SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

BERNARD D'ORGEVAL DUBOUCHET

Le problème paramétrique dans un espace de Riemann

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 6 (1938-1939), exp. n° 7, p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1938-1939__6__A7_0>

CERCLE MATHEMATIQUE

de l'Ecole Normale Supérieure

Sixième année 1938-1939

CALCUL des VARIATIONS

Le problème paramétrique dans un espace de Riemann

Exposé fait par M. Bernard d'ORGEVAL DUBOUCHET

le lundi 13 Mars 1939

Exemplaire n° 6

Cette conférence se composera de deux parties bien distinctes . Dans la première , je ferai un exposé de quelques résultats classiques en géométrie riemannienne et en calcul tensoriel . Dans la seconde, je montrerai comment le problème général du calcul des variations, conçu comme problème paramétrique dans un espace riemannien, peut se reconduire à un problème non paramétrique de l'espace euclidien. Enfin, dans une dernière partie, je montrerai comment la méthode des racines caractéristiques a permis à Morse de généraliser le théorème de Sturm, et d'en faire une application à la théorie des géodésiques d'un espace riemannien quelconque .

L'intérêt de la considération d'un espace riemannien provient de ce que les problèmes du calcul des variations conduisent à des problèmes globaux, et que l'on ne sait pas actuellement si une variété riemannienne donnée <u>en grand</u> , peut être plongée dans un espace euclidien d'un nombre suffisant de dimensions ; alors que le même problème local est toujours possible, si la variété riemannienne est de dimension n , dans un espace euclidien de dimension

$$N \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

D'ailleurs le problème en géométrie riemannienne permet de "géométriser" certains êtres de la théorie, les faisant apparaitre comme des "vecteurs" , et beaucoup des propriétés se ramènent à des propriétés d'invariance de certains tenseurs ou à l'annulation de certaines de leurs composantes .

Les espaces de Riemann

Considérons dans un espace euclidien quelconque n vecteurs unitaires de coordonnées

$$e_1 , e_2 , \ldots , e_n ,$$

dont les produits scalaires forment les coefficients

$$g_{ij} = e_i e_j$$

Un vecteur quelconque (X^i) aura pour longueur (carré scalaire)

$$g_{ij} X^i X^j$$

qui est une forme quadratique, définie positive . Le produit scalaire de deux vecteurs X^i et Y^i sera la forme polaire

$$g_{ij} X^i Y^j$$

Mais si au lieu de considérer les projections de $\vec{X}$ sur les axes, on considère les produits scalaires $\vec{X} . e_i$, on obtient n nouvelles composantes de X

$$X_i = X.e_i = g_{ij} X^j$$

On appelle ces n quantités composantes <u>covariantes</u> par opposition aux X^i dites composantes <u>contravariantes</u> .

Le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit alors

$$X_i\, Y^i = X^i\, Y_i$$

leur angle V est donné par

$$\cos V = \frac{X_i\, Y^i}{\sqrt{X_i X^i}\ \sqrt{Y_i Y^i}}$$

Remarquons que nos vecteurs par leurs deux systèmes de composantes nous donnent des quantités à deux indices l'un supérieur et l'autre inférieur . Ce sont des cas particuliers des tenseurs que nous allons maintenant définir .

Dans leur acception la plus générale, on entend par <u>tenseurs</u> des quantités servant à représenter analytiquement un être géométrique, dont elles sont les composantes, et qui, par un changement de coordonnées , subissent une transformation , en général linéaire, dont les coefficients ne dépendent que des systèmes de référence et non des valeurs numériques des composantes du tenseur .

Nous nous bornerons à des tenseurs de la forme

$$a^{i\cdot k\ell\cdot}_{\cdot j\cdot\cdot m}$$

c'est-à-dire à des lettres affectées d'indices supérieurs et inférieurs , tels que la somme

$$a^{i\ k\ell}_{\ j\ \ \ m}\, X_i Y^j Z_k U_\ell V^m$$

où les X_i , Z_k, U_ℓ sont composantes covariantes , Y^j, V^m composantes contravariantes de vecteurs arbitraires, ait une valeur indépendante du système de coordonnées .

L'opération la plus importante du calcul des tenseurs est la contraction des indices . Cette opération consiste à considérer à côté de

$$a^i{}_j{}^{k\ell}{}_m$$

le tenseur

$$a_i{}^{ik\ell}{}_m$$

On en montre la possibilité à partir de $a_i{}^j$.Si $a_i{}^j X^i Y_j$ est indépendant des coordonnées, l'expression invariante

$$a_i{}^j X^i Y_j - \Lambda X^i Y_j$$

admet des racines en Λ , pour lesquelles les formes en X^i sont dépendantes . $\sum a_i{}^i$ est la somme de ces racines .

En particulier, g_{ij} , tenseur fondamental, possède des composantes contravariantes g^{ij} , et mixtes $g_i{}^j$ (S.de Kunecker) $g_i{}^j = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \left| \begin{matrix} i=j \\ i\neq j \end{matrix} \right.$. Le tenseur contracté est n (nombre de dimensions de l'espace).

