mathbb{N}$, le module des polynômes homogènes de degré n dont la dérivée est nulle. Nous noterons P_n le module des polynômes homogènes de degré n , et D_n la restriction de D à P_n ; nous allons construire, par récurrence sur n , une base des noyaux $\text{Ker } D_n$ de D_n .

Lorsque $X^* = \{x\}^*$ est monogène, la seule série de dérivée nulle est e ; lorsque la cardinalité de X excède 1, les séries de dérivée nulle sont, au contraire, extrêmement nombreuses.

A tout $x \in X$, nous allons associer une base B_x^n de $\text{Ker } D_n$; nous établissons au préalable quelques propriétés utiles.

Soit f_{xy} l'application de S dans S telle que, pour tout $s \in S$, on ait ⁽¹⁾

$$f_{xy} s = xs - sy.$$

LEMME 1. - Le noyau de f_{xy} se réduit à $\{0\}$ lorsque $x \neq y$, et aux séries s'exprimant sur $\{x\}^*$ lorsque $x = y$.

Démonstration. - Pour l'établir, soit une série s telle que $xs = sy$; alors on a $s = xs_1$, et $xs_1 = s_1 y$: il en résulte que le support de s est contenu dans $\{x\}^*$, et alors $x = y$.

LEMME 2. - Lorsque $y \neq z$, les applications $f_{x,y}$ et $f_{x,z}$ sont telles que $\text{Im } f_{x,y} \cap \text{Im } f_{x,z} = \{0\}$.

Démonstration. - En effet, si (s, t) est un couple de séries non nulles satisfaisant à $xs - sy = xt - tz$, où x, y, z sont trois éléments de X , on a

$$x(s - t) = sy - tz.$$

Si y est distinct de z , les supports de sy et tz sont disjoints, et l'on a $s = xs_1$, $t = xt_1$, soit

$$x(s_1 - t_1) = s_1 y - t_1 z,$$

et, finalement, s et t s'expriment sur $\{x\}^*$, d'où $x = y = z$, ce qui est exclu.

Pour $n > 1$, le noyau de D_n ne contient aucune série s'exprimant sur $\{x\}^*$: la restriction de $f_{x,x}$ à $\text{Ker } D_n$ est donc une injection de $\text{Ker } D_n$ dans P_{n+1} . Or il est clair que D et $f_{x,y}$ commutent, quel que soit le couple (x, y) d'éléments de X , car

$$\begin{aligned} Df_{xy} s &= D(xs - sy) \\ &= xDs - Ds.x \\ &= f_{xy} Ds \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Je dois la considération de ces applications à la collaboration de A. JACQUES.

D'après les lemmes 1 et 2, les modules images de $\text{Ker } D_n$ par la famille des applications $f_{x,y}$, où y parcourt X , sont disjoints. On peut donc écrire que leur somme directe E_n est incluse dans $\text{Ker } D_{n+1}$:

$$E_n = \bigoplus_{y \in X} f_{x,y} \text{Ker } D_n \subset \text{Ker } D_{n+1}.$$

Par ailleurs, l'ensemble

$$B_x^1 = \{x - y \mid y \in X - \{x\}\}$$

constitue une base de $\text{Ker } D_1$ de dimension $|X| - 1$, ce qui fait que $\text{Ker } D_{n+1}$ est au moins de dimension $|X|^n(|X| - 1)$; le polynôme X lui-même constitue une base du module (de dimension 1) orthogonal à $\text{Ker } D_1$.

De façon générale, on établirait par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme X^n est orthogonal au noyau de D ; on a même un peu plus : pour toute série g , tout polynôme p , et tout couple (x, y) d'éléments de X , on a

$$\langle XpX, f_{x,y}g \rangle = \langle pX, g - Xp, g \rangle;$$

donc, tout polynôme s'exprimant par un polynôme en X est orthogonal à $\text{Im } f_{x,y}$.

Il nous reste à établir l'existence d'un sous-module de P_n , de dimension égale à celle de P_{n-1} , et dont l'intersection avec $\text{Ker } D_n$ est vide : il en résultera que E_n est identique à $\text{Ker } D_{n+1}$.

Pour cela, il suffit d'établir l'existence d'un opérateur J tel que $J(P_n) \subset P_{n+1}$, avec $DJ = I$: un tel opérateur sera appelé opérateur d'intégration.

Il est immédiat que tout opérateur J s'écrivant

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{i+1} p_{i+1} D^i,$$

où $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tels que $Dp_{i+1} = p_i$, satisfait à $DJ = I$ si, et seulement si, l'on a $a_i + a_{i+1} = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Lorsque l'on parlera de l'opérateur d'intégration sans autre précision, il s'agira de l'opérateur J satisfaisant à la condition suivante : Les modules $\text{Im } J$ et $\text{Ker } D$ sont orthogonaux.

Dans ce cas, JD est l'opérateur de projection sur l'orthogonal du noyau de D .

Nous avons finalement établi la proposition suivante.

PROPOSITION. - Le noyau de D_n est de dimension $|X|^{n-1}(|X| - 1)$.

Equations différentielles à coefficients constants. - Si l'on cherche quel est le module des séries $s \in S$ satisfaisant à $ws = t$, où $t \in S$ et w est une série en D , $w = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i D^i$, nous pourrions répondre à cette question ; en effet, si w

n'est pas inversible, w peut s'écrire $w = D^j v$, avec $j \in \underline{\mathbb{N}}$ et v inversible ; l'équation $ws = t$ se ramène alors à $D^j s = v^{-1} t$, et s est définie au noyau de D^j près.

Séries de dérivée et d'image commutative nulle. - On a $\gamma f_{xy} s = (\gamma x - \gamma y) \gamma s$, ce qui fait que $\gamma s = 0$ entraîne $\gamma f_{xy} s = 0$.

Or, le noyau de la restriction γ_2 de γ à P_2 admet pour base l'ensemble $\{[x, y] \mid y \in X - \{x\}\}$: ce noyau est donc de dimension $|X|(|X| - 1)/2$, et $\text{Ker } D_{n+1}$ admet un sous module, de dimension $|X|^n(|X| - 1)/2$, qui appartient au noyau de γ_{n+1} .

Il faut enfin signaler que, pour tout $m \in X^*$, σ_m ne dépend que de γ_m : il en résulte que σ et γ ont même noyau.

(Texte reçu le 1er décembre 1970)

Claude LENORMAND
70 avenue de Verdun
94 - IVRY
