

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

FRÉDÉRIC ROGER

Points critiques dans la théorie de M. Morse

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 9, p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A9_0

© École normale supérieure, Paris, 1938-1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES

CABINET DU DÉPARTEMENT
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

VI.- K.

CERCLE MATHÉMATIQUE
de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Points critiques dans
la théorie de M. MORSE

Exposé fait par M. Frédéric ROGER, le lundi 8 Mai 1939

Exemplaire n°6

INTRODUCTION

L'idée essentielle de la théorie de M. Morse , c'est de rattacher la présence de points critiques d'une fonction f aux changements de configuration de l'ensemble des points qui rendent f inférieur ou égal à une valeur donnée c (changements qui se produisent quand le paramètre c franchit une valeur critique de f). On a vu dans la conférence précédente comment ces changements étaient liés à la présence de "calottes" . Il reste à voir dans celle-ci comment les calottes elles-mêmes sont liées aux points critiques pour qu'en éliminant ces intermédiaires, les calottes, on obtienne les résultats définitifs de la théorie de Monsieur Morse .

Cette théorie se propose essentiellement de rendre compte des faits pour deux catégories précises de fonctions f :

1°) Les fonctions réelles d'un nombre fini de variables réelles, admettant des dérivées secondes continues .

2°) Les intégrales de problèmes de calcul des variations, portant sur les courbes d'une variété différentiable (jusqu'à un ordre convenable)

$$J = \int_C F(x^1, x^2, \dots, x^m; \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^m) dt$$

où la fonction $F(x, r)$ des coordonnées locales (x^1, x^2, \dots, x^m) et de leurs dérivées par rapport à t $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^m)$, dérivable jusqu'à un ordre suffisant, est positive $[F(x, r) \geq 0$ pour (x) dans un certain domaine, et (r) quelconque], positivement homogène de degré 1 en r $[F(x, \lambda r) = \lambda F(x, r)$ quel que soit $\lambda \geq 0]$ et positivement régulière [les racines caractéristiques de la forme quadratique de Legendre, celles dont les coefficients sont les dérivées secondes $F_{r^1 r^j}(x, r)$ sont toutes positives sauf celle que l'on sait être nulle précisément à cause de la propriété précédente] .

