SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

C. SIEGEL

Nombres transcendants

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 11, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A17_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Quatrième année - 1936-37

NOMBRES TRANSCENDANTS

Exposés faits par M. C. SIEGEL ,

les 24, 25, et 26 Mai 1937

rédigés par M. Ch. PISOT

On appelle algébrique tout nombre qui est racine d'une équation à coefficients entiers . Tout nombre qui n'est pas algébrique est appelé transcendant . L'existence (et aussi une méthode de construction) des nombres transcendants a été montrée très simplement par Cantor (1) en 1874, lorsqu'il a démontré que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable tandis que l'ensemble des nombres réels a une puissance supérieure au dénombrable . Mais déjà auparavant, Liouville (2) en 1844 avait construit effectivement des nombres transcendants à l'aide de leur développement en fraction continue . En 1873, Hermite (3) a démontré que e^x était transcendant si x est rationnel. Ensuite Lindemann (4) en 1882 étend ce résultat à toute valeur algébrique de x . Donc π est aussi transcendant, sinon $e^{2i\pi} = 1$ le serait . Hilbert (5) a posé alors en 1900, le problème suivant :

a étant un nombre algébrique distinct de 0 et de 1 , et b un nombre algébrique irrationnel , a^b est-il transcendant ? La démonstration en a été donnée en 1934 par Gelfond (6) et peu de temps après par Schneider (7) ,ce dernier se basant sur une idée que dès 1925 Siegel avait (8) appliqué aux fonctions de Bessel .

Si l'on désigne par $B(x)$ la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ qui vérifie aussi l'équation différen-

tielle : $B'' + \frac{1}{x} B' + B = 0$, et a étant un nombre algébrique non nul, $B(a)$ est transcendant et est algébriquement indépendant de $B'(a)$. En particulier, la valeur de la fraction continue $x + \cfrac{1}{2x} + \ldots + \cfrac{1}{nx} + \ldots$ est transcendante pour $x = a$, car cette valeur est $-i \frac{B(\frac{2i}{x})}{B'(\frac{2i}{x})}$. De même, les racines de $B(x) = 0$ sont aussi des nombres transcendants . En 1936, Schneider a montré [9] que la valeur de toute intégrale elliptique de première et deuxième espèce, à coefficients algébriques, prise entre des limites algébriques est transcendante si l'intégrale indéfinie correspondante ne se réduit pas à une fonction algébrique . En particulier, le périmètre d'une ellipse est un nombre transcendant, si les axes de l'ellipse sont algébriques . C'est ce théorème que nous allons maintenant démontrer .

Soit $y = \sqrt{P(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme du quatrième degré sans racines multiples et $R(x,y)$ une fonction rationnelle quelconque . La surface de Riemann correspondante a deux feuillets et quatre points de ramification . On appellera alors elliptique l'intégrale $\int_C R(x,y)dx$ prise le long d'une courbe C tracée sur la surface de Riemann . Au voisinage d'un pôle de la fraction rationnelle $R(x,y)$, on peut développer y en série de Taylor en $\frac{1}{x-\xi}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{x-\xi}}$, si ξ est un point de ramification .

L'intégration $\int_a^z R(x,y)\,dx$ peut alors introduire des logarithmes . Dans ce cas, l'intégrale est dite de troisième espèce . Dans le cas contraire, l'intégrale est dite de deuxième ou de première espèce suivant qu'elle a des pôles ou non . Supposons le polynôme $P(x)$ à coefficients algébriques de même que la fraction rationnelle $R(x,y)$, et l'intégrale $\int R(x,y)\,dx$ de 1ère ou 2ème espèce . Le théorème que nous allons démontrer s'énonce alors :

<u>Théorème</u>

<u>La valeur</u> $\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} R(x,y)\,dx$, <u>l'intégrale étant prise le long d'une courbe tracée sur la surface de Riemann est transcendante si les nombres</u> α_1, α_2 <u>sont algébriques</u>

Le théorème reste vrai si $\alpha_2 = \alpha_1$, c'est-à-dire si C est une courbe fermée , à condition toutefois que C ne puisse être ramené à un point par déformation continue sur la surface de Riemann . Ainsi la longueur du périmètre d'une ellipse de demi-axes A et B est

$$A \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 - (1 - \frac{B^2}{A^2})\,x^2}{1 - x^2}}\,dx$$

Une transformation bi-rationnelle ramène la courbe $y^2 = P(x)$ à la forme $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, et si les coefficients de $P(x)$ sont algébriques , il en est de même de ceux de la transformation et de g_2 et g_3 .

Posons alors $\mathcal{J}_1(x) = \int \frac{dx}{y}$ et $\mathcal{J}_2(x) = \int \frac{x\,dx}{y}$

L'intégrale la plus générale de 1ère et de 2ème espèce peut alors se mettre sous la forme $A\,\mathcal{J}_1(x) + B\,\mathcal{J}_2(x) + S(x,y)$ où A et B sont des constantes et $S(x,y)$ une fraction rationnelle . Si les coefficients de $P(x)$ et de $R(x,y)$ sont algébriques, A et B et ceux de $S(x,y)$ le seront aussi . Il suffit donc de démontrer le théorème pour l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} \frac{a + bx}{y}\,dx$, x_1 , x_2 , a , b étant algébriques .