Considérons maintenant un continuum à n dimensions, dans lequel on s'est donné une forme différentielle quadratique

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j$$

Cette forme définit l'élément linéaire . Deux cas peuvent se présenter, ou les g_{ij} satisfont à des conditions telles que l'élément ds^2 , représente l'élément linéaire de l'éspace euclidien, ou il n'en est pas ainsi . Dans ce cas, on dit que la métrique donnée définit un espace de Riemann .

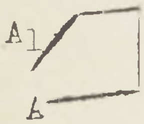
La recherche des conditions pour qu'un tel ds^2 soit euclidien conduit à des conditions d'intégrabilité (supposant les g_{ij} continues ainsi que leurs dérivées, au moins jusqu'à l'ordre 2) de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial u^r} + \sum_h \left(\Gamma^h_{kr} \Gamma^i_{hs} - \Gamma^h_{ks} \Gamma^i_{hr} \right) = 0$$

avec
$$\Gamma_{ris} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^i} \right) - \Gamma^i_{rs} = g^{ik}\, \Gamma_{rks}$$

Si l'expression (1) est différente de zéro, on a un espace de Riemann . Cette valeur non nulle mesure en quelque sorte l'écart qui sépare l'espace de Riemann de celui d'Euclide .

Remarquant que les conditions ne font intervenir que les dérivées secondes, nous voyons que l'on peut introduire un espace euclidien tangent . Soit M un point de l'espace de Riemann, on introduira un espace euclidien tel qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points de cet espace et ceux de l'espace de Riemann, (au moins dans une petite région autour de M) , avec en M , mêmes valeurs numériques de l'élément linéaire .



Ceci étant, considérons un petit parallèlogramme d'origine M (u^i) , de sommets

$$(u^i) \quad (u^i+\alpha^i) \quad (u^i+\alpha^i+\beta^i) \quad (u^i+\beta^i)$$

si on le représente dans l'espace tangent, on obtient une figure ouverte , qui associe une rotation infiniment petite à la facette donnée ; cette rotation s'écrit

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{r,s} R_{ij,rs}\,\alpha^r, \beta^s$$

où $R_{ij,rs}$ est dit le tenseur de Riemann-Christoffel

$$R_{ij,rs} = \frac{\partial \Gamma_{ijr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma_{ijs}}{\partial u^r} + \sum \left(\Gamma_{ihr} \Gamma^h_{js} - \Gamma_{ihs} \Gamma^h_{jr} \right)$$

Le rapport de la rotation infiniment petite à l'aire de la facette est par définition la courbure riemannienne de l'espace en M , dans la direction de la facette .

Si on appelle géodésiques de l'espace, les courbes qui rendent le ds^2 minimum , on peut ramener l'élément linéaire au voisinage à la forme normale

$$ds^2 = dt^2\left(1 - k(x^2 + y^2 + \ldots) + x'^2 + y'^2 + \ldots\right)$$

où k est la courbure de la facette normale à la géodésique en un point d'abscisse t sur la géodésique x, y .... des coordonnées géodésiques normales dans cette facette .

Les espaces de Riemann en grand .

Passons maintenant à une définition en grand . Soit donc une variété riemannienne R , à laquelle est attachée une métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

Nous supposerons dans ce qui suit, les g_{ij} de classe C^3 (Une fonction est de classe C^n si elle est continue ainsi que ses n premières dérivées) . On suppose que dans un espace euclidien auxiliaire d'un même nombre de dimensions m que R il existe une représentation binunivoque de tout point de R ainsi que de ses voisinages . Ceci revient à dire que l'on peut établir une homomorphie entre R et le voisinage d'un point (x) d'un espace euclidien de coordonnées $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ Un autre système de coordonnées (z) sera admissible s'il existe une transformation

$$z^i = z^i(x)$$

où les z^i sont de classe C^4 , avec un jacobien non nul . Nous montrerons que pour transformer notre problème paramétrique au voisinage d'une extrémale donnée, il sera nécessaire d'admettre des transformations seulement de classe C^8, et dites spécialement admissibles .

Un groupe de points de R forme une r-variété si les images de ces points forment dans un système de coordonnées admissibles (x) des équations

$$x^i = x^i(u_1,\ldots,u_r)$$

où les fonctions x^i sont régulières, et si la matrice fonctionnelle des $x^i(u)$ est de rang r . Un arc régulier g de classe C^n sera ainsi un segment fermé d'une variété à une dimension de classe C_n.

<u>Théorème fondamental</u>

Soit g un arc régulier de classe C^4 où t désigne la longueur d'arc . Tout voisinage de g peut se représenter dans un système de coordonnées admissibles (x) par un voisinage de l'axe des x^m d'un espace euclidien (x), en sorte que g corresponde à x^m , avec $t = x^m$.