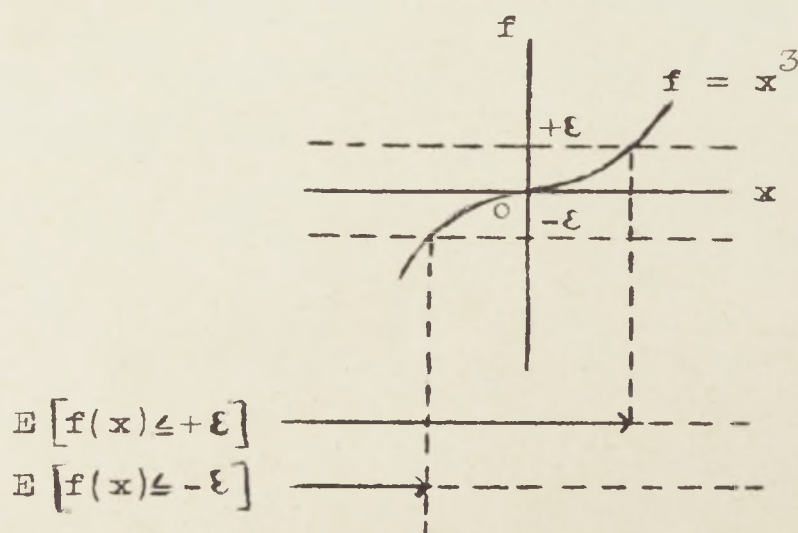
I.- POINTS CRITIQUES

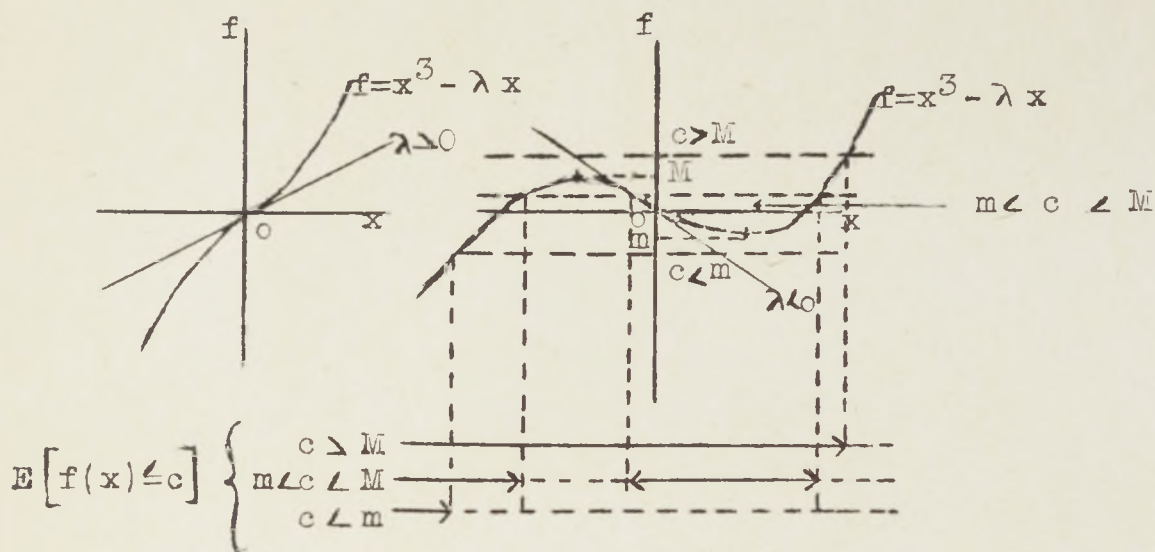
1.- Distinction d'avec les points stationnaires .

Voulant repérer les points critiques de f par les changements de configuration de l'ensemble E ($f \leq c$) , on ne peut prendre comme points critiques d'une fonction ordinaire les points stationnaires (où la différentielle première s'annule identiquement) . Car, pour la fonction $f(x)=x^3$ au point stationnaire $x=0$, correspond la valeur station-



naire $f = 0$, à la traversée de laquelle par c l'ensemble des x où $f(x) \leq c$ ne change pas de configuration (voir figure). Cela tient, si l'on veut, à ce qu'on peut considérer $f(x)$ comme la limite pour $\lambda = 0$ de la fonction $f(x, \lambda) = x^3 - \lambda x$ qui, pour λ petit et négatif, ne présente pas de point stationnaire au voisinage de l'origine alors que pour λ petit et positif, elle y présente un maximum M et minimum m dont les influences sont inverses sur la configuration de l'ensemble $E[f(x) \leq c]$, en sorte qu'elles se compensent lorsque c passe d'une valeur supérieure à M à une valeur inférieure à m .





2.- Déformation vers le bas .

Par ailleurs, au voisinage d'un maximum strict d'une fonction de deux variables , $f(x,y)$, on ne peut déformer continûment sur elle-même la surface représentative de manière que les cotes des points aillent toutes en diminuant . En effet, en faisant descendre le point initialement au sommet, la cote de celui qui vient prendre sa place augmente . C'est en précisant cette idée que nous allons, avec M.Morse, définir les points critiques .

Les fonctions qui nous intéressent $f(p)$ sont définies sur un espace métrique \mathcal{E} de points p (l'espace cartésien d'un nombre de dimensions égal à celui des variables pour les fonctions ordinaires du (1°) de l'introduction , et, pour les intégrales du (2°), l'espace des cour-

bes de la variété satisfaisant à certaines conditions aux limites) . A tout point d'un ensemble E de l'espace \mathcal{E} et toute valeur t comprise entre 0 et 1, faisons correspondre un point $q(p, t)$ de l'espace \mathcal{E} confondu avec p pour $t=0$ et variant continûment avec le couple (p, t) . Quand, fixant p , on fait varier t , q décrit une "trajectoire" d'origine p . Au contraire, fixant t , et faisant varier p , on obtient un ensemble E_t "déformé" de E à l'instant t .

