

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

C. CHEVALLEY

Les représentations des algèbres de Lie

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 10, p. 1-23

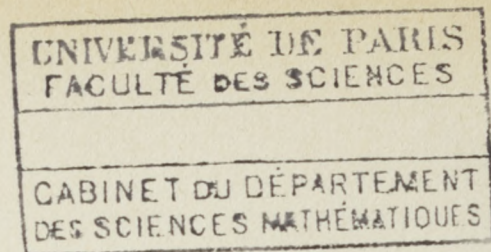
http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A14_0

© École normale supérieure, Paris, 1936-1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



IV. - K.

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

Quatrième année 1936-37

Les TRAVAUX de M. Elie CARTAN

Les représentations des algèbres de Lie

Exposé fait par M. C. CHEVALLEY, le lundi 10 Mai 1937

Exemplaire n° 3

On désignera dans ce qui suit par k un corps algébrique fermé de caractéristique 0 et par $\mathcal{A}$ une algèbre de Lie sur k .

Rappelons qu'on appelle représentation de $\mathcal{A}$ une homomorphie de $\mathcal{A}$ avec une algèbre de Lie composée de transformations linéaires d'un espace linéaire $\mathcal{M}$ par rapport à k .

$\mathcal{M}$ s'appelle espace de représentation ; sa dimension s'appelle le degré de la représentation.

$\vec{e}$ étant un élément de $\mathcal{M}$, nous désignerons en général par $X \vec{e}$ l'élément qui s'en déduit par application de la transformation linéaire qui correspond à l'élément X de $\mathcal{A}$; autrement dit, nous donnons le même nom aux éléments de $\mathcal{A}$ et aux transformations linéaires qui leur correspondent.

Si on choisit dans $\mathcal{M}$ une base minima, les transformations linéaires de $\mathcal{M}$ se représentent par des matrices et on obtient une représentation de $\mathcal{A}$ par des matrices.

L'ensemble $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{A}$ qui sont représentés par la transformation 0 constitue une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}$, ou tout élément de $\mathcal{B}$, ou toute partie de $\mathcal{B}$, est annulé par la représentation.

Si $\mathcal{B} = \{0\}$, la représentation est dite fidèle. Dans le cas général, la représentation fournit une représen-

tation fidèle de $A/\mathfrak{B}$.

Un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est dit invariant si, pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a $X\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. Il en est notamment ainsi si pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a $X\mathcal{N} = \{0\}$, auquel cas on dit que $\mathcal{N}$ ou tout élément de $\mathcal{N}$, est annulé par la représentation .

L'espace de représentation $\mathcal{M}$ (ou la représentation elle-même) est dite irréductible s'il n'y a pas d'autre sous-espaces invariants que $\{0\}$ et $\mathcal{M}$.

$\mathcal{N}$ étant un sous-espace invariant, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ sont évidemment de nouveaux espaces de représentation . On démontre qu'on peut toujours choisir une chaîne $\mathcal{N}_0 = \{0\} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2 \subset \dots \subset \mathcal{N}_h = \mathcal{M}$ de sous-espaces invariants tels que les espaces $\mathcal{N}_{i+1} / \mathcal{N}_i$ soient irréductibles . Le théorème de Jordan-Holder s'applique à ces chaînes : deux d'entre elles ont la même longueur h et les espaces quotients $\mathcal{N}_{i+1} / \mathcal{N}_i$ qu'elles fournissent sont les mêmes, à l'ordre près .

L'espace de représentation $\mathcal{M}$ (ou la représentation elle-même) est dite complètement réductible si $\mathcal{M}$ est une somme directe de sous-espaces invariants irréductibles . Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'à tout sous-espace invariant $\mathcal{N}$ on puisse en faire correspondre un autre $\mathcal{N}'$ tel

que $\mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$.

Théorème 1

Soit $\mathcal{K}$ la plus grande sous algèbre invariante résoluble de $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{A}'$ l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}$.

Toute représentation irréductible de $\mathcal{A}$ annule $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}'$.

