Séminaire de Mathématiques

Élie Cartan

La structure des groupes infinis

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 6, p. 1-43

<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A6_0>

IV.- G.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année 1936-1937

Les TRAVAUX de M. ELIE CARTAN

La STRUCTURE des GROUPES INFINIS

Exposé fait par M. Elie CARTAN, le lundi 1er Mars 1937

Exemplaire n° 3

Je me propose d'exposer dans cette conférence et dans la suivante les grandes lignes de la théorie des groupes continus, finis et infinis, que j'ai développée dans deux mémoires des Annales de l'Ecole Normale (1904-1905 et 1908). Les groupes dont il s'agit sont ceux qu'a considérés S.Lie; ce sont des groupes de transformations analytiques portant sur un nombre fini de variables et caractérisés par la propriété que la transformation la plus générale du groupe est la solution générale d'un système d'équations aux dérivées partielles donnant les variables transformées comme fonctions inconnues des variables primitives . Les groupes finis et continus de Lie rentrent dans cette classe générale car tout système de fonctions de n variables et d'un certain nombre de constantes arbitraires constitue la solution générale d'un système complètement intégrable . Mais le groupe, indiqué par S.Lie lui-même

$$x' = f(x) \qquad y' = f(y)$$

où $f(x)$ est une fonction analytique arbitraire de son argument, n'est pas un groupe de Lie au sens précédent . Du reste, dans les applications qu'on peut faire de la théorie des groupes aux systèmes différentiels, n'interviennent jamais en réalité que les groupes de Lie.

La généralisation aux groupes infinis de la théorie de la structure des groupes finis dûe à Lie et fondée sur la considération des transformations infinitésimales, s'est montrée très difficile, pour ne pas dire impossible, malgré les travaux consacrés à cette question par S.Lie, F.Engel, Medolaghi, etc... Celle qui va être exposée part d'un principe tout différent : c'est dans les équations de définition du groupe mises sous une forme convenable, qu'on peut trouver un point de départ pour la théorie, qui utilise la théorie des problèmes d'équivalence exposée dans une conférence précédente et la théorie des systèmes en involution .

La notion de groupe abstrait ne se présente pas ici avec la même pureté que dans le cas des groupes finis , et cela tient à la difficulté de trouver une caractérisation analytique simple de la notion d'isomorphisme . Il est très remarquable que simultanément, M.Vessiot, dans ses beaux travaux sur les fonctions automorphes, et moi-même, ayons été conduits à une même définition nouvelle de l'isomorphisme de deux groupes de Lie , définition qui est du reste équivalente à la définition classique dans le cas des groupes finis . Cette définition repose sur la notion de prolongement d'un groupe .

Etant donné un groupe G opérant sur n variables x^1 , x^2 ...... x^n , un groupe G' sera dit un prolongement de G s'il opère sur les mêmes variables x^1 , x^2 , ... x^n , mais en même temps sur d'autres variables y^1 , y^2 , ... , y^p de telle sorte qu'il transforme entre elles les variables x

et de même manière que le groupe G. A une transformation de G correspond donc au moins une transformation de G' ; le prolongement est dit <u>holoédrique</u> s'il ne lui en correspond qu'une, et dans ce cas, il y a correspondance biunivoque entre les transformations des deux groupes ; dans le cas contraire, le prolongement est dit <u>mériédrique</u> . Il est clair que dans le premier cas, il y a isomorphisme holoédrique, au sens classique du mot , entre G et G' ; dans le second cas G est isomorphe mériédrique de G'.

Cela posé, deux groupes G_1 et G_2 sont dits isomorphes (holoédriques) s'ils admettent deux prolongements holoédriques semblables (c'est-à-dire un même nombre de variables et réductibles l'un à l'autre par un changement de variables) ; s'il existe un prolongement holoédrique de G_1 semblable à un prolongement mériédrique de G_2 , nous dirons que G_2 est isomorphe mériédrique de G_1 . On démontre sans difficulté que deux groupes isomorphes holoédriques d'un troisième, sont isomorphes, et que si G_1 est isomorphe holoédrique de G_2 et G_2 isomorphe mériédrique de G_3, alors G_1 est isomorphe mériédrique de G_3.

<u>Le théorème fondamental</u>

Le théorème qui est à la base de la théorie des groupes de

Lie est le suivant :

Tout groupe de Lie G admet un prolongement holoédrique opérant sur un certain nombre r de variables x^i et défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes

1°- un certain nombre de fonctions des x ;

2°- r formes de Pfaff $\omega^i(x,y,dx)$ linéairement indépendantes par rapport aux différentielles dx^i et dont les coefficients peuvent dépendre d'autres variables auxiliaires y_r ; enfin le prolongement considéré a ses équations de définition du premier ordre .

Les hypothèses faites sur le groupe prolongé montrent que ce groupe prolongé est un groupe de Lie ; nous verrons qu'on peut toujours supposer défini par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre .

Passons à la démonstration . Par définition le groupe donné, étant un groupe de Lie, est constitué par l'ensemble des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles (équation de définition) , qu'on peut toujours supposer en involution . Soient x^1 , x^2 , ... x^n les variables initiales , X^1 , X^2 , ... X^n les variables transformées . Les équations de définition contiendront d'abord éventuellement un certain nombre $n - \nu$ de relations finies entre les x

...

et les X, relations qu'on peut supposer résolues par rapport à $X^{n-\nu+1}, \ldots, X^n$:

$$(1) \qquad X^{\nu+k} = F^k(x^1,\ldots,x^n; X^1,\ldots,X^\nu) \qquad (k=1,\ldots,n-\nu)$$

Nous aurons ensuite des équations aux dérivées partielles du premier ordre qu'on pourra toujours écrire sous la forme d'un système de Pfaff

$$(2) \qquad dX^i = \omega^i(x,X,u,dx) = a^i_k(x,X,u)\, dx^k \qquad (i=1,2\ldots\nu)$$

où les coefficients a^i_k sont des fonctions analytiques de $x^1, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$ et de p_1 variables u en supposant que les équations du premier ordre puissent être résolues par rapport à $n\nu - p_1$ d'entre elles en fonction de p_1 autres des x et des X. Si le système contient des équations du second ordre on pourra les écrire sous la forme

$$(3) \qquad du^k = b^k_h(x,X,u,v)\, dx^k \qquad (K=1,2\ldots p_1)$$

en faisant intervenir p_2 nouvelles variables v, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi une série de systèmes (1),(2),(3) ... ; si le groupe G est fini, le dernier système d'équations n'introduira aucune variable nouvelle.

Remarquons avant tout, que les équations (1) peuvent être simplifiées. Effectuons en effet sur les x une transformation déterminée du groupe et soient $\bar{x}$ les variables transformées . On pourra naturellement passer des $\bar{x}$ aux X par une transformation du groupe et l'on aura par suite

$$(4) \qquad F^k(x^1,\dots,x^n,X^1,\dots,X^\nu) = F^k(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n,X^1,\dots,X^\nu) \qquad (k=1,2,\dots,\nu)$$

ces relations deviennent des identités en $x^1,\dots,x^n,X^1,\dots X^\nu$ si l'on y remplace les $\bar{x}$ par leurs valeurs, sinon en effet, on aurait au moins une relation non identique

$$\varphi(x^1,\dots,x^n,X^1,\dots,X^\nu) = 0$$

Or il existe toujours une transformation du groupe faisant passer de valeurs arbitrairement données aux x à des valeurs arbitrairement données de $X^1, X^2, \dots, X^\nu$, ce qui conduirait à une contradiction. Ajoutons que les fonctions $F^k(x,X)$ considérées comme fonctions des x , sont indépendantes ; sinon, en effet, des équations (1) on pourrait déduire au moins une relation non identique en $X^1,\dots,X^\nu,X^{\nu+1},\dots X^n$, ce qui est absurde .