Supposons qu'au cours d'une telle déformation la fonction f aille en décroissant : $f[q(p, t)]$ décroissante en t pour p fixe en E . Si f était continue, dans tout sous-ensemble compact E_0 de E , on pourrait faire correspondre à tout nombre positif ϵ un nombre positif $\delta(\epsilon)$ tel que, sur toute trajectoire issue d'un point p de E_0 , deux points q et r , q antécédent de r au sens de la succession des valeurs de t , distants dans l'espace \mathcal{E} de plus de ϵ , vérifient $f(q) - f(r) \geq \delta(\epsilon)$: cela résulterait de l'uniformité des continuités entrant en jeu . Mais alors que les fonctions ordinaires du (1°) sont supposées continues , les intégrales curvilignes du (2°) ne sont en général que semi-continues inférieurement, en sorte que cette propriété d'uniformité doit être prise comme définition si l'on veut, et

c'est très utile, pouvoir s'en servir dans la suite .

D'une manière précise, nous dirons qu'un ensemble E de l'espace \mathcal{E} admet une déformation vers le bas relativement à la fonction f ,⁽¹⁾ ("f-déformation" dans la terminologie de M.Morse) s'il existe une fonction $q(p,t)$ définie pour p dans E et t dans $(0,1)$ telle qu'à tout sous-ensemble compact E_0 de E , on puisse attacher une fonction $\delta(e)$ ("displacement-function") jouissant de la propriété précédente .

3.- Définition des points critiques . ("homotopic critical points") .

Et maintenant nous dirons qu'un point p_0 est critique pour la fonction $f(p)$ s'il est impossible de trouver un voisinage $V(p_0)$ quelque'étroit qu'il soit dans lequel l'ensemble des points p , où $f(p) \leq f(p_0)$ admette une déformation vers le bas déplaçant effectivement le point p_0 .

(1) Cette locution est destinée à faire image quand on substitue à E l'ensemble qui lui correspond sur la variété représentative de f dans l'espace produit de \mathcal{E} par l'axe des valeurs de f supposé vertical et orienté positivement vers le haut .

4.- Rapport avec les points stationnaires

Nous avons vu qu'un point stationnaire pouvait n'être pas critique ; par contre, un point critique est nécessairement stationnaire .

Théorème 4.1 - Tout point critique ("homotopic critical point") d'une fonction réelle deux fois continûment dérivable, en est un point stationnaire ("differential critical point").

Car au voisinage d'un point qui n'est pas stationnaire, les trajectoires orthogonales dans l'espace des variables, aux variétés $f = Cte$, décrites dans le sens où f décroît, permettent de définir une déformation vers le bas .

Théorème 4.2 . - Toute courbe critique ("homotopic extremal") d'une intégrale curviligne d'intégrant positif et positivement régulier, en est une extrémale au sens classique ("metric extremal") donc, en particulier, vérifie les équations d'Euler .

La démonstration repose sur la déformation des courbes en extrémales brisées du genre de celles que nous avons rencontrées dans la définition de l'indice d'une extrémale (exposé G) . De la condition de positive régularité

(qui entraîne la condition de Legendre et même celle de Weierstrass), résulte que sur tout arc de courbe C d'extrémités A, B , on peut trouver des points $P_0 = A, P_1, P_2, \dots$

$\dots, P_m = B$ formant une subdivision suffisamment serrée pour que deux points d'un même arc partiel P_{h-1}, P_h puissent être joints par un arc d'extrémale et un seul. Sur le k ème de ces arcs C_k , considérons le point $Q_k(t)$ dont le paramètre μ partage (μ_{k-1}, μ_k) dans le même rapport que t partage $(0, 1)$; à l'instant t , ne conservons de C_k que l'arc $Q_k(t) P_k$ et remplaçons l'arc $P_{k-1} Q_k(t)$ par l'arc d'extrémale de mêmes extrémités. Nous définissons ainsi, quand t varie de 0 à 1, une déformation continue de la courbe C en l'extrémale brisée Γ de sommets P_0, P_1, \dots, P_m .