Posons $\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{y} = t$, alors $x = \wp(t)$

$y = \wp'(t)$ et $\mathcal{J}_2(x) = \int \wp(t)\,dt = -\zeta(t)$

($\wp(t)$ et $\zeta(t)$ sont les fonctions introduites par Weierstrass dans l'étude des fonctions elliptiques) .

Soit encore $x_1 = \wp(t_1)$, $x_2 = \wp(t_2)$

alors :

$$\mathcal{J} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a + bx}{y}\,dx = a\,(t_2 - t_1) - b\left[\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right]$$

Désignons maintenant par $q(t)$ la fonction $at - b\,\zeta(t)$ et posons $t_o = t_2 - t_1$, $y_1 = \wp'(t_1)$, $y_2 = \wp'(t_2)$.

Le théorème d'addition de la fonction $\zeta(t)$ donne :

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \zeta(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(t_1) + \wp'(t_2)}{\wp(t_1) - \wp(t_2)}$$

et $$\mathcal{J} = q(t_o) - \frac{b}{2}\,\frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}$$

Or x_1, x_2, g_2, g_3 étant algébriques, il en est de même de y_1, y_2, et par suite de l'expression $\frac{b}{2}\,\frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}$.

Nous allons démontrer le théorème de Schneider par l'absurde en supposant $q(t_0)$ algébrique. D'après le théorème d'addition pour la fonction $\wp(t)$, on voit alors que $\wp(t_0)$ et par suite $\wp'(t_0)$, est algébrique, de sorte que les sept quantités a, b, g_2, g_3, $\wp(t_0)$, $\wp'(t_0)$, $q(t_0)$ sont toutes algébriques. Ces quantités déterminent un corps algébrique K et nous désignerons par s son degré. Soient $K_1, \ldots K_s$ les s corps conjugués de K. Si μ est un nombre algébrique quelconque de K, μ_h sera le conjugué de μ dans le corps K_h. Nous désignons par la notation $|\mu|$ la plus grande des quantités $|\mu_h|$ $h = 1,2,\ldots,s$. On dit que μ est un entier algébrique s'il est racine d'une équation à coefficients entiers, le coefficient du terme de plus haut degré étant 1. On démontre que la somme et le produit de deux entiers algébriques est encore un entier algébrique, et dans tout corps K de degré s, il existe au moins un système $\beta_1, \ldots, \beta_s$ de s entiers algébriques tels que tout entier algébrique α de K puisse se mettre sous la forme $\alpha = x_1 \beta_1 + \ldots + x_s \beta_s$, les $x_1 \ldots x_s$ étant des entiers rationnels déterminés univoquement par α. Ce système s'appelle une base des entiers de K.

Dans la suite, nous désignerons par c_1, c_2...

c_3 .... des entiers rationnels positifs dépendant uniquement du corps K . Avant de commencer la démonstration du théorème de Schneider, nous allons montrer le lemme suivant

Lemme

Soient $y_k = \sum_{\ell=1}^{2m} \alpha_{k,\ell} x_\ell$ $(k=1,2,\ldots,m)$ m formes à 2m variables x_ℓ , les $\alpha_{k,\ell}$ étant des entiers d'un corps K tels que $|\alpha_{k,\ell}| \leq A$, A étant un entier rationnel positif , Il existe alors une solution des équations $y_k = 0$ $(k=1,2,..,m)$ en entiers x_1 .... x_{2m} non tous nuls du corps K , et l'on a $|x_\ell| \leq c_1 m A$.

Soit d'abord K le corps des nombres rationnels, alors les entiers $\alpha_{k,\ell}$ et x_ℓ sont des entiers ordinaires . Soit g un entier rationnel quelconque et donnons à x_1.... x_{2m} les valeurs $0, \pm 1, \ldots, \pm g$; on obtient ainsi $(2g+1)^{2m}$ systèmes $x_1, \ldots, x_{2m}$ différents . Les nombres $y_1, \ldots, y_m$ correspondants sont entiers et l'on a

$$|y_k| \leq \sum_{\ell=1}^{2m} |\alpha_{k,\ell}| |x_\ell \leq 2m A g$$

Il y a $(4m A g + 1)^m$ systèmes de nombres entiers $y_1, \ldots y_m$ différents, qui vérifient ces inégalités . Si alors $(2g+1)^{2m} > (4m A g + 1)^m$ il y a deux systèmes $x'_1, \ldots x'_{2m}$ et $x''_1, \ldots, x''_{2m}$ différents donnant le même système $y_1, \ldots, y_m$. Les entiers $x_\ell = x'_\ell - x''_\ell$ $(\ell=1,\ldots,2m)$ ne sont pas tous nuls et vérifient le système $0 = \sum_{\ell=1}^{2m} \alpha_{k,\ell} x_\ell$

et de plus $|x_\ell| \leq 2g$. En prenant alors $g = m A$ on a bien $(2m A + 1)^{2m} > (4 m^2 A^2 + 1)^m$ et le lemme est démontré avec la constante $c_1 = 2$.