Soit (z) un système admissible au voisinage d'un point P . Supposons d'abord le voisinage assez grand pour contenir tout l'arc g ; alors cet arc se représente par

$$z^i = \varphi^i(t)$$

Mais une au moins des dérivées $\dfrac{\partial \varphi^i(t)}{\partial t} \neq 0$, soit $\dfrac{\partial \varphi^m(t)}{\partial t}$

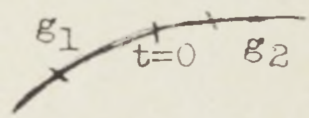
La transformation

$$z^i = x^i + \varphi^i (x^m) \qquad (i=1,\ldots,m-1)$$
$$z^m = \varphi^m (x^m)$$

est admissible et répond à la question, donnant les (x) cherchées .

Supposons maintenant avoir deux segments qui se recouvrent partiellement g_1 et g_2 , si le théorème est vrai pour chacun d'eux, il l'est pour l'arc entier $g_1 + g_2$

Supposons que $t=0$ soit un point intérieur aux deux arcs . Supposons que le système (x) vérifie le théorème sur g_2 , avec $t = x^m$, et que (z) le vérifie sur g_1 avec $t = z^m$. On suppose que si $t = 0$, $(x) = (z) = (0)$. Les deux systèmes étant tous deux admissibles au voisinage de $t = 0$, il y a alors une transformation .



$$(1) \qquad z^i = a_j^i x^j + \eta^i(x) \qquad (i, j = 1,\ldots,m,)$$

où a_j^1 est une constante , avec $a_j^i \neq 0$ et $\eta^i(x)$ une fonction de classe C^4, avec dérivée nulle pour $(x) = (0)$.
Le long de g, on a, près de $t=0$, $t = x^m = z^m$, d'où

$a^m_m \equiv 1$. Supposant les a_j^i égaux à 0 , si $i \neq j$, et à 1 si $i = j$, on peut écrire

(2) $$z^i = x^i + \eta^i(x)$$

Soit alors c une constante positive assez petite et $h(t)$ une fonction, de classe C^4 , en valeur absolue inférieure à 1 telle que

$$h(t) \equiv 1 \qquad t \leq 0 \ ; \qquad h(t) \equiv 0 \qquad t \geq c$$

La transformation (1) est valable au voisinage de $t=0$, sur g_1 et g_2 . Si c est assez petit, la transformation

(3) $$z^i = x^i + h(x^m)\, \eta^i(x)$$

est identique à (2) pour $x^m < 0$, identique si $x^m > 0$; le système (z) représente alors l'ensemble $g_1 + g_2$; en effet, avant $t=0$ sur g_1 , on a la représentation précédente , puis, sur g_2 , avec $t < 2$, on a celle obtenue de (x) par la transformation (z) ; le long de $g_1 + g_2$, on a toujours $z^m = t$.

Si c est assez petit , le jacobien de (z) est non nul .

Dans le cas d'un arc g quelconque, on le recouvre d'une suite d'arcs empiétant les uns sur les autres . On peut ainsi montrer que :

Théorème

S'il existe une transformation non singulière de classe C^3 de systèmes de coordonnées (x) précédents, dans lesquels à g correspond l'arc x^m, où $x^m = t$ le long de g, et où $g_{ij}(x) = \delta_i^j$ le long de g.

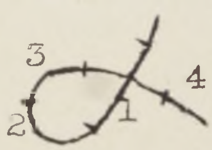
Soit le système (z) établi précédemment. Soit $a_{ij}(z^m)$ la valeur de g_{ij} au point $t = z^m$ sur g ; Faisons la transformation

$$X^i = z^i \qquad\qquad i = 1, \ldots, (m-1)$$

$$X^m = a \quad (z^m) Z^j$$

analogue à la réduction des formes quadratiques. On note $a_m{}^m = 1$. De ceci résulte que dans ds^2, dx^m n'apparait qu'au carré. Par une transformation analogue on réduit à une forme où n'entrent que des carrés dx'^2, multipliés par une fonction positive de z^m. Par une dernière transformation, on fait ce coefficient égal à 1. Ce sont les coordonnées normales.

Nous avons supposé jusqu'ici l'arc sans points multiples. Mais on peut s'affranchir de cette condition en divisant l'arc g en segments partiels assez petits, pour que tout segment formé de trois arcs partiels consécutifs ne contienne pas



de points doubles . En prenant pour chaque arc partiel un système de coordonnées normales dans un voisinage assez étroit pour que les voisinages de l'arc (n-1) n'aient aucun point commun avec ceux de l'arc (n+1) , on recouvre R d'une suite de voisinages formant une variété Riemannienne sur laquelle un voisinage N est distant de tous les autres excepté les consécutifs . Sur le R résultant, g sera sans points multiples et se représentera par un système unique de coordonnées normales .

<u>Les conditions nécessaires en forme tensorielle</u> .