Le fait que pour tout un voisinage d'une courbe qui n'est pas extrémale au sens ordinaire, une telle déformation est une déformation ~~vers le bas~~ tient d'une part au choix intrinsèque du paramètre μ sur les courbes considérées (" μ -parameterization"), d'autre part à une propriété qui s'apparente au théorème d'Osgood de la théorie classique: étant donnée une extrémale AB rendant minimum l'intégrale J et un point P en dehors, la valeur de J sur toute courbe joignant A à B en passant par P diffère de la valeur de J sur

l'extrémale AB d'une quantité inférieurement bornée en fonction de la position de P .

II.- RELATION ENTRE CALOTTES & POINTS CRITIQUES

5.- Réductibilité supérieure . ("upper-reductibility")

La définition d'un point critique p_0 ne fait intervenir de déformation vers le bas que pour l'ensemble où $f(p) \leq f(p_0)$; il y a lieu de se demander comment on peut déformer les ensembles où $f(p) \leq c$ pour $c \succ f(p_0)$. C'est précisément le rôle de la condition de réductibilité supérieure que M.Morse impose à la fonction $f(p)$. En un point p_0 , $f(p)$ est dite réductible supérieurement si quelle que soit la constante $c \succ f(p_0)$, dans un voisinage $V(p_0)$ suffisamment étroit, l'ensemble où $f(p) \leq c$ admet une déformation vers le bas en un ensemble où $f(p)$ soit au plus égal à un nombre $d \angle c$.

Théorème 5.1 . - Toute fonction continue est réductible supérieurement .

Car en prenant d entre c et $f(p_0)$, on peut choisir $V(p_0)$ suffisamment petit pour que $f(p)$ y soit inférieur à d , en sorte que la déformation nulle (cas particulier de déformation vers le bas qu'il n'y a lieu d'exclure que dans la définition du point non critique puisqu'il

doit être effectivement déplacé) répond à la question.

Théorème 5.2 . - Toute intégrale curviligne d'intégrant positif, et positivement régulier, est réductible inférieurement .

En effet, pour une courbe C suffisamment voisine d'une courbe C_0 (au sens de la métrique dans l'espace des courbes : voisinage d'ordre zéro), pour δ entre c et $J(C_0)$ l'extrémale brisée Γ a ses sommets arbitrairement proches de ceux de Γ_0 en sorte que, $J(\Gamma)$ fonction continue des coordonnées des sommets, différent arbitrairement peu de $J(\Gamma_0) \leq J(C_0)$, sera moindre que δ .

6.- Existence d'un point critique sur toute calotte .

Considérons alors une calotte à k dimensions, de borne c , c'est-à-dire une k -chaîne u de l'ensemble $E(f \leq c)$ dont la frontière \dot{u} plonge ⁽¹⁾ dans un ensemble $E(f \leq d < c)$, mais qui, pour aucune valeur positive de ε ne constitue avec une k -chaîne v de $E(f \leq c - \varepsilon)$, la frontière d'une $(k+1)$ -chaîne de $E(f \leq c)$; en langage technique, u est un k -cycle de $E(f \leq c) \bmod E(f \leq d < c)$, non homologue à zéro dans $E(f \leq c) \bmod E(f \leq c - \varepsilon)$ quel que

(1) Voir note , p.6

faible que soit ε . Définie comme cycle de Vietoris, cette calotte est un symbole qu'on peut considérer comme la limite de cycles ordinaires, dont seuls les sommets des simplexes importent (et non les points intermédiaires comme dans les cycles singuliers). Tous ces sommets appartiennent à un sous-ensemble compact de $E(f \leq c)$: le support ("carrier") de la calotte.