En effet, $\mathcal{K}$ étant résoluble, il existe dans $\mathcal{M}$ un vecteur $\vec{e}_0$ tel que, pour tout $H \in \mathcal{K}$, on ait $H \vec{e}_0 = \lambda_H \vec{e}_0$ où λ_H est une fonction de H à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{M}$ l'espace engendré par les vecteurs $\vec{e}$ jouissant de la propriété suivante : il existe pour chacun d'eux un entier N tel que

$$(H - \lambda_H) N \vec{e} = 0$$

On voit facilement que $\mathcal{M}$ est invariant : donc $\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Si d est la dimension de $\mathcal{M}$, la trace de la transformation linéaire fournie par H est donc $d \lambda_H$. Or cette trace est nulle si $H \in \mathcal{A}'$; on a, dans ce cas, $\lambda_H = 0$. L'espace $\mathcal{M}_1$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui sont annulés par tous les éléments de $\mathcal{A}'$ étant évidemment invariant et contenant $\vec{e}_0$, on a $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, ce qui démontre le théorème.

Il en résulte que, s'il existe une représentation fidèle complètement réductible de $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}' = \{0\}$; $\mathcal{A}$ est somme directe de $\mathcal{A}'$, qui est semi-simple, et d'une

algèbre commutative, dont les éléments sont d'ailleurs représentés par des multiples de la transformation unité (Cartan). Ceci démontre, en particulier, le théorème de Jacobson énoncé dans l'exposé précédent.

Inversement, une algèbre qui est somme directe d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre commutative admet évidemment des représentations fidèles complètement réductibles. Mais en général, elle admet aussi des représentations non complètement réductibles.

Par contre, nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.

Toute représentation d'une algèbre semi-simple est complètement réductible.

$\mathcal{M}$ étant un espace de représentation de $\mathcal{A}$, choisissons une base minima $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ de $\mathcal{A}$, et formons le déterminant $|S_{\mathcal{M}}(X_i X_j)|$, où $S_{\mathcal{M}}$ représente la trace de la transformation linéaire de $\mathcal{M}$. Ce déterminant s'appelle le discriminant de la représentation.

Lemme 1.

Le discriminant d'une représentation irréductible $\neq 0$ d'une algèbre simple est $\neq 0$.

Si ce discriminant était nul, il y aurait un $X \neq 0$

tel que, pour tout $Y \in \mathcal{A}$, on ait $S_{\mathcal{M}}(XY) = 0$. Les X jouissant de cette propriété formeraient une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$, donc égale à $\mathcal{A}$. Il nous suffit donc de démontrer qu'il existe un X et un Y tels que $S_{\mathcal{M}}(XY) \neq 0$.

Nous mettrons l'algèbre $\mathcal{A}$ sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maximale $\mathcal{C}$. Soient $\alpha, -\alpha, \dots$ les racines $\neq 0$ et soit E_{α} un élément appartenant à la racine α .

Nous dirons qu'un vecteur $\vec{e}$ possède un poids Λ s'il existe une forme linéaire $\Lambda = \Lambda(H)$ définie sur $\mathcal{C}$, à valeurs dans k , telle que, pour tout $H \in \mathcal{C}$ on ait $H \vec{e} = \Lambda(H) \vec{e}$. Il existe au moins un vecteur $\neq 0$ qui possède un poids. De plus, si $\vec{e}$ possède le poids Λ , $E_{\alpha} \vec{e}$ possède le poids $\Lambda + \alpha$. Il en résulte que l'espace $\mathcal{M}$ est engendré par des vecteurs qui ont des poids.

$\vec{e}$ étant un vecteur différent de 0 ayant un poids on peut évidemment l'indériter dans une suite finie $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_h$ de vecteurs $\neq 0$ tels que :

$$1) \quad E_{-\alpha} \vec{e}_0 = 0$$

$$2) \quad \vec{e}_{i+1} = E_{\alpha} \vec{e}_i \quad (i=0, 1, \dots, h-1)$$

$$3) \quad E_{\alpha} \vec{e}_h = 0$$

On voit facilement par récurrence sur i que

$$E_{-\alpha} E_{\alpha} \vec{e}_i = -\frac{i+1}{2} \left(\Lambda_{\alpha} + \frac{i}{2} \alpha_{\alpha} \right) \vec{e}_i$$

où Λ est le poids de $\vec{e}_0$ et où Λ_α et α_α représentent les valeurs prises par Λ et par α pour $H=H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$
 D'où

$$\Lambda_\alpha + \frac{h}{2} \alpha_\alpha = 0$$

et

$$E_{-\alpha} E_\alpha \vec{e} = \frac{(a+1)(h-a)}{2} \alpha_\alpha \vec{e} \quad \text{si } \vec{e} = \vec{e}_a$$