Dans le cas général, nous désignerons par $\beta_1, \ldots, \beta_s$ une base des entiers du corps K . Alors $x_\ell = x_{\ell,1} \beta_1 + \ldots + x_{\ell,s} \beta_s$ les $x_{\ell,1}; \ldots; x_{\ell,s}$ étant des entiers rationnels . Les quantités $\alpha_{k,\ell} \beta_r$ sont des entiers algébriques de K , on a aussi

$$\alpha_{k,\ell} \beta_r = a_{k,\ell,r,1} \beta_1 + \ldots + a_{k,\ell,r,s} \beta_s$$

les $a_{k,\ell,r,1}; \ldots; a_{k,\ell,r,s}$ étant des entiers rationnels.

On a donc

$$y_k = \sum_{\ell=1}^{2m} \alpha_{k,\ell} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{2m} \sum_{r=1}^{s} \sum_{u=1}^{s} a_{k,\ell,r,u} x_{\ell,r} \beta_u$$

En écrivant alors $y_k = 0$ $(k=1,\ldots,m)$ on obtient le système

$$\sum_{\ell=1}^{2m} \sum_{r=1}^{s} a_{k,\ell,r,u} x_{\ell,r} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ldots,m \\ u=1,\ldots,s \end{pmatrix}$$

de ms équations à 2ms inconnues $x_{\ell,r}$ entiers rationnels . D'après ce que nous venons de voir, on peut déterminer un système de solutions non toutes nulles telles que $|x_{\ell,r}| \leq 2ms A_1$, A_1 étant le plus grand des entiers $|a_{k,\ell,r,u}|$. Or si $\alpha^{(h)}_{k,\ell}$; $\beta^{(h)}_r$ désignent les conjugués de $\alpha_{k,\ell}$; β_r dans le corps K_h , on a aussi :

$$\alpha^{(h)}_{k,\ell} \beta^{(h)}_r = a_{k,\ell,r,1} \beta^{(h)}_1 + \ldots + a_{k,\ell,r,s} \beta^{(h)}_s$$

avec $h = 1, \ldots, s$.

On a ainsi s équations à s inconnues $s_{k,\ell,r,1}$;.... ; $s_{k,\ell,r,s}$ et le déterminant $\|\beta_r^{(h)}\|$ est $\neq 0$.

Les $s_{k,\ell,r,u}$ sont donc des formes linéaires dont les coefficients ne dépendent que de K , des quantités $\alpha_{k,\ell}^{(h)}$ et par suite $A_1 = c_2 A$. Nous avons donc $|x_{\ell,r}| \leq 2ms c_2 A$ et par suite : $|x_\ell| \leq c_3 m A$.

Reprenons les sept nombres a, b, g_2 , g_3 , $\wp(t_0)$, $\wp'(t_0)$, $q(t_0)$ qui déterminent le corps K de degré s . Posons $\ell = 18 s$. Soit n un entier positif divisible par 2ℓ , nous poserons $\frac{n^2}{2\ell} = r$ et $n^2 = h$, de sorte que l'on a $2\ell r = h$. (t_0) est un nombre algébrique fini, d'après sa définition . Comme 0 est un pôle de $\wp(t)$, t_0 n'est pas une période de $\wp(t)$. Si parmi les multiples de t_0 , t_0 , $2t_0$,.... $2\ell t_0$, il y a des périodes, désignons par g l'entier le plus petit tel que $g t_0$ soit période . Toutes les périodes faisant partie des quantités t_0 ..... $2\ell t_0$ sont alors multiples de $g t_0$. Or $g \geq 2$, il y a donc au moins ℓ quantités : $u_1, \ldots, u_\ell$ multiples de t_0 qui ne sont pas périodes et par conséquent sont finies . Désignons par u l'une quelconque de ces valeurs $u_1, \ldots, u_\ell$.

$\wp(u)$, $\wp'(u)$, $q(u)$ sont alors des nombres

de K . $\wp(u)$ et $\wp'(u)$ sont en effet des fonctions rationnelles de $\wp(t_0)$, $\wp'(t_0)$, g_2 , g_3 . D'autre part, la fonction $q(t)$ a le théorème d'addition suivant :

$$q(t_2) - q(t_1) = q(t_2 - t_1) + \frac{b}{2} \frac{\wp'(t_2) + \wp'(t_1)}{\wp(t_2) - \wp(t_1)}$$

qui montre que $q(u)$ est aussi un nombre du corps K .

Considérons les $n^2 = h$ produits $\wp^\lambda(t)\, q^\mu(t)$ ($\lambda, \mu = 0,1,\ldots,n-1$) et désignons les par $f_1(t),\ldots,f_h(t)$; $f(t)$ sera l'un quelconque d'entre eux . Nous allons déterminer h entiers algébriques ρ de K tels que la fonction $\varphi(t) \equiv \rho_1 f_1(t) + \ldots + \rho_h f_h(t)$ ait une racine d'ordre r au moins en chacun des points $t = u_1,\ldots,u_\ell$.

Il faut pour cela que $\varphi^{(\nu)}(t) \equiv \rho_1 f_1^{(\nu)}(t) + \ldots + \rho_h f_h^{(\nu)}(t)$ s'annule pour $t = u$ et $\nu = 0,1,\ldots,r-1$, ($f^{(\nu)}(t)$ désigne la dérivée ν ième de $f(t)$ par rapport à t) . On a r équations homogènes pour déterminer les $h = 2r\ell$ entiers $\rho_1,\ldots,\rho_h$ et on pourra appliquer le lemme .