Supposons alors donnée dans un système de coordonnées admissibles (x) , une fonction

$$F(x,r) = F(x^1,\dots,x^m,r^1,\dots,r^m) \qquad (r) \neq (0)$$

servant à définir l'intégrale

$$\int F\,(x,\dot{x})\;dt$$

où $\qquad \dot{x}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$

La transformation $z^i = z^i(x)$ donne sur les (r) la transformation

$$\sigma^h = \frac{\partial z^h}{\partial x^i}\; z^i$$

On admet ainsi que (r) se transforme comme un vecteur contravariant. L'intégrant devient $Q(z,\sigma) = F(x,r)$ et l'intégrale prend la forme

$$\int Q(z,\dot{z})\, dt$$

Nous supposerons dans la suite que dans le voisinage de tout point de R , pour tout système de coordonnées admissibles, l'intégrant soit positif, de classe C^3 et $F(x,r)$ positivement homogène, de degré 1 en (r) , c'est-à-dire

$$F(x,kr) \equiv k\, F(x,r) \qquad k > 0$$

On tire de là la relation

$$r^i\, F_{r^i r^j} \equiv 0 \qquad (i,j = 1,\ldots\ldots,m)$$

d'où $$\left| F_{r^i r^j} \right| \equiv 0$$

propriété importante de la forme paramétrique.

On obtient aussi

$$F_{r^i} = Q_{\sigma^h} \frac{\partial z^h}{\partial x^i}$$

qui montre que F_{r^i} est un vecteur covariant , ou encore que la quantité

$$F_{r^i}\, dx^i$$

est invariante .

L'expression E de Weierstrass

$$E(x, r, \sigma) = F(x, r) - \sigma^i F_{r^i}(x, r)$$

est aussi un invariant. On peut ainsi établir

$$\frac{d}{dt} F_{r^i} - F_{x^i} = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\left[\frac{d}{dt} Q_k - Q_{z^k}\right]$$

Nous introduirons maintenant une fonction $F_1(x, r)$ dont le rôle est particulièrement important .

Soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} F_{r^i r^j} & u_i \\ v_j & 0 \end{vmatrix} = B$$

Ce déterminant égale $- A^{ij} u_i v_j$ en appelant A^{ij} le mineur de $F_{r^i r^j}$ dans le développement de $F_{r^i r^j}$ Mais à l'aide de la relation $r^i F_{r^i r^j} = 0$, on peut montrer que $[r^i u_i]$ et $[r^k u_k]$ divisent B , d'où

$$A^{ij} u_i v_j = F_1(x, r) \, [r^i u_i] \, [r^j v_j]$$

Faisant $(u) = (v) = (r)$ on a

$$F_1(x, r) = \frac{A^{ij} r^i r^j}{(r^i r^j)^2}$$

de sorte que $F_1(x, r)$ est continu en (x) et (r) si $(r) \neq 0$.

Si on passe maintenant des vecteurs (v) , (u) à des vecteurs covariants (v') , (u') , on aura

$$\begin{vmatrix} F_{r^i r^j} & u_i \\ v_j & 0 \end{vmatrix} = c^2 \begin{vmatrix} Q_{\sigma^i \sigma^j} & u'_i \\ v'_j & 0 \end{vmatrix}$$

avec $$c = \left| \frac{\partial r^i}{\partial x^j} \right|$$

d'où, si Q_1 est la forme analogue à F_1

$$c^2 \, Q_1 \, (z, \sigma) = F_1(x, r)$$

Remarque .

Cette fonction F_1 prend dans le cas de deux variables, la forme

$$F_1 = \frac{F_{X'X'}}{X'^2} = - \frac{F_{X'Y'}}{X'Y'} = \frac{F_{Y'Y'}}{Y'^2}$$

(Cf.exposé E , prg 4)

Supposons alors donné un arc de courbe g , arc simple , régulier, orienté, joignant les deux points de R , A_1 et A_2 . Soit alors J la valeur de l'intégrale le long de cette courbe .

En passant avec un système de coordonnées (x) on considère le problème non paramétrique de minimiser J dans l'espace

$$(t, x^1, \ldots, x^m) .$$

g se transforme en un arc $\overline{g}$, qui est minimisant en même temps que g , donc :

<u>Condition nécessaire du minimum faible</u>

$$\frac{d}{dt} F_{r^i} - F_{x^i} \equiv 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$$

le long de g , pour tout système (x) qui contient g .

On peut montrer d'une façon analogue au cas classique :

<u>Condition de Weierstrass (minimum fort)</u>

Il est nécessaire pour $(x,\dot{x})$ sur g et (σ) vecteur quelconque non nul que

$$E(x,\dot{x},\sigma) = F(x,\sigma) - \sigma^i F_{r^i}(x,\dot{x}) \geq 0$$

<u>Condition de Legendre (minimum faible)</u>

Pour $(x,\dot{x})$ sur g , et un vecteur quelconque (Λ) il est nécessaire que

$$F_{r^i r^j} \Lambda^i \Lambda^j \geq 0$$

(Pour $\varphi(e) = E(x,\dot{x},\dot{x}+e\Lambda)$, minimum si $e=0$, $\varphi''(e) \geq 0$)

<u>Existence des extrémales .- Conditions suffisantes</u> .

