SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

CLAUDE CHEVALLEY

# La théorie algébrique des fonctions algébriques - I et II

*Séminaire de Mathématiques (Julia)*, tome 5 (1937-1938), exp. n° 1, p. 1-37

<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1937-1938__5__A1_0>

V. - C + D .

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Cinquième année 1937-1938

# LES FONCTIONS ALGEBRIQUES

## La Théorie algébrique des Fonctions algébriques - I

Exposés faits par M. Claude CHEVALLEY

les lundis 20 Décembre 1937 et 17 Janvier 1938

Exemplaire n° 3

Dans les deux précédentes conférences, on a étudié, avec les moyens de l'analyse, les corps de fonctions algébriques construits à partir du corps des nombres complexes pris comme corps de constantes . Nous allons maintenant revenir sur cette théorie du point de vue algébrique Les avantages qu'il y a à opérer ainsi sont de plusieurs espèces : 1) on met en lumière le caractère algébrique des notions étudiées, et on n'utilise, pour les démonstrations, que des moyens purement algébriques ;

2) on permet la généralisation, et notamment l'étude des fonctions algébriques obtenues en prenant un corps quelconque comme corps de constantes, étude qui doit être intéressante du point de vue de la recherche des propriétés arithmétiques des courbes algébriques .

Avant de commencer cette étude, nous avons besoin de rappeler un certain nombre de points de la théorie abstraite des corps .

## THEORIE GENERALE DES CORPS

### I.- Théorie des polynomes.

k étant un corps quelconque, on peut développer la théorie des polynomes à coefficients dans k par rapport à un certain nombre de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ .

Etant donné deux polynomes , P, Q, il existe un polynome D qui les divise et qui est divisible par tout diviseur commun à P et à Q ; D est déterminé par ces conditions à une constante multiplicative près ; on l'appelle un p.g.c.d. de P et Q . Il résulte de là que tout polynome peut être décomposé en facteurs irréductibles (c'est-à-dire en polynomes n'admettant plus de décomposition non triviale) , et ceci d'une seule manière, à des constantes multiplicatives près.

Dans le cas où $n = 1$, on a de plus le fait que D peut se mettre sous la forme $UP + VQ$, U et V étant de nouveaux polynomes . En particulier, si P et Q sont premiers entre eux, on peut mettre 1, et par suite aussi n'importe quel polynome, sous la forme $UP + VQ$ .

$f(x)$ étant un polynome , $a$ est appelé un zéro de $f(x)$ si $f(a) = 0$ . Dans ce cas $f(x)$ est divisible par $x-a$ . S'il est divisible par $(x-a)^r$ , mais non par $(x-a)^{r+1}$ r est appelé l'ordre du zéro $a$ . Si $r > 1$, on dit que a est un zéro multiple . Dans ce cas, $a$ est un zéro du dérivé $f'(x)$ de $f(x)$ , défini comme étant le coefficient de t dans $f(x+t)$ .

Quand on opère sur un corps quelconque comme corps des coefficients, il faut distinguer soigneusement la notion de polynome de celle de la fonction représentée par le polynome : nous verrons que dans certains cas, un polynome non nul peut prendre la valeur 0 quelles que

soient les valeurs données aux variables .

2.- Extensions

k étant un corps, on appelle extension de k la notion complexe composée d'un corps K et d'une isomorphie $I_k$ de k avec un sous-corps de K, que nous désignerons par $k^*$ . Une extension devra donc se représenter en principe par un symbole de la forme $(K, I_k)$ . On emploie souvent la notation défectueuse K/k ; l'emploi de cette notation sera de règle lorsqu'on supposera que $I_k$ est l'isomorphie identique , de sorte que $k \subset K$ .

Les extensions $(K, I_k)$ , $(K', I'_k)$ de k ne seront considérées comme identiques que si $K = K'$ et $I_k = I'_k$ . Plus importante est la notion d'isomorphie : les extensions précédentes seront dites isomorphes s'il existe une isomorphie J de K avec K' telle que $I'_k = J\, I_k$ Si L est un sous-corps de K contenant k , l'extension $(L, I_k)$ sera dite contenue dans $(K, I_k)$ .

E étant un ensemble d'éléments de K, on désignera par $k^*(E)$ le plus petit sous-corps de K contenant $k^*$ et E . Quand cela ne risque pas d'entrainer de confusion, ce corps pourra aussi se noter $k(E)$ . On dit qu'il résulte de l'adjonction à k des éléments de E . De même, on dit que l'extension $(k'(E), I_k)$ est engendrée par les éléments de E . Une extension est dite simple quand elle

peut être engendrée par un seul élément .

L'isomorphie $I_k$ fait correspondre à tout polynome $f$ à coefficients dans $k$ un polynome $f^*$ à coefficients dans $K$ . Si un élément de $K$ est zéro de $f^*$ , on dit aussi (improprement) qu'il est zéro de $f$ . Si un élément de $K$ est zéro d'un polynome à coefficient dans $k$ , on dit qu'il est algébrique sur $k$ ; s'il en est ainsi de tous les éléments de $K$, on dit que l'extension $(K, I_k)$ est algébrique ; sinon , qu'elle est transcendante .

Nous aurons à considérer plus particulièrement trois sortes d'extensions d'un corps $k$ :

1) les extensions transcendantes simples : on démontre que tout corps possède une extension transcendante simple, et une seule à une isomorphie près ;

2) les extensions algébriques simples ; une telle extension est engendrée par un zéro d'un polynome irréductible dans $k$ ; inversement, $f$ étant un polynome irréductible dans $k$ , on peut toujours former une extension algébrique de $k$ qui soit engendrée par un zéro de $f$ . Nous appellerons une telle extension , <u>extension de dislocation</u> de $f$. Elle est déterminée à une isomorphie près par la donnée de $f$ ;

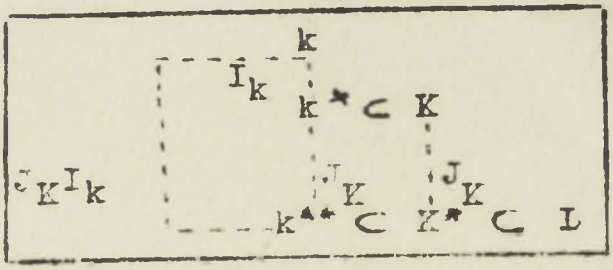
3) $f$ étant un polynome quelconque de degré $\geq 0$ à coefficients dans $k$ , on peut former une extension de $k$

engendrée par des zéros de $f$ et dans laquelle $f$ se décompose en facteurs linéaires . Une pareille extension est dite extension de décomposition de $f$ ; elle est déterminée à une isomorphie près par la donnée de $f$ .

Se donner une extension $(K, I_k)$ de $k$ conduit à considérer les éléments de $k$ comme des opérateurs de $K$ (puisque les éléments de $k^* = I_k\, k$ sont contenus dans $K$) . $K$ se trouve ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel par rapport à $k$ . La dimension (finie ou infinie) de cet espace vectoriel s'appelle le degré de l'extension et se note $(K:k)$ (ce nombre est bien déterminé par les données de $K$ et de $k^*$ , mais non par celles de $K$ et de $k$ ) . Une extension de degré fini s'appelle finie . Toute extension finie est algébrique, et est isomorphe à une extension contenue dans une extension de décomposition d'un polynome $f$ de $k$ . Par contre, une extension finie n'est pas toujours simple (cf. la suite) . Une extension de dislocation d'un polynome irréductible $f$ a pour degré le degré de $f$ .