Les $f^{(\nu)}(u)$ sont des nombres du corps K , mais ne sont pas nécessairement entiers algébriques . En effet, l'on a :

$$f^{(\nu)}(t) = \sum_{a_1+\ldots+a_\lambda+b_1+\ldots+b_\mu=\nu} \frac{\nu!}{a_1!\ldots a_\lambda! b_1!\ldots b_\mu!} \wp^{(a_1)}(t)\ldots\wp^{(a_\lambda)}(t) q^{(b_1)}(t)\ldots q^{(b_\mu)}(t)$$

Or $q'(t) = a + b\wp(t)$, il suffit donc d'avoir les déri-

vées sucessives de $\wp(t)$. Démontrons par récurrence que

$$\wp^{(g)}(t) = \sum_{2\alpha+3\beta+4\gamma=g+2} a_{\alpha,\beta,\gamma}\, \wp^{\alpha}(t)\, \wp'^{\beta}(t)\, \left(\frac{-g_2}{2}\right)^{\gamma}$$

et $\sum |a_{\alpha,\beta,\gamma}| < (5g)^g$. La relation est vraie si $g=0$. Supposons là vraie jusqu'à la valeur g ; en dérivant et en remplaçant $\wp''(t)$ par $\left(6\wp^2(t) - \frac{g_2}{2}\right)$ on obtient :

$$\wp^{(g+1)}(t) = \sum a_{\alpha,\beta,\gamma} \left(-\frac{g_2}{2}\right)^{\gamma} \left[\alpha \wp^{\alpha-1}(t) \wp'^{\beta+1}(t) + \beta \wp^{\alpha}(t) \wp'^{\beta-1}(t) \left(6\wp^2(t) - \frac{g_2}{2}\right)\right]$$

$$= \sum a_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} \left(-\frac{g_2}{2}\right)^{\gamma_1} \wp^{\alpha_1}(t)\, \wp'^{\beta_1}(t)$$

avec $2\alpha_1 + 3\beta_1 + 4\gamma_1 = 2\alpha + 3\beta + 4\beta + 1 = (g+1) + 2$

et $\sum |a_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}| \leq \sum |a_{\alpha,\beta,\gamma}\, (\alpha+6\beta+\beta)$

$$< \frac{7}{3}(2\alpha+3\beta+4\gamma) \sum |a_{\alpha,\beta,\gamma}| \leq 5(g+1)(5g)^g < \left[5(g+1)\right]^{g+1}$$

Cette formule montre que $f^{(v)}(u)$ est un nombre algébrique du corps K .

D'autre part, si c_2 est un entier rationnel positif tel que $c_2 s$, $c_2 b$, $c_2 \frac{g_2}{2}$, $c_2 \wp(u)$, $c_2 \wp'(u)$, $c_2 q(u)$ soient tous entiers algébriques du corps K $(u=u_1 .. .. u_\ell)$, le nombre $c_2^{g+1}\, \wp^{(g)}(u)$ est un entier du corps

K , en effet $\alpha+\beta+\gamma \leq g+1$. De même le nombre $c_2^{g+1} q^{(g)}(u)$ sera un entier du corps K . Le nombre

$$f^{(\nu)}(u)\, c_2^{a_1+1+..+a_\lambda+1+b_1+1+..+b_\mu+1}$$

est donc entier algébrique du corps K .

Or $a_1+1+..+b_\mu+1 = \nu+\lambda+\mu < \nu+2n$

donc $c_2^{\nu+2n} f^{(\nu)}(u)$ est entier du corps K . D'autre part les nombres $f(u)$, $f'(u)$, $\frac{g_2}{2}$, étant donnés, on peut donc écrire $\left|f^{(g)}(u)\right| \leq (5g)^g c_3^g$, car $\sum |a_{\alpha,\beta,\gamma}| < (5g)^g$ et $\alpha+\beta+\gamma \leq g+1$, et de même $\left|q^{(g)}(u)\right| \leq (5g)^g c_3^g$

et par suite :

$$\left|f^{(\nu)}(u)\right| \leq (\lambda+\mu)^\nu (5\nu)^\nu c_3^{\nu+2n}$$

en effet $\sum \frac{\nu!}{a_1!..b_\mu!} = (\lambda+\mu)^\nu$ et $g \leq \nu$

De même on a :

$$\left|c_2^{\nu+2n} f^{(\nu)}(u)\right| \leq (c_4 r)^{\frac{3}{2}r}$$

en effet $\nu < r$ et $n = \sqrt{2lr}$

En multipliant alors les fonctions $\varphi^{(\nu)}(t)$ par $c_2^{\nu+2n}$ on pourra appliquer le lemme et on aura des entiers $\rho_1, \ldots, \rho_h$ tels que :

$$|\rho| \leq c_1 r l (c_4 r)^{\frac{3}{2}r}$$

Les fonctions $\varphi(t)$ ainsi déterminées

ne peuvent pas être identiquement nulles, sinon on aurait une relation algébrique entre $\wp(t)$ et $q(t)$ ce qui est impossible, $q(t)$ n'étant pas une fonction doublement périodique .