S'il pouvait arriver qu'un tel support de calotte de borne c ne contienne aucun point critique p_0 où $f(p_0)=c$, on conçoit, sans entrer dans les détails de la démonstration, qu'en vertu de la définition des points ordinaires aux points p où $f(p) = c$ et de la définition de la réductibilité supérieure aux points p où $f(p) < c$, il soit possible de définir une déformation vers le bas amenant le support de la calotte en un ensemble où $f \leq d < c$. Mais alors la frontière de la $(k+1)$ -chaîne de déformation de la k -calotte u se composerait de $(-u)$, la k -chaîne déformée de u et la k -chaîne de déformation de la $(k-1)$ -chaîne frontière u ; ces deux dernières appartenant à $E(f \leq d)$, u serait homologue à zéro dans $E(f \leq c) \bmod. E(f \leq d < c)$, contrairement à sa définition. D'où le théorème :

Théorème fondamental .- Quand la fonction f est réductible supérieurement, toute borne de calotte est valeur prise par

f en au moins un point critique.

7.- Points critiques simples .

La théorie de M.Morse permet de localiser les calottes au voisinage des points critiques . De sorte qu'un ensemble de points critiques de niveau c , à distance positive de tout autre point critique de même niveau ("critical set et the level c ") sera caractérisé par les nombres maxima de calottes indépendantes de borne c dans son voisinage, pour les diverses dimensions : les nombres type de cet ensemble critique .

Théorème 7.1 .- Pour une fonction réelle d'un nombre fini de variables réelles, admettant des dérivées secondes continues, un point stationnaire non dégénéré d'indice i (point où la différentielle première s'annule alors que la différentielle seconde se décompose en autant de carrés qu'il y a de variables dont i sont négatifs) est un point critique isolé dont tous les nombres types sont nuls ,sauf le i -ième qui est égal à l'unité .

On y arrive par des considérations topologiques simples .

Théorème 7.2.- Dans un problème positivement régulier de calcul des variations aux extrémités fixes, une extrémale

non dégénérée d'indice 1 (solution des équations d'Euler dont les extrémités ne sont pas conjuguées, et contenant 1 foyers conjugués de l'une des extrémités) est pour l'intégrale, un argument critique isolé dont tous les nombres type sont nuls, sauf le i-ième qui est égal à l'unité .

Cela résulte , avec quelques précautions, de l'introduction des extrémales brisées sur lesquelles l'intégrale devient une fonction d'un nombre fini de variables (voir exposé G) et du théorème précédent .