De ces remarques résulte que si l'on donne aux X des valeurs numériques fixes X_o (pas trop particulières) les relations (4) montrent que les ν fonctions $F^k(x^1,\dots,x^n,X_o^1,\dots,X_o^\nu)$ sont des invariants du groupe, en nombre égal à $n-\nu$. On peut alors supposer choisies les variables, de manière que ces invariants soient $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$ de sorte que les équations (1) prennent la forme

$$(1') \qquad X^{\nu+k} = x^{\nu+k} \qquad (k=1, \ldots, n-\nu)$$

Ces préliminaires étant posés, imaginons que dans le système différentiel (1), (2), (3) .... on fasse un changement de variables indépendantes, à savoir le changement défini par une transformation déterminée S du groupe G, soit

$$(5) \quad \overline{x}^i = \varphi^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (\varphi^{\nu+1} \equiv x^{\nu+1} \ldots \varphi^n \equiv x^n)$$

Le système (1), (2), (3) ... conserve nécessairement la même forme avec ces nouvelles variables indépendantes puisque si l'on considère une transformation quelconque T du groupe faisant passer des x aux X la transformation $T S^{-1}$ fera passer des $\overline{x}$ aux X ; seulement dans les nouvelles équations interviendront des dérivées partielles (u,v...) qui seront changées. Nous aurons évidemment les relations, tirées de (2)

$$(6) \qquad a^i_k(\overline{x}, X, \overline{u}) \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^h} = a^i_h(x, X, u)$$

On peut regarder ces relations comme des équations en $\overline{u}^1, \ldots \overline{u}^{p_1}$ (il faudra supposer remplacés les $\overline{x}$ et les $\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^h}$ par par leurs valeurs $\varphi^k(x)$ et $\frac{\partial \varphi^k}{\partial x^h}$). Nous regarderons dans ces équations les x , les X et les u comme des arguments <u>indépendants</u> . Il est facile de voir que ces équations , <u>en nombre νn</u> , <u>à</u> p_1 <u>inconnues $\overline{u}$ sont compatibles</u> Sinon, en effet, il existerait au moins une relation non identique

$$\Psi (x,X,u) = 0 \; ;$$

cette relation devrait avoir lieu quelles que soient les valeurs numériques données aux arguments $x^1,\dots,x^n$,$X^1,\dots X^\nu$, $u^1,\dots,u^{p_1}$. Cela est impossible, en effet, il existe toujours dans G au moins une solution du système (1),(2),(3)... correspondant à des valeurs initiales arbitrairement données de ces $n + \nu + p_1$ quantités . Les équations (5) sont donc résolubles par rapport aux $\overline{u}$

$$\overline{u}^k = \Psi^k(x,X,u) \; . \tag{7}$$

On pourra continuer le raisonnement en passant des équations (2) aux équations (3) , ce qui donnera des formules

$$\overline{v}^h = \chi^h(x,X,u,v) \tag{8}$$

et ainsi de suite . Nous avons donc ainsi adjoint aux équations (5) les équations (7) et (8) . On peut même enfin adjoindre les relations

$$\overline{X}^i = X^i \qquad (i= 1,2,\dots, \nu\;) \tag{9}$$

<u>Toute transformation S du groupe G peut donc être</u>

<u>prolongée, d'une manière et d'une seule, en une transformation Σ portant sur les variables x, X, u, v, ... et d'après la manière même dont ce prolongement a été effectué, cette transformation prolongée jouit des propriétés suivantes</u>

1°- <u>elle laisse invariante les variables $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$, $x^1, x^2, \ldots, x^\nu$</u> .

2°- <u>elle laisse invariant le système différentiel (2), (3), etc... des équations de définition du groupe G.</u>

Réciproquement, prenons une transformation Σ jouissant des propriétés précédentes . L'invariance des dX^i d'une part, du système différentiel (2),(3), ... d'autre part, montre que Σ laisse invariantes les formes $\omega^i = a^i_k(x,X,u)dx^k$) par suite, toute différentielle $d\bar{x}^i$ est une combinaison linéaire des dx^k, et les variables transformées $\bar{x}^i$ ne dépendent que des $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Σ définit donc une transformation déterminée S sur les x. <u>Cette transformation appartient au groupe G</u> . En effet la transformation Σ laissant invariantes les équations de définition de G, toute transformation T ($x \longrightarrow X$) du groupe G se transforme en une autre transformation $\bar{T}$ $(\bar{x} \longrightarrow X)$ de G ; par suite, la transformation S étant égale à $\bar{T}^{-1}\,T$ appartient à G . Il est clair que la transformation Σ résulte du prolongement de S tel qu'il a été construit plus haut .

<u>Le groupe G peut donc être prolongé holoédriquement</u>

<u>en un groupe Γ transformant les variables $x, X, u, v, \ldots$ et défini par les propriétés d'invariance énoncées ci-dessus.</u>

Il reste maintenant à montrer que Γ est un groupe de Lie et que ses équations de définition sont du premier ordre . La première propriété découle de la théorie des problèmes d'équivalence . Elle est évidente si les équations de définition de G sont du premier ordre , puisque Γ est l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les variables $x^{\nu+1}, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^\nu$, ainsi que les ν formes $\omega^i(x, X, u, dx)$ auxquelles on peut ajouter les $n-\nu$ formes $\omega^{n+k} = dx^{\nu+k}$

Faisons la démonstration dans le cas où les équations de définition de G sont du second ordre , formées par conséquent par les équations (1), (2), (3) . Le groupe Γ laissant les ν formes ω^i invariantes laissera invariantes leurs différentielles extérieures $d\omega^i$. ~~Car~~ Or chaque terme de $\omega^i = a^i_k(x, X, u, dx^k)$ contenant une différentielle dx^k, la forme $d\omega^i$ pourra s'écrire

$$d\omega^i = \omega^k \varpi^i_k$$

où les formes ϖ^i_k sont linéaires par rapport aux dx^i , dX^i et du^k ; ces formes ϖ^i_k ne sont déterminées du reste qu'à des combinaisons linéaires près des ω^k ; pour chaque valeur de i , les coefficients des combinaisons linéaires des ω^k qu'on peut ajouter aux ϖ^i_k forment un tableau symétrique. Quoi qu'il en soit, pour toute transformation Σ de Γ on aura

$$\omega^{i}(\overline{x},\overline{X},\overline{u}\ ,d\overline{x}^{k}) = \omega^{i}(x,X,u\ ,dx^{k})$$

d'où

$$\omega^{k}\left[\varpi^{i}_{k}(\overline{x},\overline{X},\overline{u}\ ;\ d\overline{x},d\overline{X},d\overline{u}) - \varpi^{i}_{k}(x,X,u\ ;\ dx,dX,du)\right] = 0$$

donc on a, pour chaque couple d'indices i,k,

$$\varpi^{i}_{k}(\overline{x},\overline{X},\overline{u};d\overline{x},d\overline{X},d\overline{u}) \equiv \varpi^{i}_{k}(x,X,u;dx,dX,du) \qquad (\mathrm{mod.}\ dx^{h})$$