Nous allons maintenant démontrer à l'aide de l'intégrale de Cauchy, que l'on peut choisir n , c'est-à-dire aussi r , assez grand pour que , si $\varphi(t)$ admet la racine u avec l'ordre de multiplicité $\nu \geq r$, elle admette cette même racine avec l'ordre $\nu + 1$. Ceci entrainera que la fonction $\varphi(t)$ est identiquement nulle, d'où la contradiction cherchée, qui ne peut être levée qu'en faisant l'hypothèse que l'une au moins des sept quantités a, b, g_2. g_3. $\wp(t_0)$. $\wp'(t_0)$. $q(t_0)$ est transcendante .

Nous supposerons donc dans la suite $\nu \geq r$.

Comme $\varphi^{(\nu)}(u) = \rho_1 f_1^{(\nu)}(u) + .. + \rho_h f_h^{(\nu)}(u)$

les limitations précédentes nous donnent :

$$\left|\varphi^{(\nu)}(u)\right| \leq h\, c_1\, r\, l\, (c_4 r)^{\frac{3}{2}r}\, (2n)^{\nu}\, (5\nu)^{\nu}\, c_3^{\nu+2n} \leq c_5\, \nu^{3\nu}$$

en effet $r \leq \nu$ et $h = n^2 = 2\,l\,r \leq 2\,l\,\nu$. On a de même :

$$\left|c_2^{\nu+2n}\, \varphi^{(\nu)}(u)\right| \leq c_6\, \nu^{3\nu}$$

Soit alors C la courbe fermée suivante : on considère dans le plan des t complexes, le cercle

sur lequel $|t| = \nu^{\frac{1}{6}}$. Soit d'autre part, σ le module de la plus petite période de $\varphi(t)$ et construisons autour de chaque pôle de $\varphi(t)$ comme centre un cercle de rayon $\frac{\sigma}{3}$ Ces cercles γ seront deux à deux sans point commun . C sera la courbe formée par les arcs de Γ extérieurs aux cercles γ , complétée chaque fois par le plus petit des deux arcs découpés par Γ dans un cercle γ . C est tout entière dans la région $\nu^{\frac{1}{6}} - \frac{2}{3}\sigma \leq |t| \leq \nu^{\frac{1}{6}} + \frac{2}{3}\sigma$ sa longueur est inférieure à $\pi . 2\pi \nu^{\frac{1}{6}}$ et la distance des points de C aux pôles de $\varphi(t)$ est supérieure ou égale à $\frac{\sigma}{3}$. De plus $\varphi(t)$ étant périodique, sur toute la courbe C , on aura $|\varphi(t)| < c_7$, et comme $q'(t) = a + b\,\varphi(t)$, on a aussi sur C : $|q(t)| < c_8 \nu^{\frac{1}{6}}$ Enfin, le nombre des pôles α de $\varphi(t)$ intérieurs à C est inférieur à $c_9 \nu^{\frac{1}{3}}$.

Désignons par $Q(t)$ et $R(t)$ les polynômes suivants : $Q(t) = \prod_{u_k \neq u} (t - u_k)^{\nu}$, le produit étant étendu à toutes les valeurs $u_1 , \ldots , u_h$, sauf à l'une d'entre elles u . $R(t) = \prod (t - \alpha)^{3n}$, α prenant toutes les valeurs intérieures à C pour lesquelles $\varphi(t)$ a un pôle . La fonction :

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)\ R(t)}{(t-u)^{\nu}\ q(t)}$$

est alors holomorphe dans C , si nous supposons n assez grand pour que tout les points $u_1, \ldots, u_\ell$ soient intérieurs à C . En effet $f(t) = \varphi^{\lambda}(t)\, q^{\mu}(t)$ a pour $t = \alpha$ un pôle d'ordre $2\lambda + \mu < 3n$, donc $\varphi(t)$ a pour $t = \alpha$ un pôle d'ordre inférieur à $3n$. D'autre part, pour $t = u_1, \ldots, u_k$, $\varphi(t)$ a une racine d'ordre ν . L'intégrale de Cauchy donne

$$\psi(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\varphi(t)\, dt}{t-u}$$

et par suite

$$|\psi(u)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \pi \cdot 2\pi\, \nu^{\frac{1}{6}} \max_C \left| \frac{\psi(t)}{t-u} \right|$$

Or sur C :

$$|\varphi(t)| \leq \lceil \rho \rceil\, c_7^{\lambda} (c_8 \nu^{\frac{1}{6}})^{\mu} < 2\ell\nu\, c_1 \nu^{\ell} (c_4 \nu)^{\frac{3}{2}\nu}\, c_7^{n} (c_8 \nu^{\frac{1}{6}})^{n}$$

$$|R(t)| \leq (c_{10} \nu^{\frac{1}{6}})^{3nc_9 \nu^{\frac{1}{3}}}$$

$$|(t-u)^{\nu+1}\, q(t)| \geq \left(\frac{\nu^{\frac{1}{6}}}{2} \right)^{\ell\nu+1}$$