$(K, I_k)$ étant une extension de $k$ , soit $(L, J_k)$ une extension de $K$ . Alors le symbole $(L, J_K, I_k)$ définit une extension de $k$ (cf. schéma ci-joint , page suivante) . Le degré $(L:k)$ de cette extension est donné par la formule

$$(L:k) = (L:K)\ (K:k)$$




Si $(K, I_k)$ est une extension finie de k , K considéré comme un espace vectoriel par rapport à k , admet comme opérateurs les éléments de K : autrement dit, il fournit une représentation de K . Si on choisit une base de K par rapport à k , on obtient une représentation de K , par des matrices à coefficients dans k. Si $A_\alpha$ est la substitution linéaire qui correspond à un élément $\alpha$ de K, le polynome caractéristique f de $A_\alpha$ est appelé polynome caractéristique de $\alpha$ . C'est une puissance du polynome irréductible de k admettant $\alpha$ pour zéro .

Le déterminant de $A_\alpha$ s'appelle la norme de $\alpha$ , prise de K à k . On la désigne par $N_{K/k}(\alpha)$ . On a donc :

$$N_{K/k}(\alpha\ \beta) = N_{K/k}(\alpha)\ N_{K/k}(\beta) .$$

La trace de $A_\alpha$ s'appelle la trace de $\alpha$ , prise de K à k . On la désigne par $S_{K/k}(\alpha)$ . On a donc :

$$S_{K/k}(\alpha + \beta) = S_{K/k}(\alpha) + S_{K/k}(\beta) .$$

Si $(L, J_K)$ est une extension de K, et si $\gamma \in L$ on a :

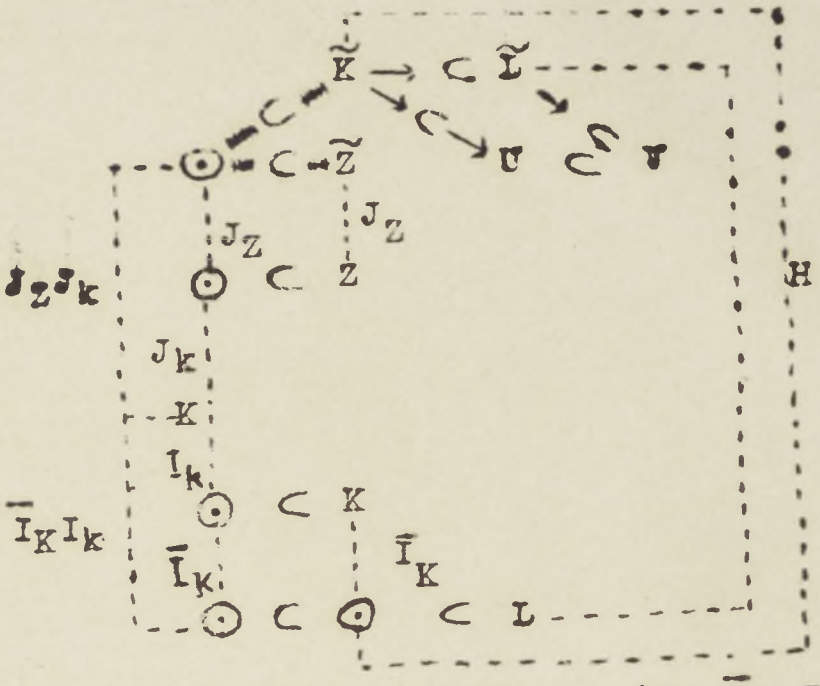
$$N_{L/k}(\gamma) = N_{K/k}\left(N_{L/K}(\gamma)\right) \qquad S_{L/k}(\gamma) = S_{K/k}\left(S_{L/K}(\gamma)\right)$$

3.- Extensions composées .

Considérons deux extensions $(K, I_k)$ et $(Z, J_k)$ d'un corps k . U étant un corps , supposons données des isomorphies $I_K$ , $J_Z$ de K et de Z avec des sous-corps $\tilde{K}$ , $\tilde{Z}$ , de U , telles que $U = \tilde{K}\,\tilde{Z}$ (c'est-à-dire que U soit le plus petit corps contenant $\tilde{K}$ et $\tilde{Z}$ ) , et que les isomorphies $I_K I_k$ et $J_K J_k$ de k dans U soient identiques . Nous dirons alors que les données de U , $I_K$ , $I_Z$ déterminent une extension composée des extensions $(K, I_k)$ et $(Z, J_k)$ . Nous désignerons cette extension composée par le symbole $(U, I_K, J_Z)$ .

Les extensions composées $(U, I_K, J_Z)$ et $(U', I'_K, J'_Z)$ seront dites isomorphes s'il existe une isomorphie G de U avec U' telle que $G\, I_K = I'_K$ et $G\, J_Z = J'_Z$.

Nous n'aurons à nous servir de la notion d'extension composée que dans le cas où l'une au moins des extensions $(K, I_k)$ , $(Z, J_k)$ est finie ; supposons par exemple, qu'il en soit ainsi de la première . Il existe alors un polynome g à coefficients dans k tel que l'extension $(K, I_k)$ soit engendrée par des zéros de g . Formons alors sur K et sur Z des extensions $(L, \bar{I}_K)$ et $(V, \bar{J}_Z)$ de décomposition de g . En vertu du choix de g , $(L, \bar{I}_K, I_k)$ est une extension de décomposition de g sur k . D'autre part les zéros de g dans V engendrent sur k une ex-




Les ⊙ désignent des corps qui n'ont pas reçu de notation spéciale dans le texte.

tension de décomposition $(L, \bar{J}_Z J_k)$ de $g$. Nous avons donc deux extensions de décomposition de $g$ sur $k$ : nous savons qu'elles sont isomorphes. Or la première contient une extension de $k$ isomorphe à $(K, I_k)$ ; il en résulte qu'il existe une isomorphie $H$ de $(K, I_k)$ avec une extension contenue dans $(V, \bar{J}_Z J_k)$. Posons $\widetilde{K} = H K$, et $\widetilde{Z} = J_Z Z$ ; soit $U = \widetilde{K}\widetilde{Z}$ le plus petit sous-corps de $V$ contenant $K$ et $Z$. Le symbole $(U, H, \bar{J}_Z)$ représente une extension composée des extensions $(K, I_k)$ et $(Z, J_k)$.

D'autre part, $L$, $V$, $\bar{I}_K$, $\bar{J}_Z$ étant fixés, il n'y a qu'un nombre fini d'isomorphies $H$, car $g$ n'a qu'un nombre fini de zéros. Soient $H_i$ $(1 \leq i \leq s)$ ces isomorphies, et $U_i$ les corps $U$ correspondants. Nous allons

montrer que toute extension composée $(U' . I'_K . J'_Z)$ des extensions données est isomorphe à l'une des $(U.H_i, \bar{J}_Z)$ . Formons, en effet, sur U' une extension $(V', J_{U'})$ de décomposition de $g$ . Alors $(V', J_{U'}, J'_Z)$ est une extension de décomposition de $g$ sur Z , donc isomorphe à $(V, \bar{J}_Z)$ . Il existe donc une isomorphie G de V' avec V telle que $G\, J_{U'}, J' = \bar{J}$ . L'extension $(GJ_{U'}, I'_K K, GJ_{U'}, I'_K I_k)$ est une extension de k isomorphe à $(K, I_k)$ et contenue dans l'extension $(V, \bar{J}_Z J_k)$ (on notera que $I'_K I_k = J'_Z J_k$ par hypothèse) . Donc $G\, J_{U'}, I'_Z$ est l'une des isomorphies $H_i$ . Il en résulte que $G\, J_{U'}$ est une isomorphie entre $(U'.I'_K.J'_Z)$ et $(U_i, H_i, \bar{J}_Z)$ ce qui démontre notre assertion .