Il est clair que p_1 des formes ϖ^{i}_{k} sont linéairement indépendantes par rapport aux du^{h}. Choisissons des p_1 formes : chacune d'elle pourra s'écrire

$$c_{h}\ du^{h} + \gamma_{k}\ dX^{k} \quad (\mathrm{mod.}\ \omega^{i}) \qquad (c_{h}, \gamma_{h} \text{ fonctions de } x,X,u)$$

ou encore, en se reportant aux équations (2) et (3)

$$c_{h}\left[du^{h} - b^{h}_{\ell}(x,X,u,v)dx^{\ell}\right] + \gamma_{h}(dX^{k} - \omega^{k}) \quad (\mathrm{mod.}\ \omega^{i})$$

La forme analogue exprimée avec les variables $\overline{x}$, $\overline{X}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ devra être égale à la précédente (mod. dx^{k}), mais comme le groupe Γ laisse invariantes les équations (2) et (3), et que chacune des deux formes considérées est une combinaison linéaire des premiers membres de ces équations, les deux formes ne seront pas seulement <u>congruentes</u> (mod. dx^{k}), mais égales . Appelons ϖ^{α} $(\alpha = 1, 2, \ldots, p_1)$ les p_1 formes ainsi obtenues . On voit que le groupe Γ laisse invariantes non seulement les variables $x^{\nu+1}, \ldots, x^n, X^1, \ldots, X^{\nu}$, mais encore les $n+p_1$ expressions de Pfaff ω^i, ϖ^{α}, linéairement indépendantes par rapport aux différentielles des variables x, X, u avec coefficients dépendant des variables auxiliaires v .

C.Q.F.D.

Si les équations de définition de G étaient du troisième ordre, on poursuivrait le raisonnement de la même manière , de sorte que le théorème fondamental est tout-à-fait général : Tout groupe de Lie admet un prolongement holoédrique Γ défini comme l'ensemble des transformations laissant invariantes un certain nombre de variables et un certain nombre d'expressions de Pfaff en même nombre que les variables et linéairement indépendantes par rapport aux différentielles de ces variables .

Ajoutons une remarque très simple mais importante . Les variables $x^1, \ldots, x^n$ de G sont transformées entre elles par le groupe Γ : comme les variables $X^1, \ldots, X^{\nu}$ de Γ sont invariantes , on ne changera pas la manière dont Γ transforme $x^1, \ldots, x^n$ en donnant partout aux X^i des valeurs numériques fixes . On peut donc supposer que les formes ω^i et ϖ^{α} invariantes par rapport à Γ ne contiennent plus ni les X , ni les dX . On voit ainsi que les variables u ajoutées aux variables x pour former les variables transformées par Γ , ne sont autres que les valeurs que prennent en un point fixe (X_0) , les dérivées partielles des fonctions X des x dans les transformations du groupe qui amènent (x) en (X_0) : l'ensemble des variables (x,u) constitue l'analogue d'un repère dans la théorie des groupes finis.

Les équations de structure et le second théorème fondamental

Plaçons-nous encore dans le cas où les équations de définition, supposées en involution, de G, sont du second ordre . Nous avons prolongé holoédriquement G en un groupe aux variables x, u, caractérisé par l'invariance de $x^{\nu+1}$ $\ldots x^n$ et de $n+p_1$ formes ω^i, ϖ^α. Les équations

$$\bar{x}^{\nu+1} = x^{\nu+1} \quad \ldots\ldots \quad \bar{x}^n = x^n$$

$$\bar{\omega}^i = \omega^i \quad , \quad\quad \bar{\varpi}^\alpha = \varpi^\alpha$$

sont un certain sens les équations de définition de G, mais écrites d'une autre manière qui a l'avantage d'être tout-à-fait symétrique par rapport aux deux séries de variables , initiales et transformées . Ces équations forment donc un système en involution, mais on peut les considérer aussi comme équations de définition du groupe Γ aux variables x, et u; de ce point de vue, on voit que le groupe Γ a ses équations de définition du premier ordre. Nous appellerons normal un groupe de Lie dont les équations de définition sont du premier ordre, de sorte que tout groupe de Lie admet un prolongement holoédrique normal. Si le groupe de Lie est fini, le prolongement holoédrique normal est à $r+h$ variables, si r est le nombre de paramètres du groupe et h le nombre de ses invariants ; il est donc à r paramètres si le groupe est transitif: il est semblable au groupe simplement transitif des paramètres.

Prenons maintenant un groupe G normal à n variables x^i, dont $n-\nu$ sont invariantes $x^{n-\nu+1}$ ..... x^n. Il est caractérisé par la propriété d'invariance de ces $n-\nu$ variables de n formes linéaires $\omega^i(x,u;dx)$ [donc $\omega^{n-\nu+k} = dx^{n-\nu+k}$]. La différentielle extérieure $d\omega^i$, comme nous l'avons déjà remarqué, pourra s'écrire

$$d\omega^i = \omega^k \varpi^i_k$$

les ϖ^i_k étant linéaires par rapport aux p différentielles $du^1, \ldots, du^p$, mais déterminées seulement à des combinaisons linéaires près des dx^k, c'est-à-dire des ω^k. Prenons p des formes ϖ^i_k linéairement indépendantes par rapport aux

du^k et appelons-les $\varpi^1, \varpi^2, \ldots \varpi^p$; la forme $d\,\omega^i$ sera une expression construite d'une manière déterminée avec les ω^k et les ϖ^α ; en ajoutant aux ϖ^α des combinaisons linéaires à coefficients indéterminés des ω^k, on pourra profiter de ces indéterminées pour annuler le plus grand nombre possible des coefficients des formes $d\,\varpi^\alpha$. Cela fait on aura

$$(10) \qquad d\,\omega^i = a^i_{k\rho}\,\omega^k\,\varpi^\rho + \frac{1}{2}\,c^i_{kh}\,\omega^k\,\omega^h$$

$$(c^i_{kh} = -\,c^i_{hk})$$

Les coefficients restants sont évidemment des invariants et par suite des fonctions de $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$. Ce résultat est la généralisation du second théorème fondamental de Lie. On peut remarquer que rien n'empêche de faire sur les ω^i une substitution linéaire à coefficients fonctions des invariants du groupe : les équations (10) conservent la même forme, mais les différentielles $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ deviennent maintenant des combinaisons linéaires des ω^i à coefficients fonctions des invariants.

Il faut enfin tenir compte de l'hypothèse d'après laquelle les équations de définition de G sont du premier ordre, ce qui revient à dire que le système

$$(11) \qquad \bar{x}^{\nu+1} = x^{\nu+1}, \ldots, \bar{x}^n = x^n, \quad \bar{\omega}^i = \omega^i$$

est en involution . Or la différentiation extérieure de ces équations donne

$$(12) \qquad a^{i}_{k\rho}\, \omega^{k} (\bar{\varpi}^{\rho} - \varpi^{\rho}) = 0$$

Les coefficients $a^{i}_{k\rho}$ forment donc un tableau involutif .

D'après la théorie des systèmes en involution, on peut reconnaitre qu'il en est ainsi en calculant les caractères $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ du système (11) et en cherchant le nombre d'arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général à n dimensions . Le système sera en involution si ce nombre d'arbitraires est égal à $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + r\sigma_r$; ce nombre d'arbitraires n'est autre du reste que le nombre d'arbitraires qui entre dans la résolution des équations

$$a^{i}_{k\rho}\, \omega^{k}\, \varpi^{\rho} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

où les ϖ^{ρ} sont des formes inconnues linéaires en $\omega^1, \omega^2, \dots \omega^n$. Quant aux nombres σ , on les obtient de la manière suivante . On forme les systèmes d'équations en ϖ^{ρ}

$$(13) \qquad a^{i}_{1\rho}\, \varpi^{\rho} = 0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(14) \qquad a^{i}_{2\rho}\, \varpi^{\rho} = 0$$

. . . .

$$(15) \qquad a^{i}_{n\rho}\, \varpi^{\rho} = 0$$

σ_1 est le nombre d'équations (13) indépendantes ; $\sigma_1 + \sigma_2$ est le nombre d'équations (13) et (14) indépendantes, et ainsi de suite ; enfin, $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_r$ est le nombre d'équations (13), (14) .... (15) indépendantes (ici p). Il importe d'ajouter qu'on a supposé effectuée préalablement sur les ω^i une substitution linéaire telle que les nombres σ_1, $\sigma_1 + \sigma_2$, ... soient successivement les plus grands possibles.