si nous supposons n assez grand pour que la distance de C au plus proche des points $u_1, \ldots, u_\ell$ soit plus grande que la moitié du rayon $\nu^{\frac{1}{6}}$ de Γ . En tenant alors compte de ce que $n \leq \sqrt{2\ell\nu}$ il vient :

$$|\psi(u)| \leq c_{11}^{\nu}\, \nu^{\frac{3}{2}\nu - \frac{\ell}{6}\nu}$$

Or en développant $\varphi(t)$ en série de Taylor autour de $t = u$ qui est racine d'ordre ν, on a :

$$\varphi(t) = \frac{(t-u)^{\nu}}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(t) + \ldots\ldots$$

donc

$$\psi(t) = \frac{R(t)}{Q(t)}\,\frac{\varphi^{(\nu)}(t)}{\nu!} + (t-u)\,[\ldots\ldots]$$

et

$$\psi(u) = \frac{R(u)}{Q(u)}\,\frac{\varphi^{(\nu)}(u)}{\nu!}$$

d'où

$$|\varphi^{(\nu)}(u)| \leq c_{11}^{\nu}\, \nu^{(\frac{3}{2} - \frac{\ell}{6})\nu}\,(\nu!)\,\frac{Q(u)}{R(u)}$$

Mais $\nu! \leq \nu^{\nu}$; $|Q(u)| \leq c_{12}^{\nu}$ car les $u_1, \ldots, u_\ell$ sont des constantes ; et $|R(u)| \geq c_{13}^{3n}$ car il n'y a qu'un nombre borné de pôles α dans le voisinage de la valeur u.

Nous avons donc :

$$|\varphi^{(\nu)}(u)| \leq c_{14}^{\nu}\, \nu^{(\frac{5}{2} - \frac{\ell}{6})\nu}$$

et par suite l'entier algébrique $c_2^{\nu+2n}\,\varphi^{(\nu)}(u)$ est tel que :

$$|c_2^{\nu+2n}\varphi^{(\nu)}(u)| \leq c_{15}^{\nu}\, \nu^{(\frac{5}{2} - \frac{\ell}{6})\nu}$$

En combinant cette inégalité avec celle obtenue précédemment pour les conjugués de cet entier, on obtient

$$|N(c_2^{\nu+2n}\varphi^{(\nu)}(u))| \leq c_{15}^{\nu}\, \nu^{(\frac{5}{2} - \frac{\ell}{6})\nu}\,(c_6 \nu^{3\nu})^{s-1} \leq c_{16}^{\nu}\, \nu^{-\frac{\nu}{2}}$$

car $\ell = 18\,s$, $N(a)$ désignant la norme du nombre a c'est-à-dire le produit de a par tous ses conjugués . La norme d'un entier algébrique est un entier ordinaire , qui ne peut être nul que si le nombre algébrique l'est lui-même . Or si l'on choisit n assez grand pour que $r > c_{16}^2$ l'inégalité obtenue montre que pour tout $\nu \geq r$ on a $c_{16}^{\nu}\, \nu^{-\frac{\nu}{2}} < 1$, donc $\varphi^{(\nu)}(u) = 0$, d'où la contradiction annoncée .

En particularisant les valeurs des constantes dans l'intégrale étudiée, on obtient divers résultats . Prenons par exemple $s = 2$, $b = 0$, $t_0 = \frac{\omega}{2}$, ω étant une période de la fonction $\wp(t)$ dont les invariants g_2 g_3 sont algébriques . $\frac{\omega}{2}$ étant supposé non période, $\wp(\frac{\omega}{2})$ est racine de l'équation $x^3 - g_2 x - g_3 = 0$, donc est algébrique, et $\wp'(\frac{\omega}{2}) = 0$. Il en résulte que $q(\frac{\omega}{2}) = \omega$ est transcendant .

La méthode précédente permet également de démontrer le théorème suivant : Soient $\wp(t)$ et $\overline{\wp}(t)$ les fonctions de Weierstrass correspondant aux invariants algébriques g_2 . g_3 et $\overline{g}_2$. $\overline{g}_3$; de plus, supposons $\wp(t)$ et $\overline{\wp}(t)$ algébriquement indépendants (c'est-à-dire il n'existe aucune relation algébrique à coefficients constants entre $\wp(t)$ et $\overline{\wp}(t)$ qui soit identiquement

nulle) . Si alors t_0 est une valeur quelconque , non période de $\wp(t)$, ni de $\overline{\wp}(t)$, l'une au moins des quantités $\wp(t_0)$ et $\overline{\wp}(t_0)$ est transcendante .

On fera jouer, dans la démonstration précédente, à la fonction $\overline{\wp}(t)$ le rôle de $q(t)$. Considérons alors la fonction modulaire :

$$J(z) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2}$$

g_2 , g_3 étant les invariants d'une fonction $\wp(t)$ pour $z = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, ω_1 et ω_2 étant deux périodes de $\wp(t)$.