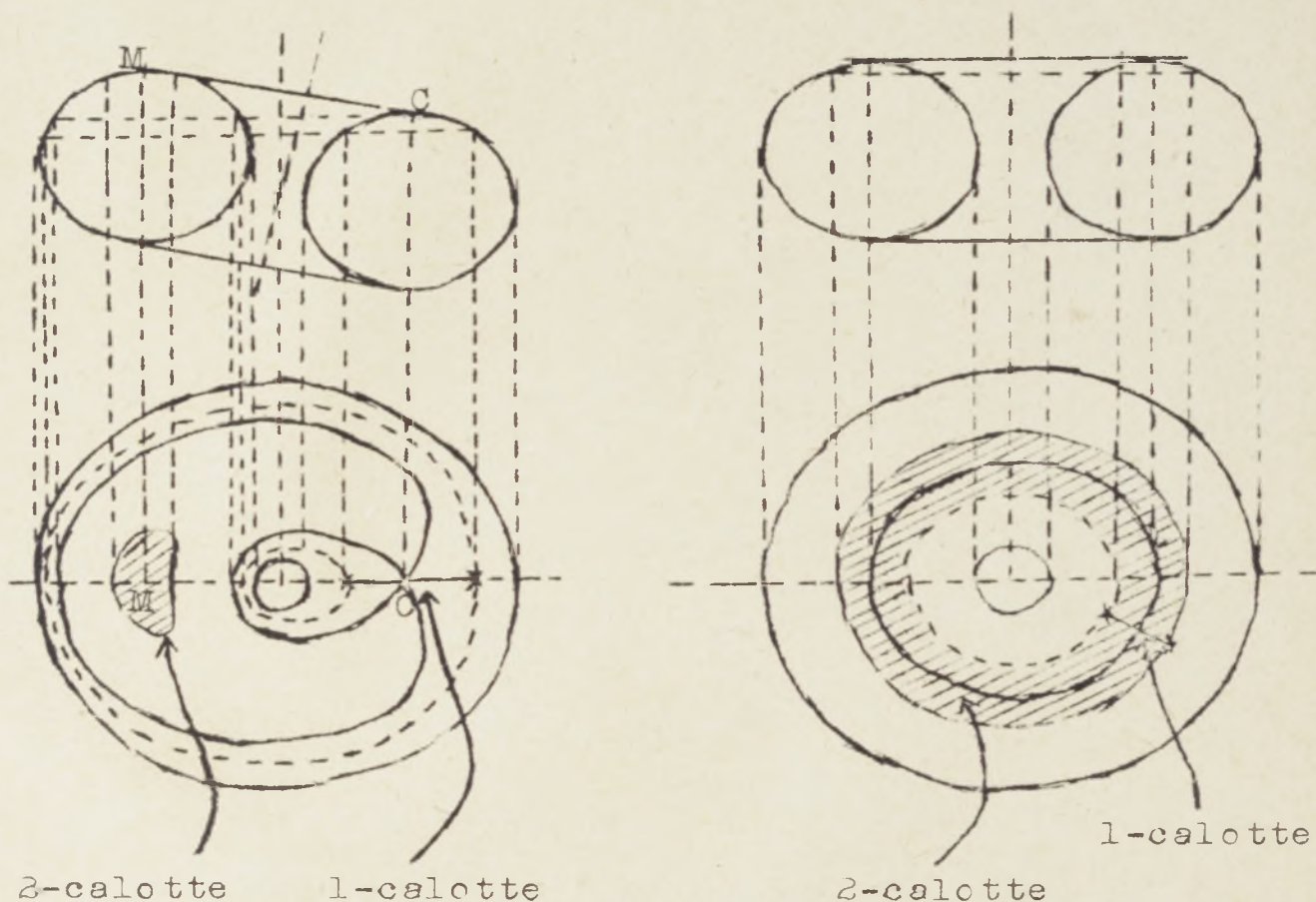
Dans un problème non dégénéré, c'est-à-dire où les extrémités données ne sont conjuguées sur aucune extrémale, de ce que ces extrémales sont isolées et que les courbes sur lesquelles l'intégrale est inférieure à une valeur donnée, forment un ensemble compact, résulte que les extrémales sont en nombre fini ou tout au plus en infinité dénombrable, la valeur de l'intégrale augmentant indéfiniment avec l'indice .

8.- Décompte des points critiques .

Ainsi, pour les deux catégories de fonctions f qui nous intéressent particulièrement, les théorèmes 7.1 et 7.2 donnent le comportement des points critiques en quelque sorte simples . Et l'on peut dire d'un ensemble

critique quelconque qu'il se comporte pour les changements de configuration de l'ensemble E ($f \leq c$) quand c varie , comme autant de points critiques simples des divers types que chacun de ses nombre type comprend d'unités . Cette équivalence prend une signification très nette quand on déforme continûment la fonction f (déformation n'ayant rien de commun avec les déformations vers le bas qui, pour une fonction f bien définie, intéressent les ensembles de l'espace de la variable, ou mieux, pour justifier l'expression vers le bas, les ensembles de la variété représentative de la fonction dans le produit de l'espace de la variable par l'axe des valeurs de la fonction).

Par exemple, considérons un tore d'axe légèrement incliné sur la verticale, et prenons, en chaque point de la surface du tore , la cote de ce point par rapport à un plan horizontal fixe . Cette fonction présente un minimum strict , deux cols et un maximum strict . Amenons l'axe à être vertical : la fonction présente alors toute une ligne de minima larges, le parallèle inférieur , et toute une ligne de maxima larges , le parallèle supérieur . Dans un voisinage de ce dernier, constitué par une sorte de couronne gauche de la surface du tore, cette couronne



est le support d'une calotte à deux dimensions , alors que la partie supérieure d'un cercle générateur est celui d'une calotte à une dimension (toute autre lui étant équivalente). En sorte que les nombres type du parallèle supérieur sont 0 pour l'ordre 0, 1 pour l'ordre 1, et 1 pour l'ordre 2 ;

en conformité avec le fait qu'il est limite d'un col et d'un maximum , de nombres type respectifs $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

III.- RESULTATS FONDAMENTAUX

de la THEORIE

9.- Inégalités fondamentales .