Il en résulte que si $(K, I_k)$ est finie , il n'y a qu'un nombre fini de types d'extensions composées de $(K, I_k)$ et $(Z.J_k)$ .

4.- La caractéristique .

k étant un corps, désignons par 1 son unité multiplicative . Deux circonstances peuvent se présenter : ou bien la somme de n éléments égaux à 1 n'est jamais nulle (n entier positif) : on dit alors que le corps est de caractéristique 0 ; - ou bien, on peut avoir $n.1 = 0$ ; dans ces conditions, le plus petit entier positif p pour lequel $p.1 = 0$ est un nombre premier que l'on appelle

caractéristique du corps . $a$ étant un élément quelconque du corps, la somme de $p$ éléments égaux à $a$ est nulle .

Deux corps dont l'un est contenu dans l'autre ont évidemment même caractéristique . Tout corps de caractéristique 0 contient un corps isomorphe au corps des nombres rationnels et est par suite infini . Si $p$ est un nombre premier, la famille des classes de restes d'entiers (mod.p) donne un corps fini de caractéristique p ; tout corps de caractéristique $p$ contient un corps isomorphe à celui-là .

Dans un corps de caractéristique $p$ , on a la formule remarquable $(a + b)^p = a^p + b^p$ . Jointe à la formule évidente $(ab)^p = a^p b^p$ , elle montre que la correspondance $a \longrightarrow a^p$ est une isomorphie du corps $k$ avec un corps qui y est contenu . Nous désignerons par $\sigma$ cette isomorphie et nous l'appellerons l'endomorphie fondamentale de $k$ ; si $k$ est de caractéristique 0 , nous désignerons par $\sigma$ la transformation identique . $E$ étant un ensemble nous désignerons par $E^\sigma$ son image par $\sigma$ .

5.- Corps parfaits . Extensions séparables.

Nous dirons que le corps $k$ est parfait si $k^\sigma = k$ . Il résulte de là que tout corps de caractéristique 0 est parfait ; il en est de même des corps finis (puisque $k^\sigma$ a autant d'éléments que $k$) . Par contre,

on voit facilement que le corps $k(x)$ qui résulte de l'adjonction à un corps $k$ de caractéristique $p \neq 0$ d'une transcendante $x$, n'est pas parfait.

Une extension $K/k$, de degré fini, est dite <u>séparable</u> si $K = k(K^{\sigma})$. En tenant compte de ce que $(K^{\sigma} : k^{\sigma}) = (K:k)$, on voit que toute extension finie d'un corps parfait est séparable.

Si $K/k$ est une extension séparable, de degré fini, et si $L$ est un corps intermédiaire entre $k$ et $K$, les extensions $K/L$ et $L/k$ sont séparables. Pour la premier, c'est évident; pour la seconde, cela résulte de la formule $\left(K:k(L^{\sigma})\right) = \left(k(K^{\sigma}):k(L^{\sigma})\right) \leq (K^{\sigma} : L^{\sigma}) = (K:L)$.

$\alpha$ étant un élément algébrique par rapport à $k$ soit $f(x)$ le polynome irréductible dans $k$ admettant $\alpha$ pour zéro. Nous allons montrer qu'<u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $k(\alpha) / k$ <u>soit séparable est que</u> $\alpha$ <u>soit zéro simple de</u> $f(x)$.

En effet, si $\alpha$ est zéro multiple de $f(x)$, on a $f'(\alpha) = 0$, $f$ étant irréductible, cela n'est possible que si $f'(x) \equiv 0$, c'est-à-dire si $f(x)$ peut se mettre sous la forme $g(x^p)$, $g$ étant un polynome de degré plus petit que celui de $f$ et $p$ la caractéristique de $k$. On a alors $g(\alpha^p) = 0$, d'où $\left(K(\alpha^p):k\right) < \left(k(\alpha):k\right)$ Or, si on pose $k(\alpha) = K$, on a $k(\alpha^p) = k(K^{\sigma})$ : l'ext

tension $K/k$ n'est donc pas séparable dans le cas envisagé. Si au contraire, $\alpha$ est zéro simple de $f(x)$, $x-\alpha$ est p.g.c.d. de $f(x)$ et de $(x-\alpha)^p = x^p - \alpha^p$, d'où $\alpha \in k(\alpha^p)$, et $k(K^\sigma) = K$.

D'autre part, si une extension $K/k$ de $k$, de degré fini, se met sous la forme $k(E)$, une condition nécessaire et suffisante pour que $K/k$ soit séparable est que, pour tout $\alpha \in E$, $k(E)/k$ soit séparable. La condition est évidemment nécessaire ; inversement, si elle est remplie, on a $k(E^\sigma) = k(E) = K$ ; comme $k^\sigma(E^\sigma) = K^\sigma$ on a aussi $k(K^\sigma) = K$.

Les deux précédents résultats permettent de reconnaître si une extension est séparable dès qu'on connaît un système de générateurs de cette extension. On voit notamment que <u>toute extension algébrique finie d'un corps parfait est séparable</u>. Par contre, si $k$ n'est pas parfait, et si $a \in k \longrightarrow k^\sigma$, l'extension $k(\sqrt[p]{a})/k$ n'est pas séparable. Par suite, <u>une condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps soit parfait est que toutes ses extensions finies soient séparables</u>. On en déduit tout de suite que toute extension algébrique (finie ou non) d'un corps parfait est un corps parfait.

$K$ étant une extension finie du corps $k$, formons la suite $K = k(K^{\sigma^0})$, $k(K^\sigma)$, $k(K^{\sigma^2})$ ...., $k(K^{\sigma^n})$ ..... Ces corps sont emboités les uns dans les autres ; il

en résulte qu'il existe un entier $f$ tel que $k(K^{\sigma^f}) = k(K^{\sigma^{f+1}})$ Tous les corps de la suite à partir du rang $f$ sont alors identiques . L'entier $f$ étant choisi le plus petit possible , on l'appelle l'exposant de l'extension $K/k$ . L'extension $k(K^{\sigma^f})/k$ est séparable : son degré $n$ est appelé degré réduit de l'extension $K/k$ . On voit tout de suite que $\left(k(K^{\sigma^i}) : k(K^{\sigma^{i+1}})\right)$ est une puissance de $p$ ; il en résulte que le degré de l'extension $K/k$ est de la forme $np^{f+x}$ $(x \geq 0)$ .

6.- Extensions simples .

Une extension $K/k$ du corps $k$ est dite simple si $K$ résulte de l'adjonction à $k$ d'un seul élément Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

K/k étant une extension algébrique finie de degré réduit $n$ et d'exposant $f$ , une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit simple est que $(K/k) = np^f$ ($p$ étant la caractéristique de $k$ ; remplacer $p^f$ par 1 si $p=0$ ) .

Nous poserons au cours de la démonstration $k(K^{\sigma^i}) = K_i$ $(1 \leq i \leq f)$ , $K_o = K$ .

1) Si $K = k(\alpha)$ , on a $K_i = k(\alpha^{p^i})$ ; on en déduit $(K_i : K_{i+1}) = p$ et par suite $(K:k) = np^f$ , ce qui démontre que la condition est nécessaire .

2) Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons d'abord que $k$ contienne une infinité d'éléments . Soient $\alpha$ , $\beta$ deux éléments de K , zéros de polynomes irréductibles $f(x)$ , $g(x)$ dans $k$ . Soient, dans une extension algébrique convenable de $k$ , $\alpha_1 = \alpha$ , $\alpha_2$, ... , $\alpha_r$ , les zéros distincts de $f$ , $\beta_1 = \beta$ , $\beta_2$, .... , $\beta_s$ ceux de $g$ . Nous allons montrer que, si $k(\beta) / k$ est une extension séparable, on peut choisir un $a \in k$ tel qu'en posant $\vartheta = \alpha + a\beta$ on ait $k(\alpha, \beta) = k(\vartheta)$ . En effet, choisissons $a$ de telle manière que les $rs$ éléments $\alpha_i + a\beta_j$ $(1 \leq i \leq r , 1 \leq j \leq s)$ soient tous distincts les uns des autres . Le polynome $f(\vartheta - ax)$ admet le zéro $\beta$ , mais n'a aucun autre zéro commun avec $g(x)$ . Comme $\beta$ est zéro simple de $g(x)$ , $x-\beta$ est un p.g.c.d. de $f(\vartheta -ax)$ et de $g(x)$ . On a donc $\beta \in k(\vartheta)$ , d'où $\alpha = \vartheta - a\beta \in k(\vartheta)$ , ce qui démontre la proposition .

Ceci dit, choisissons dans $K - K_1$ (dans K si $f = 0$) un élément $\alpha$ pour lequel $(k(\alpha) : k)$ soit aussi grand qu'il est possible . Si $\beta \in K_f$ , l'extension $k(\beta)/k$ est séparable , et par suite $k(\alpha, \beta) /k$ est simple ; en vertu du choix de $\alpha$ , il en résulte $k(\alpha, \beta) = k(\alpha)$ , $\beta \in k(\alpha)$. $k(\alpha)$ contient $K_f$ . Montrons qu'il est impossible qu'il existe un $i < f$ tel que $k(\alpha)$ contienne $K_{i+1}$ mais non $K_i$ . En effet, en tenant compte de ce que $(K:K_1)$

égale $p$ et de ce que $\alpha \in K_1$ . on voit que $K = K_1(\alpha)$ , d'où $k(K^{\sigma}, \alpha) = K$ . On en déduit $k^{\sigma^i}(K^{\sigma^{i+1}}, \alpha^{p^i}) = K^{\sigma^i}$ , et par suite $K_i = k(K_{i+1}, \alpha^{p^i})$ , ce qui prouve notre assertion . On a donc $K_0 = K \subset k(\alpha)$ .

Remarque . - Il nous a suffi pour démontrer la réciproque dans le cas où $k$ est de caractéristique $p \neq 0$ , de supposer que $(K : k(K^{\sigma})) = p$ ; cette condition est donc équivalente à la condition $(K:k) = np^f$ . Elle est notamment toujours remplie si $(k:k^{\sigma}) = p$ . Par suite : si $k$ est un corps parfait, et si $x$ est transcendant sur $k$, toute extension finie de $k(x)$ est simple .

3) Si $k$ est fini, il en est de même de $K$ . Le théorème résulte alors de la proposition suivante : le groupe multiplicatif $K^*$ des éléments $\neq 0$ d'un corps fini $K$ est cyclique . Choisissons en effet dans $K^*$ un élément $\alpha$ d'ordre maximum $m$ . Soit $\beta$ un élément quelconque de $K$ , d'ordre $n$ . $q$ étant un nombre premier, posons $m = q^r \overline{m}$ $n = q^s \overline{n}$ , avec $\overline{m}$ , $\overline{n}$ , premiers à $q$ . L'élément $\alpha^{q^r} \beta^{\overline{n}}$ est d'ordre $q^s \overline{m}$ ; en vertu du choix de $m$ , on a $s \leq r$ Ceci étant vrai pour chaque $q$ , on en conclut que $n$ divise $m$ . Tous les éléments de $K^*$ sont donc des zéros de $x^m - 1$ ; $K^*$ ne peut donc contenir plus de $m$ éléments , ce qui démontre la proposition .

## DIVISEURS PREMIERS

k étant le corps des nombres complexes, K un corps de fonctions algébriques sur k , on a vu comment on pouvait associer à un point P de la surface de Riemann de K une fonction $\nu_p(x)$ , définie pour $x \neq o$ dans K , et telle que $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$ . Cette fonction jouit de plus de la très importante propriété suivante si x, y sont des éléments de K, avec $x \neq 0$ , $y \neq 0$ , $x+y \neq 0$ on a

$$\nu_p(x+y) = \underline{\text{borne}} \left( \nu_p(x), \nu_p(y) \right)$$

K étant maintenant un corps quelconque, nous appellerons <u>valuation</u> de K une fonction $\nu$ définie sur le groupe multiplicatif $K^*$ des éléments $\neq 0$ de K et possédant les propriétés suivantes :

I. <u>$\nu$ est une homomorphie de $K^*$ sur le groupe additif des entiers</u> ;

II. <u>Si</u> $x \neq 0$ , $x \neq -1$ , <u>la condition</u> $\nu(x) \geq 0$ <u>entraine</u> $\nu(1+x) \geq 0$ .

On complète souvent la définition d'une valuation en posant $\nu(0) = +\infty$ . La formule $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ reste vraie avec les conventions habituelles de calcul sur $+\infty$ . De plus, les conditions I,

II. entraînent l'inégalité

$$\nu(x+y) \geq \text{borne}\,(\nu(x)\ ,\ \nu(y))$$

et on voit tout de suite que cette inégalité peut être transformée en égalité si $\nu(x) \neq \nu(y)$ .

A toute valuation $\nu$ d'un corps K. nous associerons un nouvel objet que nous appellerons un diviseur premier du corps K (cf. cependant plus loin une restriction en ce qui concerne les corps de fonctions algébriques).

Supposons connu dans le corps K un anneau $\mathcal{O} \neq K$ , tel que :

1) tout élément de K soit quotient de deux éléments de $\mathcal{O}$ ;

2) le théorème de décomposition unique des idéaux en facteurs premiers soit vrai dans $\mathcal{O}$ .

Dans ces conditions, x étant un élément quelconque $\neq 0$ de K , l'idéal $\mathcal{O}x$ se met sous la forme $\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{P}}(x)}$ , le produit étant étendu aux idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}$ et les $\nu_{\mathfrak{P}}(x)$ étant des exposants entiers , nuls sauf un nombre fini . Chacune des fonctions $\nu_{\mathfrak{P}}$ est une valuation de K , et par suite, à chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}$ correspond un diviseur premier de K . Les valuations $\nu_{\mathfrak{P}}$ sont toutes $\geq 0$ sur $\mathcal{O}$ . Inversement, si $\nu$ est une valuation de K toujours $\geq 0$ sur $\mathcal{O}$ , l'ensemble des x de $\mathcal{O}$ tels que $\nu(x) > 0$ est un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{O}$ , et $\nu$ est la valuation $\nu_{\mathfrak{P}}$ correspondant à $\mathfrak{P}$ .

de $\mathcal{O}$ ; p étant un élément de $\mathcal{O}$ divisible par $\mathfrak{P}$ , mais non par $\mathfrak{P}$ , tout $x \neq 0$ de K se met sous la forme $p^{\nu_{\mathfrak{P}}(x)} \frac{y}{z}$ , y et z étant des éléments de $\mathcal{O}$ non contenus dans $\mathfrak{P}$ . On en déduit tout de suite que $\nu = \nu_{\mathfrak{P}}$ .