Si $z = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ est algébrique, $J(z)$ est algébrique si z est une irrationnalité du 2ème degré , et J(z) est transcendant si le degré de z dépasse 2 . En effet, soit j un nombre algébrique quelconque, posons $g_2 = 1$. $g_3 = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{j}}{27}}$. g_2 et g_3 sont donc algébriques . Si ω_1 et ω_2 sont deux périodes de la fonction $\wp(t)$ correspondante, on aura $J(z) = j$. Supposons $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ non irrationnel du 2ème degré et soit $\overline{\wp}(t) = \wp(\frac{\omega_2}{\omega_1} t)$. $\wp(t)$ et $\overline{\wp}(t)$ sont algébriquement indépendants, car $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ n'est ni rationnel, ni irrationnel du 2ème degré, et on a

$$\overline{g}_2 = (\frac{\omega_2}{\omega_1})^4 g_2 \qquad \overline{g}_3 = (\frac{\omega_2}{\omega_1})^6 g_3$$

Donc si $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est algébrique, il en est de même pour $\overline{g}_2$ et $\overline{g}_3$. Prenons $t_0 = \frac{\omega_1}{2}$, alors $\wp(t_0)$ est algébrique et $\overline{\wp}(t_0) = \wp(\frac{\omega_2}{2})$ l'est aussi, il y a donc contradiction qui montre que $\frac{\omega_2}{\omega_1} = z$ est transcendant.

On retrouverait aussi par la même méthode les résultats de Hermite et de Lindemann. a étant un nombre algébrique, si e^a était également algébrique, il en serait ainsi de e^{at} et de toutes les dérivées de e^{at} pour $t = 1, 2, \ldots, n, \ldots$; et toutes ces valeurs appartiendraient au corps contenant a et e^a. En prenant les fonctions t et e^{at} au lieu de $\wp(t)$ et q(t) on obtient la contradiction cherchée.

Fonctions de BESSEL (8)

Dans la méthode précédente la propriété caractéristique est le théorème d'addition de la fonction $\wp(t)$. Dans les recherches suivantes, on considère des fonctions entières E(x) vérifiant une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en x, le développement de $E(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1} + \ldots + c_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$ ayant les trois propriétés suivantes :

1°) Les nombres $c_0, c_1 \ldots, c_n$ sont rationnels

2°) Le plus petit commun dénominateur de $c_0, \ldots c_n$ reste en valeur absolue inférieur à $(n!)^{\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$.

3°) Le numérateur de c_n reste en valeur absolue inférieur à $(n!)^{\varepsilon}$.

e^x est une fonction $E(x)$. De même la fonction

$$\int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} e^{tx} dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda(\lambda+1)} + \ldots + \frac{x^n}{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} + \ldots$$

pour λ rationnel et différent d'un entier négatif ou nul.

Il en est encore ainsi de la fonction :

$$\frac{\int_0^1 t^{K-1}(1-t)^{\lambda-K-1} e^{tx} dt}{\int_0^1 t^{K-1}(1-t)^{\lambda-K-1} dt} = 1 + \frac{K}{\lambda}\frac{x}{1!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{K(K+1)\ldots(K+n-1)}{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)} \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

pour K et λ rationnels et non entiers négatif ou nul.

Enfin la fonction :

$$\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda} B_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

pour λ rationnel non entier négatif, est encore une fonction $E(x)$. $B_\lambda(x)$ est ici la fonction de Bessel vérifiant l'équation différentielle : $B_\lambda''(x) + \frac{1}{x} B_\lambda'(x) + (1 - \frac{\lambda^2}{x^2}) B_\lambda(x) = 0$.

Nous allons donner l'idée générale de la mé-

thode dans le cas particulier de la fonction

$$B(x) = B_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

et l'appliquer au nombre $b = \frac{B(a)}{B'(a)}$, a étant algébrique .

Formons les h produits $f_1(x) = B'^{h-1}(x)$,...

... $f_k(x) = B^{k-1}(x)\, B'^{h-k}(x)$, ..., $f_h(x) = B^{h-1}(x)$.

Ces produits vérifient un système différentiel du premier ordre linéaire . En effet

$$f'_k(x) = (k-1)\, B^{k-2} B'^{h-k+1} + (h-k)\, B^{k-1} B'^{h-k-1} \left(-B - \frac{1}{x} B'\right)$$

donc :

$$f'_k(x) = (k-1)\, f_{k-1}(x) - (h-k)\, f_{k+1}(x) - \frac{h-k}{x} f_k(x)$$

Soient alors $P_1(x),\ldots,P_h(x)$, h polynômes en x à coefficients entiers , posons :

$$\underline{L(x) = P_1(x)\, f_1(x) + \ldots + P_h(x)\, f_h(x)}$$

Alors :

$$L'(x) = \sum_{k=1}^{h} \left[P'_k(x)\, f_k(x) + P(x)\, f'_k(x)\right]$$

et par suite

$$x\, L'(x) = Q_1(x)\, f_1(x) + \ldots + Q_h(x)\, f_h(x)$$

les $Q_1(x)$, ..., $Q_h(x)$ étant encore des polynômes en x à coefficients entiers . <u>L'opération $x \frac{d}{dx}$ transforme donc L(x) en une expression du même type , et de plus, si L(x)</u>

a une racine d'ordre r pour x=0 , il en sera de même pour l'expression obtenue par l'application de l'opération $x \frac{d}{dx}$.