La condition $|F_{r^i r^j}| = 0$ pose le problème d'établir l'existence des extrémales . On établit facilement la relation

$$\dot{x}^i \left(\frac{d}{dt} F_{r^i} - F_{x^i} \right) \equiv 0$$

Soit alors $\varphi(x,r) \equiv g_{ij}(x)\, r^i r^j$

on considère le système qui définit les extrémales

$$
(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} F_{r^i} - F_{x^i} = 0 \\ \varphi(x, \dot{x}) = 1 \end{array} \right.
$$

Nous remplacerons ce système par celui contenant la fonction inconnue $\Lambda(t)$

$$
(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(F_{r^i} + \Lambda \varphi_{r^i}) - (F_{x^i} + \Lambda \varphi_{x^i}) = 0 \\ (x, \dot{x}) = 1 \end{array} \right.
$$

ce qui, en dérivant en (t) la 2ème de (I) conduit à

$$
\dot{x}^i \varphi_{r^i} \frac{d\Lambda}{dt} = 2 \frac{d\Lambda}{dt} = 0
$$

Donc, toute solution en (Λ) de (II), initialement nulle, donne $\Lambda \equiv 0$. De telles fonctions $x^i(t)$ sont alors solutions de (I).

Mais si on suppose $F_1(x,r) \neq 0$, dans l'intervalle (t_1, t_2) considéré, comme

$$
\begin{vmatrix} F_{r^i r^j} & \varphi_{r^i} \\ \varphi_{r^j} & 0 \end{vmatrix} \neq 0
$$

on peut, en posant $\qquad v_i = F_{r^i}(x,r) + \Lambda \varphi_{r^i}(x,r)$

$1 = \varphi(x,r)$, résoudre

$$
r^i = r^i(x,v) \qquad\qquad \Lambda = \Lambda(x,v)
$$

d'où le système

$$\frac{dx_i}{dt} = z^i(x,v) \qquad \frac{dv_i}{dt} = q_i(x,v) \qquad \Lambda = \Lambda(x,v)$$

où $\quad q_i = F_{x^i}\left[x, r(x,v)\right] + \Lambda(x,v)\ \varphi_{x^i}\left[x, r(x,v)\right]$

qui donnent les solutions $\quad x^i = h^i(t_1, t^o, x_o, v_o)$

$$v^i = k_i(t_1, t_o, x_o, v_o)$$

de classe C^2 , en x et v , si (t_o, x_o, v_o) assez voisins de (x,t,v) sur g .

On se limitera aux solutions $\Lambda = 0$, pour résoudre notre problème, ce qui donnera

$$x^i = x^i(t, t_o, x_o, r_o)$$

de classe C^2 en (t,x,r) si t entre t_1 et t_2 et (t_o, x_o, r_o) assez voisin des valeurs sur g .

Si on suppose définie l'extrémale voisine au point t_1 , par un vecteur tangent $\rho(x)$ dépendant de $(m-1)$ paramètres, l'extrémale sera

$$x^i = x^i\big(t, t_1, \gamma(t_1), r(u)\big) = \varphi^i(t,u)$$

Le jacobien

$$M(t, t_1) = \frac{O(\varphi^1 \ldots\ldots \varphi^m)}{O(t, u_1 \ldots u_{m-1})} \qquad (u) = (0)$$

définit par ses zéros successifs les points conjugués de A_1
On montre que si la condition de Legendre est vérifiée, ces

points conjugués sont isolés .

On peut montrer que les conditions suffisentes pour un minimum strict de J, par rapport à des courbes de classe D^1 , joignant les extrémités de J, exigent

Weierstrass S $E(x,\dot{x},\sigma) \geq 0$

Jacobi (pas de points conjugués)

$F_1 \neq 0$ (sur g)

L'équation de Jacobi en forme tensorielle

Passons maintenant à l'étude de l'équation de Jacobi, en forme tensorielle . Soit g une extrémale qui dans le système (x) peut s'écrire

$$x^i = \gamma^i(t)$$

Posons

$$2\,\omega(\eta,\dot{\eta}) = F_{r^i r^j}\dot{\eta}^i\dot{\eta}^j + 2\,F_{r^i x^j}\dot{\eta}^i\eta^j + F_{x^i x^j}\eta^i\eta^j$$

Soit $x^i(t,e)$ une famille de courbes joignant les extrémités de g , et se réduisant à g si e=0 . Supposons-les de classe C^2 , pour t sur (t_1,t_2) et e assez voisin de 0 . La seconde variation est :

$$J''(0) = \int_{t_1}^{t_2} 2\,\omega(\eta,\dot{\eta})\,dt \qquad \left[\eta^i = x^i_e(t,0)\right]$$

Si on fait un changement admissible de coordonnées (z) , on introduira $2\,\omega_0(\eta_0, \dot{\eta}_0)$, et on montre que l'opérateur

$$L_1(\eta) = \frac{d}{dt}\,\omega_{\dot{\eta}^i} - \omega_{\eta^i}$$

est un <u>vecteur covariant si g est une extrémale</u> .