Ceci s'applique notamment dans le cas où K est un corps de nombres algébriques de degré fini . L'anneau $\mathcal{O}$ des entiers du corps possède les propriétés [illegible]), 2) De plus, dans ce cas, on voit tout de suite que toute valuation est nécessairement $\geq 0$ sur $\mathcal{O}$ : il y a donc correspondance bi-univoque entre les idéaux premiers de $\mathcal{O}$ et les diviseurs premiers de K .

Considérons maintenant un corps k et un surcorps $K = k(x)$ simplement transcendant de k . Soit $\mathcal{O} = k[x]$ l'anneau des polynomes à coefficients dans k. Les idéaux premiers de $\mathcal{O}$ sont les $\mathcal{O}f$ , f désignant les polynomes irréductibles dans k , et $\mathcal{O}$ satisfait aux conditions 1) , 2) . A tout polynome irréductible f correspond ainsi un diviseur premier de K . Si k est algébriquement fermé, les polynomes f sont de la forme $x-a$ , $(a \in k)$ et correspondent bi-univoquement aux éléments de k . Les valuations que nous venons d'obtenir dans K prennent la valeur 0 sur le groupe $k^*$ des constantes $\neq 0$ Inversement, si $\nu$ est une valuation de K , nulle sur

$k^*$ , et si $\nu(x) \geq 0$ , $\nu$ est $\geq 0$ sur $\mathcal{O}$ et coincide avec une des valuations que nous venons de trouver . Si au contraire $\nu(x) < 0$ , $\nu$ est la valuation qui correspond à l'idéal premier $x^{-1}\mathcal{O}'$ de l'anneau $\mathcal{O}' = k[x^{-1}]$ .

$\nu$ étant maintenant une valuation quelconque d'uncorps K , P le diviseur premier qui lui correspond, l'ensemble $\mathcal{O}_P$ des x tels que $\nu(x) \geq 0$ constitue un anneau, dont les éléments s'appelent les ontiers de K (pour P , ou pour $\nu$ ). L'ensemble des x tels que $\nu(x)>0$ constitue dans $\mathcal{O}$ un idéal premier $\mathfrak{p}_p$. Si p est tel que $\nu(p) = 1$ , on a $\mathfrak{p} = p\mathcal{O}$ , et $\mathfrak{p}$ est le seul idéal premier de $\mathcal{O}$ . L'anneau $\mathcal{O}$ satisfait évidemment aux conditions 1), 2) . L'anneau $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est un corps $\rho$ qu'on appelle corps des restes de K (par rapport à P ou à $\nu$ ). Si, par exemple, $K = k(x)$ , et si P correspond à un polynome irréductible f de $k(x)$ , le corps des restes définit une extension de dislocation de f sur k , de degré relatif égal au degré de f .

Plus généralement , considérons un nombre fini de valuations différentes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ d'un corps K . Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des x tels que l'on ait simultanément $\nu_1(x) \geq 0$ , $\nu_2(x) \geq 0$ , ... , $\nu_h(x) \geq 0$ . Nous allons montrer que $\mathcal{O}$ satisfait aux conditions 1), 2) .

Nous avons besoin pour cela du lemme suivant (Ostrowski) :

Lemme . Il existe un $x \in K$ tel que $\nu_1(1-x) > 0$, $\nu_2(x) > 0$ . .... . $\nu_h(x) > 0$ .

a) pour $h = 2$ , il existe un $x_1$ tel que $\nu_1(x_1)=0$ $\nu_2(x_1) \neq 0$ . car sinon la valeur de $\nu_2$ ne dépendrait que de celle de $\nu_1$ , et on aurait $\nu_1 = \nu_2$ , en vertu de la condition I. En remplaçant éventuellement $x_1$ par son inverse, on peut supposer $\nu_2(x_1) > 0$ . De même, il existe un $x_2$ tel que $\nu_1(x_2) > 0$ , $\nu_2(x_2) = 0$ . L'élément $x = x_1 / x_1 + x_2$ satisfait aux conditions .

b) pour $h > 2$ , par récurrence sur $h$ . Le théorème étant supposé vrai pour $h-1$ , il existe $x_1$ , $x_2$ tels que $\nu_1(1-x_1) > 0$ , $\nu_3(x_1) > 0$ , $\nu_i(x_1) > 0$ pour $i \geq 3$; $\nu_1(1-x_2) > 0$ , $\nu_2(x_2) > 0$ , $\nu_i(x_2) > 0$ pour $i \geq 3$; dans le cas où $\nu_2(x_1) \geq 0$ et $\nu_3(x_2) \leq 0$ , nous poserons $x = x_1x_2$; si $\nu_2(x_1) < 0$ , nous poserons $x = x_1 / 1 + x_1(1-x_1)$ ; enfin , si $\nu_2(x_1) \geq 0$, $\nu_3(x_2) < 0$ nous poserons $x = x_2 / 1 + x_2(1-x_2)$ . L'élément $x$ ainsi obtenu satisfait aux conditions imposées .

Il résulte de là que, sur le groupe multiplicatif des $x$ tels que $\nu_j(x) = 0$ pour $j \neq i$ , $\nu_i$ n'est pas identiquement nulle . Soit $p_i$ un élément pour lequel

$\nu_i$ prenne sa plus petite valeur positive. Les $p_i$ sont dans $\mathcal{O}$, et tout élément de K peut être amené dans $\mathcal{O}$ par multiplication par un produit de puissances des $p_i$. $\mathcal{O}$ satisfait donc à 1) ; de plus on voit, en prenant un x tel que $\nu_i(x) = 1$, que l'on a nécessairement $\nu_i(p_i)=1$ Tout élément x se met sous la forme $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\nu_i(x)} .e$ où e est une unité de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{O}$ dont l'inverse est encore dans $\mathcal{O}$. L'anneau $\mathcal{O}$ satisfait donc aussi à 2), et on voit de plus que tous ses idéaux premiers sont principaux.

D'autre part, N étant un entier quelconque, x étant un élément satisfaisant aux conditions du lemme, on peut choisir n assez grand pour que l'élément $u_1 = 1 - (1-x^n)^n$ satisfasse aux conditions $\nu_1(1-u_1) \geq N$ $\nu_j(u_i) \geq N$ pour $j \neq 1$. De même, on peut, pour chaque i, trouver un $u_i$ tel que $\nu_i(1-u_i) \geq N$ et $\nu_j(u_i) \geq N$ pour $j \neq i$. On en déduit tout de suite le

Théorème d'indépendance (Ostrowski)

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$ étant des valuations distinctes d'un corps K, $y_1, y_2 \ldots . y_h$ des éléments de K, A un entier, il existe un $x \in K$ tel que l'on ait simultanément $\nu_i(x - y_i) \geq A$ $(1 \leq i \leq h)$.

Projection d'un diviseur premier .

Nous allons maintenant étudier ce que deviennent les diviseurs premiers d'un corps quand on fait une extension algébrique finie de ce corps .

Soit donc un corps $L$ , et soit $K$ un sur-corps de degré fini de $L$ . Soit $P$ un diviseur premier de $K$. La valuation correspondante $\nu_P$ ne peut être identiquement nulle sur $L$. Il en résulte qu'il existe un entier $e > 0$ bien déterminé tel que $\frac{\nu_P}{e}$ soit une valuation de $L$ . Le diviseur premier correspondant $Q$ s'appelle la projection de $P$ sur $L$ . Le nombre $e$ s'appelle l'ordre de ramification de $P$ par rapport à $L$ .