Les équations (10) portent le nom d'<u>équations de structure</u> du groupe normal G.

Le second théorème fondamental admet une réciproque qui est du reste à peu près évidente : <u>Soient n formes ω^i linéaires en $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$, linéairement indépendantes avec des coefficients fonctions des variables x et d'autres variables u. Supposons que ces formes satisfassent à des équations de la forme (10), où les coefficients $a^i_{k\rho}$, c^i_{kh} sont des fonctions des seules variables $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$; supposons en outre que les différentielles $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ exprimées linéairement en $\omega^1, \ldots, \omega^n$ ne fassent intervenir que des coefficients fonctions de ces variables ; supposons enfin que le tableau des $a^i_{k\rho}$ soit involutif</u>. Dans ces conditions <u>il existe un groupe G normal admettant les invariants $x^{\nu+1}, \ldots, x^n$ et dont les équations (10) sont les</u>

<u>équations de structure</u> .

En effet, les équations

$$\overline{x}^{\nu+1} = x^{\nu+1} \ , \dots . \overline{x}^n = x^n \ . \quad \overline{\omega}^1 = \omega^1$$

forment manifestement un système en involution . et les $\overline{x}$ transformées des x considérées comme fonctions des x , constituent ainsi la solution générale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution.

Si les coefficients des équations de structure sont des constantes , le groupe G est transitif et ces coefficients sont des <u>constantes de structure</u> . Tous les groupes transitifs qui ont les mêmes équations de structure, sont semblables .

Avant d'aller plus loin, donnons quelques exemples.

<u>Exemple I</u>.- Partons du groupe fini $X = ax + b$, dont les équations de définition sont évidemment

$$dX = \omega^1 = u \, dx$$

$$du = 0$$

(équation $\dfrac{d^2X}{dx^2} = 0$ du second ordre) . On a ici

$$d\,\omega^1 = du \, dx = \frac{du}{u} \ \omega^1$$

le groupe Γ prolongé de G aux variables x et u est donc défini par l'invariance des formes

$$\omega^1 = u\,dx \quad , \qquad \omega^2 = \frac{du}{u}$$

On a immédiatement les équations de ~~définition~~ structure

$$d\omega^1 = \omega^2\,\omega^1 \qquad d\omega^2 = 0$$

Exemple II.- Soit le groupe G à deux variables x, y, et un invariant y dont les équations finies sont

$$X = x + ay \qquad Y = y \; ;$$

les équations de définition sont

$$Y = y \; , \qquad dX = \omega_1 = dx + \frac{X-x}{y}\,dy \quad ;$$

le groupe Γ se confond ici avec G . Pour avoir les équations de structure on peut donc dans la forme ω^1 remplacer X par un nombre fixe, par exemple 0 ; on a ainsi

$$\omega^1 = dx - \frac{x}{y}\,dy \qquad \text{et} \qquad d\omega^1 = -\,\omega^1\,\frac{dy}{y}$$

ou encore

$$\omega^1 = dx - \frac{x}{y}\,dy \qquad \omega^2 = dy$$

avec

$$d\omega^1 = \frac{1}{y}\,\omega^2\,\omega^1 \; , \quad d\omega^2 = 0$$

Exemple III .- Soit le groupe G des transformations homographiques d'une variable

$$X = \frac{ax + b}{cx + d} \quad ;$$

On sait que l'équation de définition du groupe est

$$(1) \quad X'X''' - \frac{3}{2} X''^2 = 0 \; ;$$

en posant

$$X' = u \quad , \qquad X'' = v$$

nous avons le système

$$(2) \qquad dX = \omega^1 = u \, dx$$

$$(3) \qquad du = v \, dx$$

$$(4) \qquad dv = \frac{3}{2} \frac{v^2}{u} \, dx$$

On a

$$d\omega^1 = du \, dx = \frac{du - v \, dx}{u} . u \, dx = \frac{du - v \, dx}{u} \omega^1 ;$$

la forme $\frac{du - v \, dx}{u}$ est donc invariante ; appelons-la ω^2

$$\omega^2 = \frac{du}{u} - \frac{v}{u} dx \; .$$

On en déduit

$$d\omega^2 = - \frac{1}{u} dv \, dx + \frac{v}{u^2} du \, dx = \left(- \frac{1}{u^2} dv + \frac{v}{u^3} du \right) \omega^1$$

$$= \left[- \frac{1}{u^2} \left(dv - \frac{3}{2} \frac{v^2}{u} dx \right) + \frac{v}{u^3} (du - v \, dx) \right] \omega^1$$

d'où la nouvelle forme invariante

$$\omega^3 = -\frac{1}{u^3}\,dv + \frac{v}{u^3}\,du + \frac{1}{2}\frac{v^2}{u^3}\,dx \quad .$$

On en déduit

$$d\omega^3 = \frac{1}{u^3}du\,dv + \frac{v}{u^3}\,dv\,dx - \frac{3}{2}\frac{v^2}{u^4}\,du\,dx = \omega^3\,\omega^2$$

Les équations de structure sont par suite

$$d\omega^1 = \omega^2\,\omega^1$$

$$d\omega^2 = \omega^3\,\omega^1$$

$$d\omega^3 = \omega^3\,\omega^2$$

Exemple IV.- Soit le groupe G défini par les équations

$$X = x + f(y) \quad , \qquad Y = y$$

où $f(y)$ est une fonction analytique arbitraire de y . Les équations de définition sont

$$Y = y \quad , \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = 1$$

ou encore

$$(1) \qquad Y = y$$

$$(2) \qquad dX = dx + u\,dy$$

On a donc

$$\omega^1 = dx + u\,dy \ , \qquad \omega^2 = dy$$

avec les équations de structure

$$d\omega^1 = \varpi\, dy = \varpi\,\omega^2 , \qquad d\omega^2 = 0$$

ϖ désignant la forme du plus un multiple arbitraire de dy.

Exemple V.- Soit le groupe transitif

$$X = f(x) \quad , \qquad Y = \frac{y}{f'(x)}$$

où $f(x)$ est une fonction arbitraire de x , $f'(x)$ sa dérivée. Les équations de définition sont

$$dX = \frac{y}{Y}\, dx$$

$$dY = \frac{Y}{y}\, dy + u\, dx \quad ;$$

elles sont du premier ordre . Donnons dans les seconds membres à Y la valeur numérique 1 ; nous aurons

$$\omega^1 = y\, dx \quad , \qquad \omega^2 = \frac{dy}{y} + u\, dx$$

avec les équations de structure

$$d\omega^1 = \omega^2\, \omega^1 \;, \qquad d\omega^2 = \varpi\, \omega^1 \qquad \left[\varpi = \frac{du}{y} \pmod{dx}\right]$$

Nous remarquons ici que le groupe G est le prolongement holoédrique du groupe $X = f(x)$, dont l'équation de définition est $dX = u\, dx$; avec $\omega^1 = u\, dx$, $d\omega^1 = \varpi\, \omega^1$.

Le troisième théorème fondamental.