On a de plus

$$\dot{\gamma}^i\, L_1(\eta) \equiv 0$$

Pour résoudre cette équation, étant donnée la difficulté, née de $|F_{r^i r^j}| = 0$, on considère le système

$$\text{I)} \qquad L_1(\eta) = 0\ , \qquad \frac{d^2}{dt^2}(g_{ij}\,\dot{\gamma}^i\,\eta^j) = 0$$

L'invariant de la 2ème équation est la projection η^T de (η) sur la tangente à g $\quad \eta^T = at + b$

On introduit alors le système

$$\text{II)} \qquad L_1(r) + \mu\, g_{ij}\,\dot{\gamma}^j = 0 \qquad \frac{d^2}{dt^2}(g_{ij}\dot{\gamma}^i\,\eta^j) = 0$$

qui introduit

$$\begin{vmatrix} F_{r^i r^j} & g_{ij}\,\dot{\gamma}^j \\ g_{ij}\,\dot{\gamma}^i & 0 \end{vmatrix} = F_1(\gamma, \dot{\gamma}) \neq 0$$

ce qui permet de résoudre I) , mais on peut montrer que $\mu \equiv 0$ donc II) identique à I) .

L'ensemble de conditions I forme l'équation de Jacobi en forme tensorielle ; une solution est un tenseur contravarient η^1 ; l'indépendance des solutions est liée à l'indépendance de leur représentation .

Le passage à la forme non paramétrique avec l'axe x^m égal à g , permet de faire disparaitre $\eta^T = \eta^m$, nul aux deux extrémités, donc $\eta^m \equiv 0$, d'où on retombe sur l'équation de Jacobi, dans le cas déjà étudié, d'où :

Théorème

Un point $t = t''$ est conjugué d'un point $t = t'$ s'il existe une solution de l'équation de Jacobi, en forme tensorielle, non identiquement nulle, qui s'annule en t' et t" . Le nombre de solutions indépendantes nulles en ces points égale le même nombre , dans une représentation non paramétrique du problème en coordonnées normales .

On introduira de même une condition de transversalité, et le problème accessoire . Mais les solutions de ce problème seront alors des vecteurs .

Les solutions caractéristiques et la forme indicatrice

On peut par des coordonnées normales passer du problème accessoire paramétrique à un problème normal non paramétrique accessoire . On montre que les solutions de ces deux problèmes se correspondent biunivoquement, ce qui conserve les relations de dépendance et indépendance .

Si on suppose maintenant vérifiées sur l'extrémale g les conditions de Legendre et de transversalité, admettant que les variétés terminales sont régulières et non tangentes, on peut diviser l'arc t_1, t_2 en arcs assez petits pour que chaque portion ne contienne pas de couples de points conjugués. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les segments . On introduit les variétés intermédiaires M_q de classe C^2, $x^i = X^i_q(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ non tangentes à g ; d'où la définition d'un arc extrémal brisé que l'on compare à g . Si on désigne par v l'ensemble des paramètres

$$(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots) \text{ en nombre}$$

δ , la valeur de $J(v)$ le long de l'extrémale brisée définit la forme indicatrice

$$P(z) = J_{v^i v^j}(0)\, z_i z_j \qquad (i, j = 1, \ldots, \delta)$$

Cette forme est un invariant , et on peut montrer qu'en passant au problème normal, la forme $P(z)$ s'identifie avec la forme $Q(z)$ de la dernière conférence , construite pour l'axe des x avec les mêmes variétés intermédiaires . La correspondance des propriétés caractéristiques nousmontre alors que l'indice de $P(z)$ égale le nombre de racines caractéristiques négatives du problème accessoire , en forme tensorielle , et que le nombre de carrés dégénérés est le même dans les deux cas .

On a donc un minimum non strict pour g si g vérifie :

condition de transversalité

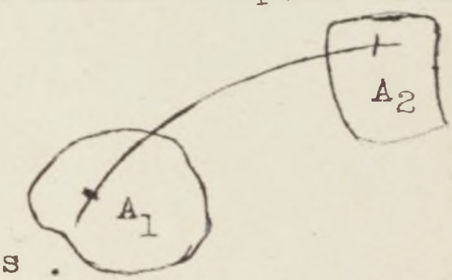
Weierstrass

$F_1 \neq 0$

non-tangence

racines caractéristiques du problème accessoire toutes positives .

On arrive comme dans le cas de la dernière conférence à l'existence de familles d'extrémales coupant transversalement une variété terminale, et à montrer que le minimum entre A_1 et A_2 exige qu'entre A_1 et A_2 il n'y ait pas de points focaux des surfaces terminales .



Les systèmes anto-adjoints

Je vais dire maintenant quelques mots sur l'utilisation des équations caractéristiques , pour obtenir certains théorèmes de comparaison et oscillation, analogues à celui de Sturm .