Avant de passer à l'étude du problème inverse, c'est-à-dire à la question de trouver quels sont les diviseurs premiers de $K$ qui se projettent sur un diviseur premier donné de $L$, nous avons besoin d'introduire des considérations topologiques , liées à l'étude des valuations .

Corps complets

$P$ étant un diviseur premier d'un corps $K$ , on peut associer à $P$ une structure topologique uniforme de $K$ en appelant voisinage d'indice $n$ d'un élément $x$ l'ensemble des $y$ tels que $\nu_P(y-x) \geq n$ : on vérifie facilement que les axiomes des structures uniformes sont vé-

riflés . D'ailleurs , cette structure uniforme peut être définie par une métrique , qu'on obtient en posant par exemple, $\rho(x,y) = e^{-\nu_p(y-x)}$ . On remarquera que les voisinages de 0 sont des sous-groupes additifs à la fois ouverts et fermés .

On dit que le corps K est complet par rapport à P si l'espace uniforme ainsi obtenu est complet .

S'il n'en est pas ainsi, on peut le compléter : soit $K_P$ l'espace unifforme complet obtenu . Il existe une isomorphie $I_p$ entre K et un sous-ensemble dense de $K_P$. En vertu de la remarque faite sur les voisinages de 0 dans K, $K_P$ peut être considéré comme un groupe additif complet , $I_P$ étant une isomorphie additive de K dans $K_P$ . Le produit xy , considéré comme fonction du couple (x,y), est une fonction uniformément continue au voisinage de chaque point de $K \times K$ , comme il résulte de l'inégalité

$$\nu_P(xy-x'y') \geq \underline{\text{borne}} \left\{ \nu_P(x) + \nu_P(y-y'),\ \nu_P(y) + \nu_P(x-x') \right\}$$

qui est valable dès que $\nu_P(y-y') > \nu_P(y)$ . Il en résulte que cette fonction peut se prolonger dans $K_P \times K_P$ , et que $K_P$ reçoit ainsi une structure d'anneau , $I_P$ devenant une isomorphie d'anneau . La fonction $1/x$ est uniformément continue au voisinage de chaque $x \neq 0$ de K :

on en déduit tout de suite que $K_P$ est un corps . Le symbole $(K_P, I_P)$ représente donc une extension de $K$ , déterminée à une isomorphie près par les données de $K$ et de $P$ , et qu'on appelle extension P-adique de $K$ . Le corps $K_P$ lui-même s'appelle le corps des éléments P-adiques de $K$ .

La fonction $e^{-\nu_P}$ est uniformément continue dans $K$ . Elle se prolonge donc dans $K_P$ par une fonction $e^{-\nu}$ . On voit tout de suite que $\nu$ est une valuation de $K_P$ : elle y définit un diviseur premier qu'il y a tout intérêt à ne pas distinguer de $P$ lui-même dans les notations : on le désignera donc encore par $P$ . Si $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $K$ (pour $P$) , celui de $K_P$ est le plus petit ensemble fermé contenant $I_P \mathcal{O}$ . Le corps des restes de $K_P$ est donc le même (à une isomorphie près) que celui de $K$ .

Supposons par exemple que $K = k(x)$ , $x$ transcendant sur $k$ , et que $P$ soit le diviseur premier nul sur $k^*$ défini par $\nu(x) = 1$ . Les éléments de $K_P$ sont alors les séries formelles $\sum_{i_0}^{+\infty} a_i x^i$ à coefficients dans $k$ (exposants entiers et positifs sauf pour un nombre fini d'entre eux) . On a $\nu\left(\sum_{i_0}^{+\infty} a_i x^i\right) = i_0$ si $a_{i_0} \neq 0$.

Le lemme de HENSEL

La théorie des polynomes dont les coefficients sont dans un corps complet comporte un résultat très remarquable dû à Hensel . Pour le formuler et le démontrer , nous avons besoin d'étendre à une extension transcendante une valuation donnée dans un corps . Soit donc $K$ un corps, $P$ un diviseur premier de $K$ , $\mathfrak{P}$ le corps des restes de $K$. Soit $K(t)$ un sur-corps simplement transcendant de $K$ .

$f = \sum x_i t^i$ étant un polynome à coefficients dans $K$ , posons $\nu'(f) = \text{borne} \left\{ \nu_P(x_i) \right\}$ . $f/g$ étant une fraction rationnelle de $K(t)$ , posons $\nu'(f/g) = \nu'(f) - \nu'(g)$ La fonction $\nu'$ ainsi obtenue est une valuation de $K(t)$. Si $\mathfrak{P}'$ est le corps des restes de $K(t)$ par rapport à $\nu'$ , il existe une isomorphie $J$ entre $\mathfrak{P}$ et un sous-corps de $\mathfrak{P}'$ , et le reste $\bar{t}$ qui correspond à $t$ est transcendant sur $J\mathfrak{P}$ : on a $\mathfrak{P}' = J\mathfrak{P}(\bar{t})$ . $f$ étant un polynome de $K(t)$ à coefficients entiers, nous désignerons par $\bar{f}$ l'élément de $\mathfrak{P}'$ qui lui correspond . Ceci dit , nous arrivons au

Lemme de Hensel

Supposons le corps $K$ complet par rapport à $P$ . Si $f$ est un polynome irréductible dans $K$ à coefficients entiers, et si $\bar{f}$ peut se décomposer en le produit $\bar{g}.\bar{h}$

de deux polynomes à coefficients dans $P$ premiers entre eux, $f$ peut se décomposer en le produit de deux polynomes $g.h$ à coefficients entiers appartenant respectivement aux classes $\bar{g}$ , $\bar{h}$ .

Soient $a$ , $b$ , $c$ les degrés de $f$ , $\bar{g}$ , $\bar{h}$ . Il existe par hypothèse des polynomes $g_1$, $h_1$ , à coefficients entiers, de degrés $b$ , $c$ , tels que $\nu'(f-g_1h_1) \geq 1$ et $g_1 = g$ , $h_1 = h$ . Nous allons construire par récurrence sur $n$ polynomes $g_n$ , $h_n$ à coefficients entiers , tels que $\nu'(f-g_nh_n) \geq n$ et que $d° g_n \leq a-c$ , $d°h_n \leq c$ . Supposons $g_n$ , $h_n$ déjà construits ; $p$ désignant un élément de $K$ , tel que $\nu_p(p) = 1$ , posons $r_n = p^{-n}(f-g_nh_n)$ $r_n$ est un polynome à coefficients entiers de degré $\leq a$. $\bar{g}$ et $\bar{h}$ étant premiers entre eux, nous pouvons trouver des polynomes $u_n$ , $v_n$ à coefficients entiers tels que $\bar{r}_n = \bar{g} \cdot \bar{u}_n + \bar{h} \cdot \bar{v}_n$ , les degrés de $u_n$ , $v_n$ étant respectivement $\leq c$ et $a-c$ . Nous poserons

$$g_{n+1} = g_n - p^n v_n \qquad h_{n+1} = h_n - p^n u_n$$

On voit tout de suite que $g_{n+1}$ , $h_{n+1}$ , satisfont aux conditions imposées pour $n+1$ . De plus, les formules de récurrence montrent que $g_n$ , $h_n$ tendent , quand $n$ augmente indéfiniment, vers des polynomes $g$, $h$ , qui satis-

font aux conditions imposées .