La question à laquelle répond le troisième théorème fondamental est la suivante. Les coefficients $c_{kh}^{i} = - c_{hk}^{i}$ $a_{k\rho}^{i}$, qui entrent dans les équations de définition d'un groupe normal peuvent-ils être choisis arbitrairement comme fonctions des invariants du groupe ? Nous nous bornerons au cas où le groupe est transitif : il y aurait peu de modifications à faire dans le cas où le groupe est intransitif.

Le problème est en somme le suivant : Est-il possible de trouver n+p formes ω^i, ϖ^α indépendantes à n+p variables satisfaisant aux équations

$$(10) \qquad d\omega^i = a_{k\rho}^{i}\omega^k \varpi^\rho + \frac{1}{2} c_{kh}^{i}\omega^k\omega^h \qquad (c_{kh}^{i} = -c_{hk}^{i})$$

où les coefficients sont des constantes données, les $a_{k\rho}^{i}$ formant un système involutif?

Il suffit, en effet, qu'on puisse trouver des formes satisfaisant à ces conditions, et alors les équations $\omega^i = 0$ formant manifestement, d'après (10), un système complètement intégrable, on pourra ensuite supposer que $x^1, x^2, \dots, x^n$ sont les intégrales premières de ce système, et d'après la réciproque du second théorème fondamental, il existera bien un groupe normal G opérant sur ces n variables et admettant (10) pour équations de structure. On pourra plus généralement chercher des formes ω^i et ϖ^α linéaires par rapport à $N \geq n + p$ variables données, sous la réserve que les $n+p$ formes sont linéairement indépendantes. Nous appellerons ξ^λ ces variables.

Si nous posons alors

$$(16) \qquad \omega^i = p^i_\lambda \, d\xi^\lambda \quad , \quad \varpi^\alpha = q^\alpha_\lambda \, d\xi^\lambda$$

la mise en équation du problème fournit les équations quadratiques extérieures

$$(\mathrm{I}) \qquad dp^i_\lambda \, d\xi^\lambda = a^i_{k\rho}\, \omega^k \varpi^\rho + \frac{1}{2} c^i_{kh}\, \omega^k \omega^h$$

dans les seconds membres desquelles on suppose les formes ω^i et ϖ^α remplacées par leurs valeurs (16).

D'après la théorie générale des systèmes de Pfaff il faut ajouter aux équations (I) celles qu'on en déduit par différentiation extérieure, compte tenu des équations (I). Le calcul donne

$$(\mathrm{II}) \qquad a^i_{k\rho}\, \omega^h d\varpi^\rho = a^i_{k\sigma} a^k_{h\rho}\, \omega^h \varpi^\rho \varpi^\sigma + (c^i_{kh} a^k_{\ell\rho} + \frac{1}{2} c^k_{n\ell} a^i_{k\rho})\, \omega^h \omega^\ell \varpi^\rho$$
$$+ \frac{1}{2} c^i_{kh} c^k_{\ell m}\, \omega^h \omega^\ell \omega^m$$

où on suppose naturellement les formes ω^i et ϖ^α remplacées par leurs expressions (16).

On obtient des conditions nécessaires de compatibilité en exprimant la possibilité de satisfaire aux équations (II) en y remplaçant les formes $d\varpi^\alpha$ par certaines formes quadratiques construites avec les ω^i et les ϖ^ρ, telles que

$$(17)\qquad d\varpi^\alpha = \frac{1}{2}\gamma^\alpha_{\lambda\mu}\varpi^\lambda\varpi^\mu + \delta^\alpha_{k\lambda}\omega^k\varpi^\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon^\alpha_{kh}\omega^k\omega^h$$

On trouve par identification les relations

$$(18)\qquad a^i_{k\beta}a^k_{h\alpha} - a^i_{k\alpha}a^k_{h\beta} - a^i_{h\rho}\gamma^\rho_{\alpha\beta} = 0$$

$$(i=1,2,\ldots,n\ ;\ \alpha,\beta=1,2\ldots,p)$$

$$(19)\qquad c^i_{kh}a^k_{\ell\alpha} - c^i_{k\ell}a^k_{h\alpha} + a^i_{k\alpha}c^k_{h\ell} - a^i_{h\rho}\delta^\rho_{\ell\alpha} + a^i_{\ell\rho}\delta^\rho_{h\alpha} = 0$$

$$(h,\ =1,2,\ldots,n;\ \alpha=1,2,\ldots,p)$$

$$(20)\qquad c^i_{kh}c^k_{\ell m} + c^i_{k\ell}c^k_{mh} + c^i_{km}c^k_{h\ell} - a^i_{h\rho}\varepsilon^\rho_{\ell m} - a^i_{\ell\rho}\varepsilon^\rho_{mh} - a^i_{m\rho}\varepsilon^\rho_{h\ell} = 0$$

$$(h,\ell,m=1,2,\ldots,n)$$

Il faut que ces équations considérées comme équations linéaires par rapport aux inconnues $\gamma^\alpha_{\lambda\mu}$, $\delta^\alpha_{k\lambda}$, ε^α_{kh}, soient compatibles ; cela entraine naturellement des relations algébriques entre les constantes $a^i_{k\rho}$ et c^i_{kh}.

<u>Supposons ces relations vérifiées</u>. Le système (I) est alors en involution. Pour le démontrer il faut évaluer

le nombre d'arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général à n dimensions, calculer les caractères S_1 $S_2 \ldots\ldots S_{n-1}$ du système et vérifier que le premier nombre a la valeur que la théorie des systèmes en involution fournit connaissant les caractères S_i.

Pour faire la première évaluation (nombre d'arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général à N dimensions), considérons d'abord les équations (II). Par hypothèse elles sont vérifiées par les valeurs des $d\varpi^\alpha$ de la forme (17), avec des valeurs déterminées des coefficients γ, δ, ε. La solution la plus générale de (II) s'obtiendra en ajoutant aux valeurs (17) les formes Π^α les plus générales qui satisfont aux équations

$$a^i_{k\rho}\,\omega^k\,\Pi^\rho = 0 \tag{21}$$

Or les équations $a^i_{k\rho}\,\omega^k\varpi^\rho = 0$, où les inconnues sont des formes linéaires ϖ^α, admettent une solution générale dépendant de $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r$ paramètres arbitraires soit

$$\varpi^\alpha = b^\alpha_{\lambda k}\, t^\lambda\,\omega^k$$

où les t^λ sont les paramètres en question. Il est alors évident que les équations (21) seront vérifiées si l'on pose

$$\Pi^\alpha = b^\alpha_{\lambda k}\,\omega^k\,\chi^\lambda \tag{22}$$

les χ^λ étant des formes à <u>coefficients arbitraires</u> linéaires en $d\xi^1$ ..... $d\xi^N$. Il s'introduit ainsi $N(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r)$ coefficients arbitraires dans les expressions les plus générales des $d\varpi^\alpha$ satisfaisant aux équations (II). Mais ce nombre doit être réduit par le fait qu'il y a dans Π^α deux termes, l'un en $\omega^1\omega^2$, l'autre en $\omega^2\omega^1$, et que la réduction en un seul de ces termes et des termes analogues diminue le nombre des coefficients arbitraires. On peut calculer rigoureusement le nombre dont il faut réduire $N(\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + r\sigma_r)$ pour avoir le nombre exact des coefficients arbitraires restants. Laissons de côté cette détermination pour n'indiquer que le résultat : le nombre H des coefficients arbitraires (indépendants des p^i_λ et des q^α_λ) qui entrent dans la solution des équations (II) en $d\varpi^\alpha$ telle que nous l'avons envisagée, est

$$(N-1)\sigma_1 + (2N-3)\sigma_2 + (3N-6)\sigma_3 + \ldots\ldots = \sum_{i=1}^{i=r}\left[iN - \frac{i(i+1)}{2}\right]\sigma_i$$