Ainsi, en comptant convenablement les points critiques de type (ou d'indice) k , pour lesquels $a < f \leq b$ leur nombre est égal à celui , p_k , des calottes à k dimensions, de bornes c telles que $a < c \leq b$. Ces nombres vérifient alors les inégalités fondamentales de M.Morse ,⁽¹⁾

(1) En réalité, M.Morse a donné ces relations dans le cas où f admettant un minimum absolu et pas $+\infty$ comme valeur critique, a est pris inférieur au minimum et $b = +\infty$ en sorte que les R_k sont les nombres de Betti ordinaires de l'espace \mathcal{C} où est défini f . L'intérêt de considérer un intervalle (a,b) apparaît dans l'extension de la théorie de M.Morse (relative aux points où une fonction unique a sa différentielle nulle) à l'étude des points où les fonctions d'un système ont leurs différentielles linéairement dépendantes .(F.ROGER, [5] , Voir indications bibliographiques) .

$$p_0 \geq R_0, \quad p_1 - p_0 \geq R_1 - R_0, \quad \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots p_k - p_{k-1} + \dots + (-1)^k p_0 \geq R_k - R_{k-1} + \dots + (-1)^k R_0, \dots$$

où les R_k sont les nombres de Betti de l'ensemble E ($f \leq b$) modulo l'ensemble E ($f \leq a$) [nombre maximum de k -cycles de E ($f \leq b$) mod. E ($f \leq a$) dont aucune combinaison linéaire n'est homologue à zéro dans E ($f \leq b$) mod. E ($f \leq a$)] ⁽¹⁾

En particulier, ces inégalités entraînent les suivantes particulièrement simples :

$$p_k \geq R_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Par exemple, une fonction deux fois continûment dérivable définie à la surface d'un tore [$R_0 = 1$, $R_1 = 2$ (cercle générateur et parallèle), $R_2 = 1$] présente au moins un minimum, deux cols et un maximum. De plus,

$p_1 - p_0 \geq 1$: il y a au moins un col de plus que de minima.

Enfin $p_2 - p_1 + p_0 = 0$ [l'inégalité devient une égalité

(1) C'est-à-dire, en désignant par Φ et φ les ensembles emboîtés E ($f \leq b$) et E ($f \leq a$), le nombre maximum de k -calottes indépendantes relatives au couple (Φ, φ) (voir exposé J, section II, p.7), ce qui montre le lien entre les deux notions de calotte et nombre de Betti.

d'après la théorie des calottes (Voir exposé J, p.21, remarque 1) : il y a autant de cols que de minima et maxima réunis .

10.- Applications .

Considérons encore une variété deux fois différentiable V_n à n dimensions, plongée dans l'espace euclidien à une dimension de plus. La distance à un point fixe O d'un point M , variable sur V_n , est stationnaire aux pieds N des normales à V_n issues de O . Sur chaque normale V_n possède n foyers (aux centres de courbure principaux) et quand O n'est pas foyer de V_n , l'indice du point stationnaire non dégénéré N est égal au nombre des foyers sur le segment ON . Par suite, en fonction des nombres de Betti de V_n , les inégalités de M.Morse donnent des renseignements sur les normales issues d'un point fixe, portant les divers nombres de foyers .

Supposons maintenant que la variété V_n soit homéomorphe à une sphère à n dimensions . La distance entre deux points P et Q de V_n est stationnaire quand la corde PQ est normale à V_n en chacune de ses extrémités . Comme M.Morse a obtenu pour nombres de Betti de l'espace des couples (P,Q) (à $2n$ dimensions) , $R_n = R_{n+1} = \dots = R_{2n} = 1$,

les inégalités fondamentales ne peuvent apporter des renseignements bien intéressants . Mais il en va tout autrement quand il s'agit des courbes d'une variété .