Une conséquence du lemme de Hensel, que nous allons utiliser tout à l'heure , est la suivante :

K étant complet, si un polynome irréductible f de K a pour premier coefficient 1 et pour dernier coefficient un entier, il est à coefficients entiers .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un exposant u tel que $p^u f$ puisse se mettre sous la forme $t^i g + ph$ , avec $i > 0$ , g et h étant des polynomes à coefficients entiers , le dernier coefficient de g n'étant pas divisible par p . Les polynomes $\overline{t}^i$ , $\overline{g}$ seraient premiers entre eux, et on pourrait, en vertu du lemme de Hensel, en déduire une décomposition de f , contrairement à l'hypothèse .

Extensions finies d'un corps complet

Soit L un corps parfait par rapport à un diviseur premier $v$ , et soit K un sur-corps de degré relatif fini de L . Nous allons montrer qu'il existe un diviseur premier et un seul de K , qui se projette en $v$ sur L . x étant un élément de K , posons

$$v'(x) = v_v\ (N_{K/L}(x))$$

On a $v'(xy) = v'(x) + v'(y)$ . De plus , si $v'(x) \geq 0$

$x$ est zéro d'un polynome irréductible $f(t)$ à coefficients entiers dans $L$ dont le premier coefficient est 1 et dont le dernier est entier pour $Q$ ; il en résulte que tous les coefficients de ce polynome sont entiers ; il en est donc de même pour le polynome caractéristique $g$ de $x$ qui est une puissance de $f$. Or le polynome caractéristique de $1+x$ est $g(1+t)$ ; il en résulte que $N_{K/L}(1+x)$ est entier, et que $\nu'(1+x) \geq 0$. Si $d$ est le p.g.c.d. des valeurs prises par $\nu'$, la fonction $\frac{\nu'}{d}$ est une valuation de $K$ qui définit un diviseur premier $P$ qui se projette en $Q$ sur $L$. Les entiers de $K$ pour $P$ sont les éléments dont les polynomes caractéristiques sont à coefficients entiers.

Il résulte de là que si $P'$ est un diviseur premier quelconque de $K$ qui se projette en $Q$ sur $L$, les entiers pour $P$ sont aussi entiers pour $P'$ ; la condition $\nu_P \geq 0$ entraine $\nu_{P'} \geq 0$, ce qui n'est possible que si $P = P'$. Donc :

Si $L$ est un corps complet par rapport à un diviseur premier $Q$, il y a dans un sur-corps de degré fini de $L$ un diviseur premier et un seul qui se projette en $Q$ sur $L$.

Soit $q$ un élément de $L$ tel que $\nu_Q(q) = 1$

et $p$ un élément de $K$ tel que $\nu_P(p) = 1$ . De l'égalité $\nu'(q) = (K:L)$ résulte que le nombre $d$ , qui s'appelle le degré relatif de $P$ par rapport à $L$ , divise $(K:L)$. De plus, on a $\nu_P(q) = (K:L)/d$ , et par suite $(K:L)$ est le produit du degré relatif $d$ par l'ordre de ramification $e$ de $P$ par rapport à $I$ .

Désignons par $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de $I$ par rapport à $Q$ , par $\mathfrak{O}$ celui des entiers de $K$ par rapport à $P$ . Le corps des restes de $K$ est $\mathfrak{O}/p\mathfrak{O}$ . En prenant les classes qui contiennent des éléments de $\mathfrak{o}$ on obtient une isomorphie du corps des restes $\mathfrak{o}/q\mathfrak{o}$ de $L$ dans $\mathfrak{O}/p\mathfrak{O}$ . On voit facilement que si des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ de $\mathfrak{O}$ sont tels que leurs classes (mod.$p\mathfrak{O}$) soient linéairement indépendantes par rapport à $\mathfrak{o}/q\mathfrak{o}$, ces éléments sont eux-mêmes linéairement indépendants par rapport à $L$ . Il en résulte que le corps des restes de $K$ est une extension finie de celui de $L$ . $\delta$ étant pris égal au degré de cette extension, on voit facilement que les éléments $p^i x_j$ $(0 \leq i < e\ ,\ 1 \leq j \leq \delta)$ forment une base de $\mathfrak{O}$ par rapport à $\mathfrak{o}$ , c'est-à-dire que tout élément de $\mathfrak{O}$ se met et d'une seule manière sous la forme d'une combinaison linéaire de ces éléments à coefficients dans $\mathfrak{o}$ . Il en résulte que $e\delta = (K:L)$

et que , par suite, le corps des restes de K est une extension du corps des restes de L de degré égal au degré relatif d de P .

D'autre part , si nous mettons un élément de K sous la forme $\sum u_{i,j} p^i x_j$ , nous obtenons une topologie uniforme complète dans K en prenant pour voisinage $V_n$ de 0 l'ensemble des éléments pour lesquels $\nu_Q(u_{i,j}) \geq n$ pour toutes les combinaisons (i.j) . Mais cette condition est équivalente à la condition $\nu_P(x) \geq ne$ . Il en résulte que la topologie définie par P dans K est complète .

Extensions finies d'un corps quelconque .

Considérons maintenant un corps L dans lequel on connait un diviseur premier Q et un sur-corps de degré fini K de L . Formons l'extension Q-adique $(L_Q, I_Q)$ de L , et considérons une extension composée $(U, H_{L_Q}, J_K)$ des extensions $(L_Q, I_Q)$ et K/L . $(U, H_{L_Q})$ est le symbole d'une extension finie de $L_Q$ . On y peut donc définir un diviseur premier $\mathfrak{P}_o$ et une valuation correspondante $\nu_o$. Le corps $J_K K$ est partout dense dans U ; il en résulte tout de suite, que la fonction $\nu(x) = \nu_o(J_K x)$ est une valuation de K ; elle y définit un diviseur premier

P qui se projette en Q sur L . De plus $J_K$ peut se prolonger par une isomorphie entre $K_P$ et U . l'ordre de ramification de P par rapport à L est égal à celui de $P_o$ par rapport à $H_Q L_Q$ ; le corps des restes de K par rapport à P est une extension finie de celui de L par rapport à Q de degré égal au degré relatif de $P_o$ par rapport à $H_Q L_Q$ . Ce nombre s'appelle encore le degré relatif de P par rapport à L .

Deux extensions composées isomorphes donnent évidemment par ce procédé le même diviseur premier de K .

Soit maintenant , inversement, P un diviseur premier de K qui se projette en Q . Soit $(K_P, I_P)$ l'extension P-adique de K ; soit $L_Q$ le plus petit ensemble fermé de $K_P$ contenant $I_P L$ . $(L_Q, I_P)$ est une extension Q-adique de L . Soit U le sous-corps de $K_P$ engendré par $L_Q$ et $I_P K$ : il n'y a dans U qu'un seul diviseur premier qui se projette en Q sur $L_Q$ , et U est complet par rapport à ce diviseur premier . On a donc $U = K_P$ , de sorte que tout diviseur premier de K qui se projette en Q peut être obtenu par le procédé indiqué plus haut . Il en résulte qu'il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs premiers de K qui se projettent en Q sur L .

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_g$ ces diviseurs premiers.