Supposons alors les polynômes $P_1(x)$, ... $P_h(x)$ de degré $2n-1$, les coefficients étant des inconnues $L(x)$ est alors une forme linéaire homogène en ces $2nh$ inconnues . Cherchons à les déterminer de façon que le développement de $L(x)$ en série de Taylor commence par un terme en x^{hn} ; c'est-à-dire que les coefficients de x^0 , ... x^{hn-1} sont nuls, ou encore que $L(x)$ a pour $x = 0$ une racine d'ordre hn . Nous aurons donc nh équations linéaires et homogènes pour déterminer les coefficients de $P_1(x)$,... $P_h(x)$. Le développement de $B(x)$ ayant des coefficients rationnels, ces équations auront des coefficients rationnels. En calculant des bornes pour les plus petits communs dénominateurs et pour les numérateurs de ces coefficients , on pourra appliquer le lemme qui fournira en même temps une borne supérieure pour les coefficients cherchés des polynômes $P_1(x)$,..... $P_h(x)$.

Si alors le nombre $b = \frac{B(a)}{B'(a)}$ est algébrique, a et b déterminent un corps algébrique K . On aura $f_k(a) = B'^{h-1}(a)\, b^{k-1}$, donc le nombre

$$B'^{1-h}(a)\, L(a) = P_1(a) + b\, P_2(a) + \ldots + b^{h-1} P_h(a)$$

est algébrique et appartient à K . En général, ce nombre ne sera pas entier du corps K . Or, soit c un entier rationnel tel que ca et cb soient entiers algébriques . Le nombre $\alpha = e^{2n+h-2} B^{l-h}(a) L(a)$ est alors entier algébrique . En remplaçant L(a) par son développement qui commence par un terme en a^{hn} on peut montrer que le nombre α devient très petit si h et n sont assez grands . En calculant encore des bornes pour les valeurs absolues des conjugués de α , on pourra démontrer que <u>pour h et n suffisamment grands</u> $|N(\alpha)| < 1$, <u>donc $\alpha = 0$ et L(a) = 0</u> .

<u>Si l'on peut alors montrer que l'on peut construire une fonction L(x) qui n'a pas la racine x = a , on aura une contradiction</u> . C'est là la difficulté principale de la démonstration . Le principe de cette démonstration est le suivant :

On calculera les expressions :

$$x^r L^{(r)}(x) = P_{r,1}(x) f_1(x) + \ldots + P_{r,h}(x) f_h(x)$$

où $L^{(r)}(x)$ est la dérivée r ième de L(x) . Les $P_{r,k}(x)$ (k=1,..,h) sont des polynômes en x à coefficients entiers pour la valeur absolue desquels on peut calculer des bornes supérieures . Soit alors $\Delta(x) = \|P_{r_\ell,k}(x)\|$ le déterminant formé par les coefficients $P_{r_\ell,k}(x)$ (k=1,...,h) des fonctions f (x) dans h expressions $x^{r_\ell} L^{(r_\ell)}(x)$

($\ell = 1, \ldots, h$) différentes . $\Delta(x)$ est un polynôme en x et on peut montrer que l'on peut trouver des r_ℓ tels que $\Delta(a) \neq 0$? Il y a donc au moins une expression $x^{r_\ell} L(r_\ell)(x)$ qui n'est pas nulle pour $x = a$ et c'est à cette expression que l'on fera jouer le rôle de $L(x)$ de tout à l'heure .

On déduit de ce théorème que pour tout $x \neq 0$ algébrique, la fraction continue :

$$x + \frac{1}{\lfloor 2x} + \frac{1}{\lfloor 3x} + \ldots + \frac{1}{\lfloor nx} + \ldots = -i \frac{B(\frac{2i}{x})}{B'(\frac{2i}{x})}$$

est transcendante .

Pour étudier la transcendance de $B(a)$ il faut généraliser le problème . On montrera que les nombres $B(a)$ et $B'(a)$ sont algébriquement indépendants , c'est-à-dire qu'il n'existe aucune équation à coefficients rationnels entre $B(a)$ et $B'(a)$. En particulier $B(a)$ est transcendant .

BIBLIOGRAPHIE

(1) CANTOR — J.Crelle 77 (1874) p.258

(2) LIOUVILLE — C.R.Ac.Sc.Paris 18 (1844) p.883 et p.910

J.Liouville 16 (1851) p.133

(3) HERMITE — Oeuvres III p.135 . p.146 . p.150

Rep.Brit.Assoc.Advanc.Sc.Trans.43th meeting 1873 . p.22

J.Crelle 76 (1873) p.342

C.R. Ac.Sc.Paris 77 (1873) p.18, 74, 226, 285

(4) LINDEMANN — Math.Ann.20(1882) p.213

Sitz.Ber. Pr.Ak.Wiss.Berlin (1882) p.679

C.R. Ac.Sc.Paris 95 (1882) p.72

(5) HILBERT — Nach.Ges.Wiss.Göttingen (1900) p.253

(6) GELFOND — C.R. Ac.Sc.U.R.S.S. (1934)-II p.1

C.R. Ac.Sc.Paris 199(1934) p.259

(7) SCHNEIDER — J.Crelle 172 (1934) p.65

(8) SIEGEL — Abh.Ak.Wiss.Berlin (1929) N°1

(9) SCHNEIDER — Math.Ann. 113 (1936) p.1