Considérons un système d'équations différentielles de la forme

$$L_i(\eta) = \frac{d}{dx}(a_{ij}\,\eta'_j + b_{ij}\,\eta_j) - (c_{ij}\,\eta'_j + d_{ij}\,\eta_j) = 0$$

où les fonctions sont continues en x sur $(a_1,\ldots,a_r)$. On dit ce système anto-adjoint , s'il existe une forme bilinéaire $M(u,v,u',v')$ telle que

$$u_i L_i(v) - v_i L_i(u) = \frac{d}{dx} M(u,v,u',v')$$

Dans ce cas, les équations prennent la forme

$$(1) \qquad L_i(\eta) = \frac{d}{dx}(R_{ij}\,\eta'_j + Q_{ij}\,\eta_j) - (Q_{ji}\,\eta'_j + P_{ij}\,\eta_j)$$

avec

$$R_{ij}(x) \equiv R_{ji}(x) \qquad\qquad P_{ij}(x) \equiv P_{ji}(x)$$

Les équations (1) sont équations d'Euler de l'intégrale

$$2\int_{a_1}^{a_2} \Omega(\eta,\eta')\,dx = \int_{a_1}^{a_2} (R_{ij}\,\eta'_i\,\eta'_j + 2Q_{ij}\,\eta'_i\,\eta_j + P_{ij}\,\eta_i\,\eta_j)\,dx$$

Rappelons qu'étant donnée une forme bilinéaire $P(u,v)$ de m variables (u) et (v) , dont la matrice est de rang m , les p formes linéaires de (u) $U_1,\ldots,U_p$ et les $(m-p)$ formes $V_1,\ldots,V_{m-p}$ de (v) sont des conditions adjointes si (u) et (v) les vérifiant entraine

$$P(u,v) = 0$$

Revenant à nos équations

$$L_i(\eta) = \frac{d}{dx}\,\Omega_{\eta'_i} - \Omega_{\eta_i} = 0$$

on suppose le système régulier, positif , $R_{ij}(x)\, w_i w_j \geq 0$

posons $\zeta_i = \Omega_{\eta'_i}(\eta, \eta')$; avec d'autres inconnues $\bar{\eta}^i$, $\bar{\zeta}^i$, on a

$$\int_{a_1}^{a_2} \left[\eta_i L_i(\bar{\eta}) - \bar{\eta}_i L_i(\eta)\right] = \left[\eta_i \bar{\zeta}_i - \zeta_i \bar{\eta}_i\right]_1^2 = P(\eta, \zeta, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$$

forme bilinéaire de 4n variables . On dira que les conditions aux limites sont anto-adjointes, si elles sont leurs propres adjointes dans cette forme ; ceci conduit à

$$\alpha) \quad \eta_i^s - c_{ih}^s u_h = 0 \qquad \beta) \quad C_{ih}^2 \zeta_i^2 - C_{ih}^1 \zeta_i^1 + b_{hk} u_k = 0$$

où la matrice $\| c_{ih}^s \|$ de rang r , et $\| b_{hk} \|$ symétrique . L'équation α) représente un r-plan Π_r de l'espace à 2n-dimensions η , de paramètre (u) . La forme quadratique $b_{hk} u_h u_k$ est la forme accessoire .

On montre que deux groupes de conditions sont équivalentes si elles conduisent à des Π_r plans, confondus dans l'espace (η) et dont les formes prennent les mêmes valeurs numériques aux mêmes points .

Ceci montre que Π_r et $b_{hk} u_h u_k$ sont des invariants géométriques .

Supposons maintenant que le problème dépende d'un paramètre σ , on considérera la fonctionnelle

$$I(\eta, \sigma) = b_{hk}(\sigma)\, u_h\, u_k + \int_{a_1}^{a_2} 2\, \omega(\eta, \eta^1, \sigma)\, dx$$

pour des $\eta^1(x)$ de classe D^1, admettant les problèmes B, tels que

A_1 - quel que soit σ, P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}, $\frac{\partial Q_{ij}}{\partial x}$, $\frac{\partial R_{ij}}{\partial x}$, b_{hk} continus

A_2 - la matrice des $\| c_{ih}^{s} \|$ de rang r, des $\| b_{hk} \|$ symétrique

A_3 - quel que soit σ, (w), x sur a_1, a_2, $R_{ij}(x, \sigma)\, w_i w_j > 0$

A_4 - <u>Pour $(-\sigma)$ assez grand $I(\eta, \sigma)$ définie positive</u>

A_5 - La forme accessoire décroit si σ croit.

Une solution caractéristique satisfera les conditions limites, la valeur de σ correspondance est racine caractéristique, son indice est le nombre de solutions caractéristiques correspondantes.