En réalité le nombre H peut être supérieur au nombre précédent, parce qu'il se pourrait qu'il existât des solutions des équations (21) qui ne fussent pas de la forme (22). On doit donc écrire

$$H \geq \sum_{i=1}^{i=r} \left[i\,N - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i$$

Cela ne nous donne pas encore le nombre de paramètres arbitraires dont dépens l'élément intégral à N dimensions le plus général des équations (I) et (II). Pour l'obtenir nous pouvons substituer aux équations (II) les équations

$$\text{(II')} \qquad dq^{\alpha}_{\lambda}\; d\xi^{\lambda} = d\varpi^{\alpha}$$

où on a remplacé $d\varpi^{\alpha}$ par la valeur obtenue, qui fait intervenir H arbitraire. Tout élément intégral à N dimensions sera défini par

$$dp^{i}_{\lambda} = p^{i}_{\lambda.\mu}\; d\xi^{\mu}$$

$$dq^{\alpha}_{\lambda} = q^{\alpha}_{\lambda.\mu}\; d\xi^{\mu}$$

en prenant dans les éq. (I) et (II') les termes en $d\xi^{\lambda} d\xi^{\mu}$,
on voit tout de suite que les ~~coefficients des seconds membres~~ équations sont de la forme

$$p^{i}_{\lambda.\mu} - p^{i}_{\mu.\lambda} = \dots$$

$$q^{\alpha}_{\lambda.\mu} - {}^{\alpha}_{\mu.\lambda} = \dots.$$

les seconds membres étant des quantités fonctions déterminées des p^{i}_{λ}, des q^{α}_{λ} et des H arbitraires dont il a été question plus haut. On a ainsi, pour des valeurs fixées de ces H arbitraires, $\frac{N^2(N-1)}{2}$ relations linéaires à N^3 inconnues. Par suite le nombre total des arbitraires dont dépend l'élément intégral à N dimensions le plus général du système (I). (II) est

$$(23) \qquad \frac{N^2(N+1)}{2} + H \geq \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\left[iN - \frac{i(i+1)}{2}\right]\sigma_i$$

Passons au calcul des caractères S_1, S_2 ....,S_{N-1} du système. Nous allons déterminer des entiers $\sum_1, \sum_1+\sum_2$ ..... tels que l'on ait

$$S_1 \geq \sum_1 \,,\quad S_1 + S_2 \geq \sum_1 + \sum_2, \ldots$$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{N-1} \geq \sum_1 + \sum_2 + \ldots + \sum_{N-1}$$

Pour que le système soit en involution, il faut et il suffit que le nombre $\frac{N^2(N+1)}{2}$ + H qu'on vient de trouver, qui ne peut pas dépasser

$$N^3 - (N-1)S_1 - (N-2)S_2 - \ldots - S_{N-1}$$

lui soit égal; or ce dernier nombre est lui-même inférieur ou égal à

$$N^3 - (N-1)\sum_1 - (N-2)\sum_2 - \ldots - \sum_{N-1}$$

Nous allons démontrer que ce dernier nombre est égal à

$$\frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i \ ;$$

on aura alors

$$\frac{N^2(N+1)}{2} + E \geq \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n} \left[iN - \frac{i(i+1)}{2} \right] \sigma_i$$

$$\geq N^3 - (N-1)S_1 - (N-2)S_2 - \ldots - S_{N-1}$$

Par suite le système est en involution et le signe d'inégalité doit être partout remplacé par le signe d'égalité . Il en résultera $S_i = \sum_i$ d'une part, et d'autre part, on sera sûr que les équations (22) fournissent la solution la plus générale de(21) .

Pour calculer les nombres $\sum$, formons les premiers membres des équations (I) et (II) ; ce sont les seules parties de ces équations où interviennent les différentielles des fonctions inconnues p^i_λ , q^α_λ . On obtient

(I) $\quad dp^i_\lambda \; d\xi^\lambda = \ldots$

(II) $\quad a^i_{k\rho} \; p^k_\lambda \; dq^\rho_\mu \; d\xi^\lambda \, d\xi^\mu = \ldots .$

Nous aurons un nombre $\sum_1 \leq S_1$ en prenant dans (I) les coefficients de $d\xi^1$, ce qui donne les n différentielles dp^i_1 ; on prendra donc $\sum_1 = n$. Nous aurons un nombre $\sum_1 + \sum_2 \leq S_1 + S_2$ en prenant dans (I) les coefficients de

$d\xi^1$ et de $d\xi^2$ et dans (II) les coefficients de $d\xi^1 d\xi^2$ ce qui donne

$$dp^i_1 \;, \quad dp^i_2 \;, \quad a^i_{k\rho}\,(p^k_1\, dq^\rho_2 - p^k_2\, dq^\rho_1) \;.$$

c'est-à-dire au moins $2n + \sigma_1$ expressions linéairement indépendantes (il suffit par exemple de faire $p^1_1 = 1$, les autres p^k_1 étant nuls). Nous prendrons donc $\overline{\sum}_2 = n + \sigma_1$.

En poursuivant ainsi on trouve

$$\overline{\sum}_1 = n \;, \quad \overline{\sum}_2 = n + \sigma_1 \;, \quad \overline{\sum}_3 = n + \sigma_1 + \sigma_2$$

$$\overline{\sum}_4 = n + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \qquad \cdot \overline{\sum}_{N-1} = n + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{N-1}$$

si on a posé $\sigma_{n+1} = \dots = \sigma_{N-1} = 0$.

On trouve ainsi facilement l'égalité annoncée

$$N^3 - (N-1)\overline{\sum}_1 - (N-2)\overline{\sum}_2 - \dots - \overline{\sum}_{n-1}$$

$$= \frac{N^2(N+1)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n}\left[iN - \frac{i(i+1)}{2}\right]\sigma_i$$

Il est inutile de faire remarquer que ce troisième théorème fondamental généralise celui de Lie, les relations classiques de Lie entre les c^i_{kh} se réduisant aux relations (20) où l'on supprime les termes en ε^i_{kh} .

Le groupe de stabilité linéaire élément plan systatique

Etant donné un groupe de Lie G, non nécessairement normal, l'ensemble des transformations du groupe G qui laissent fixe un point générique (x) forme un sous-groupe g de G, qu'on appelle le groupe de stabilité du point (x). Si le groupe G est fini, g est un groupe de Lie, mais il n'en est pas en général de même si le groupe G est infini. Quoi qu'il en soit, le groupe g transforme linéairement les vecteurs dx^i issus du point (x) et le groupe suivant lequel il les transforme est un groupe linéaire, que nous appellerons le groupe de stabilité linéaire du point (x). Nous allons montrer que les transformations infinitésimales de ce groupe apparaissent dans les équations de structure du groupe G.