Par exemple, sur une variété V_n homéomorphe à une sphère à n dimensions, M.Morse a obtenu pour l'espace des courbes joignant deux points fixes , des nombres de Betti nuls , sauf $R_{m(n-1)} = 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) .

Par suite, si les deux points ne sont conjugués sur aucune extrémale qui les joignent (problème non dégénéré), il existe une infinité de telles extrémales portant des nombres de points conjugués de l'une des extrémités qui sont les multiples successifs de $n-1$. C'est , si l'on veut, l'extension de l'existence des arcs de grand cercle, géodésiques de la surface sphérique à trois dimensions, joignant des points non diamétralement opposés, qui, en s'enroulant de plus en plus autour de la sphère, passent de plus en plus par le point diamétralement opposé à l'une des extrémités . Enfin, même si les extrémités sont conjuguées , la théorie de M.Morse donne encore des renseignements , quoique moins précis .

CONCLUSION

Pour mieux souligner l'intérêt des résultats de M.Morse, comparons-les sur un exemple simple, à ceux de MM.Lusternik et Schnirelmann [4]. La catégorie d'un ensemble fermé dans un espace compact étant, d'après ces derniers, le plus petit nombre d'ensembles fermés dont la réunion redonne l'ensemble de départ, et qui soient chacun réductible à un point par déformation continue dans l'espace considéré, il est aisé de voir que la catégorie de la surface d'un tore par rapport à elle-même est 3. Et la seule conclusion de la théorie est que toute fonction réelle, deux fois continûment dérivable, définie à la surface d'un tore, admet au moins trois points stationnaires. Nous sommes loin des précisions que donne la théorie de M.Morse sur la nature de ces points critiques : au moins un minimum, deux cols et un maximum, un col de plus que de minima, autant de cols que de minima et maxima réunis. Par contre, et c'est ce qui en fait l'intérêt, le nombre 3 donné par MM. Lusternik et Schnirelmann est effectivement celui au dessous duquel on ne peut pas descendre ; car on peut former des exemples où les deux cols sont confondus, mais quand un col se confond avec un ex-

trémum, il apparaît toute une ligne de points stationnaires. Pour employer une comparaison grossière, étant donnée une équation algébrique de degré impair, on sait qu'elle ne peut admettre moins d'une racine; mais on sait aussi qu'elle en admet un nombre exactement égal à son degré, quand on en fait un décompte convenable. C'est un peu dans l'esprit respectif de ces deux résultats que sont les théories de MM. Lusternik et Schnirelmann et de M. Morse.

Enfin, qu'il me soit permis de signaler que, parallèlement à la théorie de M. Morse sur les points critiques d'une fonction d'une fonctionnelle, il m'a paru intéressant de développer une théorie des variétés critiques d'un système de fonctions (F. Roger [5]). Quand il s'agit, comme au (1°) de l'introduction, de fonctions réelles d'un nombre fini de variables réelles, admettant des dérivées secondes continues, l'étude des variétés critiques (où les divers jacobiens s'annulent - comme s'annulent les dérivées premières aux points critiques d'une seule fonction) s'introduit tout naturellement quand on cherche à inverser la correspondance entre l'espace euclidien des variables et celui des fonctions. Lorsque, comme au (2°) ce sont des intégrales curvilignes que l'on considère, ce

sont les problèmes isopérimétriques qui conduisent aux variétés critiques.

Indications Bibliographiques

- 1.- M.Morse Functional topology and abstract variational
 - 2.- M.Morse Theory - Mémorial des Sciences Mathématiques
Fascicule 92 (1939)
 - 2.- M.Morse même titre , Annals of Mathematics , 38 (1937)
p.386 - 449 .
 - 3.- M.Morse The calculus of variations in the large
American Mathematical Society , Colloquium
publications , Vol.28 (1934)
 - 4.- L.Lusternik & L.Schnirelmann - Méthodes topologiques
dans les problèmes variationnels - Actualités
scientifiques et industrielles , n°188 (1934)
 - 5.- F.Roger Sur les variétés critiques des systèmes de
de fonctions de plusieurs variables et les
familles critiques dans le calcul des varia-
tions - Comptes-rendus , 208 , (1939), p.29.
-