Par un arc brisé, on remplacera la fonctionnelle par la forme indicatrice

$$Q(z, \sigma) = b_{hk}(\sigma)\, u_h u_k + \int_{a_1}^{a_2} 2\, \omega(\eta, \eta', \sigma)\, dx$$

$$(Z) = (u_1 \ldots u_r, Z_1^{\,1}, \ldots, Z_n^{\,1}, \ldots Z_1^{\,p}, \ldots, Z_n^{\,p})$$

avec les extrémités $\eta_i^{\,s} - C_{ih}^{s}\, u_h = 0 \quad x = a^s$; et les sommets $\eta_i(a^q) = Z_i^{\,q}$

On montre que si σ est racine caractéristique $Q(z,\sigma)$ devient singulière , et sa "nullité" égale l'indice de σ , l'indice de $Q(z,\sigma)$ (nombre de carrés négatifs) égale alors le nombre de racines caractéristiques inférieures à σ .

Le nombre de racines inférieures à σ_0 est donc fini, elles sont donc isolées , et varient continûment (par exemple avec a_1).

On peut maintenant comparer deux problèmes avec la même forme et des conditions limites distinctes :
on appelle forme différence $d = \left[b^1_{hk}(\sigma) - b_{hk}(\sigma) \right] u_h u_k$ de B^1 à B .

a) <u>Sous-problème</u>

Le Π_{r_1} plan de B_1 est partie de Π_r ; on établit, entre les nombres de racines caractéristiques de B et B_1 inférieures à σ donné, la relation

$$\nu - (r-r_1) \leq \nu_1 \leq \nu$$

b) Π_r <u>est commun</u>

Supposons que d ait l'indice N , et (-d) l'indice P , les nombres ν et ν_1 de racines inférieures à donné sont

$$\nu(\sigma) - P(\sigma) \leq \nu_1(\sigma) \leq \nu(\sigma) + N(\sigma)$$

c) <u>B et B_1 quelconques</u>

Π_r et Π_{r_1} se coupent selon un Π_t $(2n+t=r+r_1-1)$

on a , avec les mêmes notations

$$\nu(\sigma) - P(\sigma) - r + t \leq \nu_1(\sigma) \leq \nu(\sigma) + N(\sigma) + r_1 - t$$

Si $\Delta(x,\sigma)$ est un déterminant de n éléments $\eta_{ij}(x,\sigma)$ dont les colonnes sont solutions de l'équation de Jacobi, avec $\eta_{ij}(a^1,\sigma) = 0 \quad \eta_{ij}{}^1(a^1,\sigma) = \delta_i^j$

il s'annule à nouveau en un point conjugué .

<u>Théorème d'oscillation</u>

Si r est la dimension du plan final accessoire du problème B, et $\nu(\sigma)$ le nombre de racines caractéristiques inférieures à σ , alors $\Delta(x,\sigma)$ s'annule entre a_1 et a_2 , au plus $\nu(\sigma)$ et au moins $\nu(\sigma) - r$ fois .

En comparant deux problèmes avec des Π_r communs et des formes ω et ω' , on obtient les généralisations du théorème de Sturm, que le point conjugué de $x = c$ sur varie dans le même sens ; et surtout , si on a constamment

$$\omega'(\eta,\eta') \geq \omega(\eta,\eta')$$

les conjugués de a^1 , dans le problème ω' , se trouvent avant ceux de ω .

Passons alors à l'application que nous avions en vue . Supposant donné un espace riemannien

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

nous disons avec Hopf que cet espace est complet :

1) si toute géodésique peut être continuée indéfiniment

2) si tout ensemble borné g est fermé (Bolzano-Weierstrass)

On peut montrer que dans un tel espace , il existe toujours une géodésique minimale .

Si donc, on se donne une géodésique g , le problème secondaire qui détermine les points conjugués d'un point A de g , supposant $(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ coordonnées normales , avec x_m longueur d'arc sur g , conduit à

$$\eta_i'' + R_{nk,ni}(s)\,\eta_k = 0 \qquad (i,k=1,\ldots,n-1)$$

où les $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(s)$ sont les composantes du tenseur de Riemann sur g . La courbure dans le plan $(0,0,\ldots,0,1)$; $(u_1,\ldots,u_{n-1},0)$ est

$$R_{nk,ni}\, u_k\, u_i$$

On voit que l'on a ici

$$\omega(\eta,\eta') = \eta_i'\eta_j' - R_{ni,nj}\,\eta_i\,\eta_j$$

Si la courbure est partout négative, on n'a évidemment pas de points conjugués .

Supposons-la positive, supérieure à C , c'est-à-dire

$$R_{nk,ni}\, u_k\, u_i \geq C\,(u_1^{2} + \dots + u_n^{2})$$

La comparaison des équations

$$\begin{cases} \eta_i'' + R_{nk,ni} \quad {}_k = 0 \\ \eta_i'' + C\ \eta_i = 0 \end{cases}$$

à l'aide de la généralisation du théorème de Sturm, conduit à montrer que le conjugué de A se trouve à une distance de A inférieure à $\dfrac{\pi}{\sqrt{C}}$

Il n'y a pas de points de l'espace à plus de $\dfrac{\pi}{\sqrt{C}}$ de A; la variété est bornée, comme elle est compacte, il en résulte qu'elle est fermée, ce qui est la généralisation du théorème d'Ossian-Bonnet .