Partons de la forme primitive des équations de définition du groupe

$$(1) \qquad X^{\nu+1} = x^{\nu+1}, \ldots, X^n = x^n$$

$$(2) \qquad dX^i = a^i_k(x,X,u)\, dx^k \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Si l'on fixe le point (x) et le point (X), les formules (2) indiquent comment une transformation T de G amenant (x) en (X) transforme le vecteur (dx) dans le vecteur (dX) ; cette transformation se traduit par la substitution linéaire S_u de coefficients a^i_k effectuée sur les composantes dx^k du vecteur (dx). Si maintenant nous considérons deux transformations T et T' de G amenant (x) en (X), la transformation $T'^{-1}T$ de G appartient au groupe de stabilité de (x) et la substitution linéaire correspondante du groupe de stabilité linéaire est la substitution $S^{-1}_{u'}S_u$. Les substitutions $S^{-1}_{u'}S_u$, quand on fait varier u et u' engendrent donc le groupe de stabilité linéaire γ : on peut aussi le regarder comme engendré par les substitutions $S^{-1}_o S_u$ où S_o correspond à des valeurs numériques fixes de u'. Les substitutions $\Sigma_u = S_u S_o^{-1}$ engendrent aussi un groupe, puisque l'on a

$$S_u S_o^{-1} = S_o (S_o^{-1} S_u) S_o^{-1}$$

c'est le groupe transformé de γ par S_o. C'est encore le groupe de stabilité linéaire mais lorsqu'on prend comme composantes du vecteur (dx) les quantités résultant de la substitution S_o effectuée sur les dx^k, c'est-à-dire les quantités $\omega^i(x,X,u_o,dx)$. Désignons encore par γ ce groupe.

Cela posé considérons la substitution infinitésimale $\Sigma_{u+\delta u}\Sigma_u^{-1}$ de γ ; c'est celle qui appliquée aux quantités $\omega^i(x,X,u,dx)$ donne les $\omega^i(x,X,u+\delta u,dx)$. Or on

$$\omega^i(x,X,u+\delta u,dx) = \omega^i(x,X,u,dx) + \frac{\partial \omega^i}{\partial u^k}\delta u^k .$$

Mais d'après les équations de structure

$$d\,\omega^i = \frac{1}{2} c_{kh}^{i}\,\omega^k\,\omega^h + a_{h\rho}^{i}\,\omega^h\,\varpi^\rho$$

on a

$$\frac{\partial \omega^i}{\partial u^k} = a_{k\rho}^{i}\,\omega^k\,e^\rho$$

en désignant par e^ρ ce qui devient ϖ^ρ quand on y remplace dx^k par 0 et du^k par $-\delta u^k$. Il en résulte que <u>les équations des transformations infinitésimales du groupe linéaire de stabilité sont</u>

(23) $$\delta\,\omega^i = a_{k\rho}^{i}\,e^\rho\,\omega^k$$

<u>avec</u> p_1 <u>paramètres</u> $e^1, e^2, \ldots, e^{p_1}$.

Ce qui précède suppose implicitement le groupe G normal ; dans ce cas, si l'on exprime que les transformations infinitésimales

(24) $$E^\alpha f = a_{k\alpha}^{i}\,\xi^k \frac{\partial f}{\partial \xi^i}$$

engendrent un groupe de ~~direction~~ structure $\gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}$, on trouve précisément les équations (18). <u>La compatibilité de ces équations</u>

nécessaire dans l'énoncé direct du troisième théorème fondamental, exprime donc simplement que les transformations (23) engendrent un groupe .

Si le groupe G n'est pas normal, les résultats précédents subsistent, mais les ϖ^{α} sont alors les formes ω invariantes par le prolongement holoédrique normal de G qui se présentent par la considération de celles des équations de définition de G qui sont du premier ordre .

Dans tous les cas, les résultats précédents nous conduisent à une notion nouvelle . Prenons un vecteur (dx) dont les composantes annulent les np_1 formes $a_{k\alpha}^{i}\omega^{k}$ $(i=1,2,\ldots n)$ $(\alpha=1,2,\ldots,p_1)$ qui s'introduisent dans les seconds membres des équations (23) . Toute transformation infinitésimale de γ le laisse invariant, et réciproquement, tout vecteur invariant par γ annule ces np_1 formes . Nous donnerons au système de Pfaff

$$(25) \qquad a_{k\alpha}^{i}\omega^{k} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n \;;\; \alpha=1,\ldots,p)$$

le nom de système systatique .

Les vecteurs issus d'un point (x) qui satisfont aux équations de ce système engendrent un élément plan E que nous nommerons élément plan systatique attaché au point (x) . Cette dénomination s'explique par le fait que toute transformation de G qui laisse fixe le point (x) laisse fixe en même temps tous les points infiniment voisins de (x) situés dans l'élément plan E associé à (x).

De là résulte que <u>le système (25) est complètement intégrable</u>. On peut le vérifier par le calcul ; mais on peut aussi s'en rendre compte d'une manière intuitive . Considérons une courbe (C) tangente en chacun de ses points à l'élément systatique associé à ce point . Toute transformation de G qui laisse fixe un point (x) de la courbe, laissera également fixes les points infiniment voisins, et par suite, de proche en proche, tous les points de C. Le lieu des points invariants par les transformations du groupe de stabilité (non linéaire) d'un point (x) est donc une variété qui, en chacun de ses points, admet toutes les tangentes à l'élément systatique ; ces variétés sont les variétés intégrales du système systatique (25) qui est donc complètement intégrable .

Naturellement il peut arriver que l'élément plan systatique se réduise au point (x) lui-même, le groupe G étant alors <u>asystatique</u> : cela arrive lorsque les équations (25) sont au nombre de n indépendantes .

<u>Invariants essentiels</u>

La considération du système de Pfaff systatique va nous conduire à une notion importante , celle <u>d'invariant essentiel</u>.

Remarquons d'abord que si l'on fait un changement de variables quelconque, le système systatique reste invariant ; c'est une simple conséquence de sa signification géométrique . Cela posé, considérons parmi toutes les combinaisons linéaires des équations de ce système celles qui ne dépendent que des différentielles $dx^{\nu+1}, \ldots, dx^n$ des invariants du groupe . On peut supposer, par un petit changement de notations, que ce sont les différentielles d'un certain nombre d'invariants, que nous appellerons $y^1, \ldots, y^r$; nous désignerons par $z^1, \ldots, z^s$ les autres invariants du groupe ; enfin nous réserverons la lettre x pour désigner les variables $x^1, x^2, \ldots, x^\nu$. Nous pourrons même supposer que les intégrales premières du système systatique sont $x^1, x^2, \ldots$ x^q (et les invariants $y^1, \ldots, y^r$).

Ces conventions étant faites, considérons les équations de définition du groupe G. non nécessairement normal, et parmi celles-là les équations

$$\bar{y}^k = y^k \quad , \bar{z}^h = z^h , \qquad \bar{\omega}^i = \omega^i$$

où les variables indépendantes sont les x et les fonctions inconnues des $\bar{x}$. Regardons comme des <u>paramètres</u> constants les quantités $x^1, \ldots, x^q$, $y^1, \ldots, y^r$ intégrales premières du système systatique , les quantités $\bar{x}^1 \ldots \bar{x}^n$ étant des fonctions inconnues des autres variables $x^{q+1}, \ldots, x^\nu$,

$z^1, \ldots, z^s$. Comme les quantités $a^i_{k\rho}\,\omega^k$ deviennent ainsi toutes nulles, et par suite aussi les quantités $a^i_{k\rho}\,\overline{\omega}^k$ (en vertu des équations $\overline{\omega}^i = \omega^i$), la différentiation extérieure des équations $\overline{\omega}^i = \omega^i$ à ν fonctions inconnues $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^\nu$ donne des identités, les formes $d\overline{\omega}^i - d\omega^i$ s'annulant quand on tient compte des équations $\overline{\omega}^i = \omega^i$. Le système considéré est donc complètement intégrable.

Soit

$$\overline{x}^i = F^i(x, y, z, A^1, A^2, \ldots, A^\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{26}$$

la solution générale où les A sont les constantes d'intégration.