Désignons par $\mathfrak{O}$ l'anneau des éléments $x$ de $K$ tels que l'on ait simultanément $\nu_i(x) \geq 0$ $(1 \leq i \leq g)$, et par $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers pour $Q$ de $L$. Il est clair que $\mathfrak{O}$ contient les éléments de $K$ qui sont entiers par rapport à $\mathfrak{o}$. Inversement, soit $x$ un élément de $\mathfrak{O}$, zéro d'un polynome $f$ irréductible dans $L$ dont le premier coefficient est 1. On obtient les extensions composées de $L(x)/L$ et de $L_Q/L$ en décomposant $f$ en facteurs irréductibles dans $L_Q$ : soit $f = \prod_{i=1}^{g'} f_i^{u_i}$ cette décomposition; si $P_1', P_2', \ldots, P_{g'}'$ sont les diviseurs premiers de $L(x)$ qui se projettent en $Q$, les corps $(L(x))_{P_i'}$ sont des extensions de dislocation des $f_i$ sur $L_Q$. Les $\nu_{P_i'}(x)$ étant $\geq 0$, il en résulte que les $f_i$ sont à coefficients entiers dans $L_Q$, et que $f$ est à coefficients entiers dans $L$ : $\mathfrak{O}$ se confond avec l'anneau des entiers de $K$ par rapport à $\mathfrak{o}$.

Soient $d_i$ les degrés relatifs des $P_i$ par rapport à L , et $e_i$ leurs ordres de ramification $(1 \leq i \leq g)$ . Nous pouvons choisir des éléments $x_{i,j}$ $(1 \leq j \leq d_i)$ de K entiers pour $P_i$, et dont les classes (mod. $P_i$) soient linéairement indépendantes par rapport à $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ . En utilisant le théorème d'indépendance, on voit qu'on peut sans restriction supposer que l'on a $\nu_{P_\ell}(x_{i,j}) \geq e_{P_\ell}$ pour $1 \leq \ell \leq g$ , $\ell \neq i$ . Choisissons d'autre part un $p_i$ tel que $\nu_{P_i}(p_i) = 1$ , $\nu_{P_j}(p_i) = 0$ si $j \neq i$ . Posant $n' = \sum_{i=1}^{g} d_i e_i$ , désignons par $z_1$, $z_2$, ... $z_{n'}$ les éléments $x_{i,j} p_i^{\alpha}$ $(1 \leq i \leq g \ , 1 \leq j \leq d_i \ , \ 0 \leq \alpha < e_i)$

Il est facile de voir qu'un élément de la forme $\sum_{1}^{n'} a_i z_i$ les $a_i$ étant dans L , ne peut être dans $\mathfrak{o}$ que si les $a_i$ sont tous dans $\mathfrak{o}$ , et que les $z_i$ sont linéairement indépendants par rapport à k . On en conclut l'inégalité

$$\sum_{1}^{g} d_i e_i \leq (K:k)$$

Si cette inégalité est une égalité, les $z_i$ constituent une base de K/L . En vertu du choix des premiers $z_i$ , on peut pour chaque entier m positif , trouver des $a_{i,m} \in \mathfrak{o}$ $(1 \leq i \leq n')$ tels que $\nu_{P_\ell}(z_{n'+1} - \sum_{1}^{n'} a_{i,m} z_i) \geq m\, e_\ell$ $(1 \leq \ell \leq g)$ .

donc que $\dfrac{z_{n'+1} - \sum_{1}^{n'} a_{i,m} z_i}{q^m}$ soit dans $\mathfrak{o}$ . Il en résulte

que $v$ ne possède pas de base finie par rapport à $v$ .

Donc :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $v$ possède une base finie par rapport à $v$ est que

$$\sum_{1}^{g} d_i e_i = (K:k)$$

Il en est toujours ainsi, en vertu d'un théorème bien connu de Mlle Noether, dans le cas des extensions séparables . Il en est encore de même , comme on verra dans la prochaine conférence, dans le cas où L est un corps de fonctions algébriques . Par contre, on peut donner des exemples dans lesquels la condition n'est pas réalisée .

Structure des corps complets .

Soit K un corps complet par rapport à une valuation, $v$ , correspondant à un diviseur premier P . Hasse et Schmidt (Crelle, 1933) , puis, plus simplement, Litt et Teischmüller (Crelle, 1936) ont montré que la structure du corps K était bien déterminée par la donnée de celle du corps des restes $\mathfrak{k}$ de K : c'est-à-dire que si deux corps complets ont des corps de restes isomorphes, on peut établir entre eux une isomorphie conservant la valuation . Les auteurs cités ont montré comment on peut construire K quand on connait $\mathfrak{k}$ . Le résultat est particulièrement simple dans le cas où K

et $\mathfrak{K}$ ont même caractéristique : K est alors isomorphe au corps des séries formelles à coefficients dans $\mathfrak{K}$ .

---

## LES DIVISEURS PREMIERS DES CORPS DE FONCTIONS ALGEBRIQUES

k étant un corps, soit $k(x)$ une extension transcendante simple de k . Un corps K contenant $k(x)$ et tel que l'extension $K/k(x)$ soit finie est appelé un corps de fonctions algébriques sur k . Le corps k' des éléments de K qui sont algébriques sur k s'appelle le corps des constantes de K . K est encore un corps de fonctions algébriques sur k'. Il n'y aura dans la suite aucun inconvénient à supposer toujours que $k = k'$ : c'est ce que nous ferons .

Dans le cas où k est parfait, nous savons que l'extension $K/k(x)$ est simple : on a $K = k(x,y)$ , où y satisfait à une équation irréductible $f(x,y) = 0$ . Le premier membre ne peut pas être un polynome en $x^p, y^p$ (où p est la caractéristique de k ) car il serait alors une puissance $p^{ième}$ . Donc l'une au moins des extensions $K/k(x)$ , $K/k(y)$ est séparable . Il en résulte que si k est parfait, K contient toujours des fonctions séparantes t , c'est-à-dire des fonctions telles que $K/k(t)$ soit séparable . Si k n'est

pas parfait . Il n'en est plus nécessairement ainsi .

Dans l'étude des corps de fonctions algébriques on se restreint systématiquement à l'étude des diviseurs premiers P correspondant à des valuations $\nu_P$ prenant la valeur 0 sur le corps des constantes $\neq 0$ . Quand nous parlerons de diviseurs premiers, nous supposerons toujours cette condition réalisée .

Le corps des restes d'un corps de fonctions algébriques K par rapport à un diviseur premier P est une extension finie du corps des constantes : le degré de cette extension est appelé le degré absolu de P . Si x est un élément de K tel que $\nu_P(x) \neq 0$ , le degré absolu de P est égal à son degré relatif par rapport à k(x) .

Le corps des restes $\bar{K}$ d'un corps de fonctions algébriques K par rapport à un diviseur premier P a toujours même caractéristique que K ; et par suite K est isomorphe à un sous-corps du corps des séries formelles à coefficients dans $\bar{K}$ . Inversement, toute isomorphie de K dans un corps de séries formelles détermine un diviseur premier de K ( à condition qu'à un élément au moins $\neq 0$ de K corresponde une série formelle à terme constant nul) . On peut donc trouver les diviseurs premiers de K en recherchant les isomorphies de K dans le corps des séries formelles à coefficients dans un sur-corps algébriquement fermé

$\overline{k}$ de $k$ . Si le corps $k$ est parfait, aux éléments de $k$ correspondent nécessairement des éléments de $\overline{k}$ , et de plus deux isomorphies ne donnent le même diviseur premier que si on peut passer de l'une à l'autre par une automorphie du corps des séries formelles conservant $\overline{k}$ (dans son ensemble) . Ces deux propriétés ne sont plus vraies si $k$ n'est pas parfait .

---