Ce résultat prouve que toute transformation du groupe G peut se mettre sous la forme (26), où les F^i sont des fonctions déterminées de leurs arguments et où les A^i sont certaines fonctions des intégrales premières $x^1, x^2, \ldots, x^q, y^1, y^2, \ldots, y^r$ du système systatique. On peut ajouter que pour une transformation donnée S du groupe G les fonctions A^i sont parfaitement déterminées ; il suffit pour les avoir de remplacer les $\overline{x}^i$ par leur valeur en fonction de x, y, z et de résoudre par rapport à $A^1, A^2, \ldots A^\nu$; on trouve nécessairement des fonctions qui ne dépendent que de $x^1, x^2 \ldots x^q, y^1, y^2, \ldots, y^r$.

Cela étant, donnons maintenant aux ν variables x^k

des valeurs numériques fixes x_0^k et faisons le changement de variables fourni par les équations

$$(27) \qquad x^i = F^i\,(x_0, y, z, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^\nu)\ ,$$

équations qui donnent les ξ^i comme fonctions déterminées des x, des y et des z . Effectuons alors sur le point (x_0, y, z) une transformation déterminée T du groupe et soit (ξ, y, z) le point transformé (exprimé avec les nouvelles coordonnées) A la transformation T , correspondent des fonctions $A^i\,(x^1, \ldots, x^q, y^1, \ldots, y^r)$ bien déterminées , qui se réduisent, pour $x = x_0$ à des fonctions $A^i\,(y)$ bien déterminées . La comparaison des formules (26) et (27) montre que les coordonnées ξ du point transformé sont simplement les quantités $A^i(y)$. Si donc on applique la même transformation T au point (x_0, y, z') , on aura un nouveau point (ξ, y, z') avec les mêmes valeurs $A^i(y)$ des ξ .

Soit maintenant

$$\bar{\xi}^i = \varphi^i(\xi, y, z)$$

les équations d'une transformation quelconque S du groupe (exprimées au moyen des nouvelles variables) . Donnons aux ξ , y, z des valeurs numériques fixes (arbitraires) ; il existe toujours au moins une transformation T du groupe faisant passer du point (x_0, y, z) (anciennes variables) au point (ξ, y, z) (nouvelles variables), et la transformation $S\,T$ fait passer de ce même point (x_0, y, z) au point $(\bar{\xi}, y, z)$. Partons maintenant du point (x_0, y, z') : la transformation T donnera le point (ξ, y, z') et la transformation $S\,T$ donnera le point $(\bar{\xi}, y, z')$, avec les mêmes valeurs des ξ^i, et des $\bar{\xi}^i$. En conséquence, la transformation S fait passer simultanément

du point (ξ, y, z) au point $(\bar{\xi}, y, z)$

et du point (ξ, y, z') au point $(\bar{\xi}, y, z')$.

On a donc

$$\bar{\xi}^i = \varphi^i(\xi, y, z) = \varphi^i(\xi, y, z') \quad ;$$

les égalités

$$\varphi^i(\xi, y, z) = \varphi^i(\xi, y, z')$$

ayant lieu quelles que soient les valeurs numériques données aux arguments ξ, y, z, z', c'est que les fonctions φ^i ne dépendent pas des z.

<u>On peut donc effectuer un changement de variables de manière que les variables ξ, et y soient transformées entre elles par le groupe G</u>. Le groupe G se présente ainsi comme le produit direct d'un groupe G' à $n-s$ variables dont r invariants, et d'un groupe à s variables transformées identiquement.

On s'est ainsi en quelque sorte débarrassé des invariants $z^1, z^2, \dots, z^s$. Mais il est impossible de faire plus dans ce sens, parce que, comme nous l'avons dit, le système systatique est invariant pour tout changement de variables ; il contiendra donc toujours les équations $dy^1 = 0$, ..., $dy^r = 0$. Si on pouvait éliminer quelques uns des invariants y comme on a éliminé les invariants z, les différentielles de ces invariants y ainsi éliminés, ne pourraient manifestement pas figurer dans les premiers membres des équations du système systatique de G, qui sont les mêmes que pour G'.

Nous dirons que les invariants y, intégrales premières du système systatique, sont les invariants essentiels du groupe.

Si le groupe est fini et d'ordre ν, l'élément plan systatique remplit tout l'espace ; il n'y a donc pas de système systatique et pas d'invariant essentiel : tout groupe fini est isomorphe à un groupe transitif, ce qui est bien connu. Ce théorème n'est plus vrai pour les groupes infinis (exemple : $X = x + f(y)$, $Y = y$, où y est un invariant essentiel, et reste invariant essentiel pour tous les groupes isomorphes).

Exemple I. - Reprenons l'exemple déjà considéré du groupe

$$X = x + a\,y \quad , \quad Y = y \qquad (\nu = 1\ ,\ n = 1)$$

avec

$$d\omega^1 = \frac{1}{y}\,\omega^2\,\omega^1 \,, \qquad d\omega^2 = 0 \;;$$

il n'y a pas de système systatique et par suite pas d'invariant essentiel . En effet, en posant $x = \xi y$, on a

$$\bar{\xi} = \xi + a \quad , \quad \bar{y} = y$$

Ce groupe est le produit direct du groupe transitif $\bar{\xi} = \xi + a$ par le groupe $\bar{y} = y$. On peut voir directement que le groupe de stabilité du point (x_0, y_0) se réduit à la transformation identique . L'élément plan systatique est donc à deux dimensions, et il n'y a pas de système systatique .

<u>Exemple II</u>. - Prenons le groupe

$$X = x + ay + b \quad , \qquad Y = y \qquad (\nu=1 \;,\; n=2)$$

On a

$$\omega^1 = dx + u\,dy \quad , \qquad \omega^2 = dy$$

avec

$$d\omega^1 = du\,dy = \varpi^1\,\omega^2 \;, \qquad d\omega^2 = 0 \qquad (\varpi^1 = du)$$

et $d\varpi^1 = 0$

Le système systatique est formé de l'équation $\omega^2 \equiv dy = 0$ l'invariant y est essentiel .

<u>Exemple III</u>. - Soit le groupe

$$X = x + ay + bz \quad , \quad Y = y \quad , \quad Z = z \qquad (\nu=1 ,\; n=3)$$

On a

$$\omega^1 = dx - x\frac{dz}{z} + u\left(dy - y\frac{dz}{z}\right) \quad , \omega^2 = dy, \ \omega^3 = dz$$

avec

$$d\omega^1 = -\omega^1 \frac{dz}{z} + \varpi^1\left(\omega^2 - \frac{y}{z}\omega^3\right) \qquad (\varpi^1 = du)$$

et $\quad d\varpi^1 = 0$

Le système systatique est $\omega^2 - \frac{y}{z}\omega^3 = dy - \frac{y}{z}dz = 0$: l'invariant $\frac{y}{z}$ est essentiel . En effet, en posant $\xi = \frac{x}{z}$ on a

$$\bar{\xi} = \xi + a\frac{y}{z} + b$$

et il ne reste que l'invariant essentiel $\frac{y}{z}$.

BIBLIOGRAPHIE

Cette conférence contient la substance de la 1ère partie du mémoire sur la structure des groupes infinis (Annales Ecole Normale 1904) et une partie du mémoire qui lui fait suite (Annales Ecole Normale 1905). Les notations sont un peu modifiées . La démonstration du théorème fondamental est précisé, ainsi que tout ce qui concerne le groupe de stabilité linéaire (appelé groupe adjoint dans le mémoire de 1905) et la théorie des invariants essentiels . La démonstration esquissée dans cette conférence de la réciproque du 3ème théorème fondamental est simplifiée par l'utilisation des théorèmes de Kaehler et précisée . Enfin les dénominations de groupe normal, groupe de stabilité, élément plan systatique, sont nouvelles .