Or $\frac{(a+1)(h-a)}{2}$ est un nombre rationnel ≥ 0 , qui n'est nul que si $h = a$, d'où $E_\alpha \vec{e} = 0$. Comme $\alpha_\alpha \neq 0$, et qu'il existe au moins un $\vec{e}$ tel que $E_\alpha \vec{e} \neq 0$, on a
 $\sum_{\mathcal{M}} (E_{-\alpha} E_\alpha) \neq 0$, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2 (de Whitehead)

$\mathcal{M}$ étant un espace de représentation d'une algèbre simple, faisons correspondre à chaque $X \in \mathcal{A}$ un élément $e_X \in \mathcal{M}$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un vecteur $\vec{e}$ tel que, pour tout X , $\vec{e}_X = X \vec{e}$ sont que :

- 1) la correspondance $X \rightarrow \vec{e}_X$ soit linéaire
- 2) on ait

$$\vec{e}_{[XY]} = X \vec{e}_Y - Y \vec{e}_X$$

Les conditions sont évidemment nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, envisageons plusieurs cas :

1) La représentation donnée par $\mathcal{M}$ est la représentation 0. Dans ce cas, on a $\vec{\sigma}_{[XY]} = 0$; étant simple, donc égale à sa dérivée, on a $\vec{\sigma}_X = 0$, et $\vec{\sigma} = 0$ est une solution.

2) La représentation donnée par $\mathcal{M}$ est irréductible et $\neq 0$. Soit d son degré. Prenons une base minima $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ de $\mathcal{A}$. Le discriminant $|s_{\mathcal{M}}(X_i X_j)|$ étant $\neq 0$, il existe une base "complémentaire" $(X^1, X^2, \dots, X^r)$ telle que l'on ait

$$s_{\mathcal{M}}(X_i X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par suite, X étant un élément quelconque de $\mathcal{A}$, on a

$$X = \sum_{i=1}^n s_{\mathcal{M}}(X X^i) X_i$$

Posons $U = \sum_{i=1}^r X_i X^i$. X étant un élément quelconque de $\mathcal{A}$, on a

$$[X, U] = \sum [X, X_i] X^i + \sum X_i [X, X^i] =$$

$$\sum_{i,j} s_{\mathcal{M}}([X, X_i] X^j) X_j X^i + \sum_{i,j} s_{\mathcal{M}}([X, X^i] X_j) X_i X^j = 0$$

comme il résulte tout de suite des propriétés des traces.

D'autre part, on a $s_{\mathcal{M}}(U) = r \neq 0$; il en résulte, l'espace étant irréductible, que $U = \frac{r}{d} 1$, où 1 re-

présente la transformation linéaire unité . On voit alors tout de suite que $\vec{e} = \sum x^i \vec{e}_{x_i}$ donne la solution cherchée .

3) Dans le cas général, nous procéderons par récurrence sur la dimension d de $\mathcal{M}$. Le lemme étant déjà démontré pour les représentations de degrés $< d$, supposons l'espace $\mathcal{M}$ réductible ; il admet un sous-espace invariant $\mathcal{N}$ de dimension $d' < d$; $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ est espace de représentation de dimension $d - d' < d$. Il existe donc un vecteur $\vec{e}'$ tel que

$$\vec{e}_X = X \vec{e}' \pmod{\mathcal{N}}$$

Posons $\vec{e}_X' = \vec{e}_X - X \vec{e}'$; les vecteurs $\vec{e}_X'$ de $\mathcal{N}$ satisfont encore aux conditions 1), 2), du lemme . Il existe donc dans $\mathcal{N}$ un vecteur $\vec{e}''$ tel que $\vec{e}_X' = X \vec{e}''$. Le vecteur $\vec{e} = \vec{e}' + \vec{e}''$ fournit une solution .

Le lemme de Whitehead est encore valable pour les algèbres semi-simples $\mathcal{A}$. Nous le démontrerons par récurrence sur l'ordre r de $\mathcal{A}$. Supposons-le vrai pour toutes les algèbres semi-simples d'ordres $< r$. Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation de $\mathcal{A}$. Choisissons dans $\mathcal{A}$ une sous-algèbre invariante simple $\mathcal{A}_1$. Il existe une algèbre invariante semi-simple $\mathcal{A}_2$ telle que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Il existe dans $\mathcal{M}$ un vecteur $\vec{e}$ tel que $\vec{e}_{X_1} = X_1 \vec{e}$ si $X_1 \in \mathcal{A}_1$; si nous posons $\vec{e}_X' = \vec{e}_X - X \vec{e}$, nous ob-

tenons de nouveaux vecteurs satisfaisant encore aux conditions du lemme. De plus, si $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, on a $[x_1 x_2] = 0$, d'où $x_1 \vec{e}_{x_2} = 0$; les $\vec{e}_{x_2}$ sont dans le sous-espace invariant $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ qui est annulé par A_1 . Or, $\mathcal{N}$ est espace de représentation de A_2 ; il existe donc un $\vec{e}' \in \mathcal{N}$ tel que $\vec{e}_{x_2} = x_2 \vec{e}'$. Le vecteur $\vec{e} + \vec{e}'$ fournit alors une solution du problème.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.

Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation de l'algèbre semi-simple $\mathcal{A}$, et soit $\mathcal{N}$ un sous-espace invariant. Déterminons un espace linéaire $\mathcal{N}'$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}'$, $\vec{e}$ étant un élément de $\mathcal{M}$, posons $X \vec{e} = U_X \vec{e} + V_X \vec{e}$ où $U_X \vec{e} \in \mathcal{N}$, $V_X \vec{e} \in \mathcal{N}'$. U_X et V_X sont des applications linéaires de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ et dans $\mathcal{N}'$.

On a $V_X U_X = 0$ et

$$U_{[X,Y]} = U_X U_Y - U_Y U_X + U_X V_Y - U_Y V_X$$

$$V_{[X,Y]} = X_X V_Y - V_Y V_X$$

Or les applications linéaires U de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ forment elles-mêmes un espace linéaire $\mathcal{U}$; en posant $X(U) = U_X U - U V_X$ on fait correspondre à chaque $X \in \mathcal{A}$ une transformation linéaire de $\mathcal{U}$, et on voit facilement que cette correspondance est une représentation. En vertu des formules qu'on

vient d'écrire , on a

$$U_{[X,Y]} = X(U_Y) - Y(U_X)$$

Par suite , en vertu du lemme de Whitehead, il existe un élément $U_0 \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout X , $U_X = X(U_0)$. On en tire $X(\vec{e} - U_0 \vec{e}) = V_X \vec{e} - U_0(V_X \vec{e})$. Il en résulte que les vecteurs $\vec{e} - U_0 \vec{e}$, pour $\vec{e} \in \mathcal{U}'$, forment un sous-espace invariant $\mathcal{N}''$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{N}''$ ce qui démontre le théorème 2 .

On peut déduire de là une généralisation du lemme 1.

A étant une algèbre simple, soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots$

$\dots \oplus \mathcal{M}_n$ un espace de représentation de $\mathcal{M}$, les $\mathcal{M}_i$ étant des espaces de représentation irréductibles . On a

$S_{\mathcal{M}}(E_{-\alpha} E_{\alpha}) = \sum S_{\mathcal{M}_i}(E_{-\alpha} E_{\alpha}) = \sum p_i \alpha_{\alpha}$, les p_i étant des nombres rationnels ≥ 0 , et p_i n'étant nul

que si $\mathcal{M}_i$ donne la représentation 0 . On en déduit que le discriminant d'une représentation $\neq 0$ d'une algèbre simple est $\neq 0$. On en conclut facilement que :

Le discriminant d'une représentation fidèle d'une algèbre semi-simple est $\neq 0$.

Détermination des représentations irréductibles
d'une algèbre simple

Considérons une algèbre simple $\mathcal{A}$ que nous mettrons sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maxima $\mathcal{C}$. $\alpha, \beta, \dots$ désignant les racines, on peut supposer que les nombres α_α sont rationnels . Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation irréductible . Il résulte de la formule (1) que pour tout poids Λ , les nombres Λ_α sont rationnels . Prenons n racines linéairement indépendantes , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, n étant la dimension de $\mathcal{C}$. Λ pourra être considéré comme une combinaison linéaire $\sum p_i \alpha_i$ de ces racines . En vertu de ce que nous venons de dire, les coefficients p_i sont nécessairement rationnels .

Ceci va nous permettre de définir une notion d'ordre dans l'ensemble fini des poids . Soient $\Lambda = \sum p_i \alpha_i$, $\Lambda' = \sum p'_a \alpha_i$ deux poids . Nous dirons que Λ' est supérieur à Λ si, a étant le plus petit indice tel que $p'_a \neq p_a$, on a $p'_a > p_a$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de poids, il y en aura un, Λ_0 , qui sera plus grand que tous les autres . Il s'appelle le poids dominant .

Ceci posé, M. Cartan a démontré le théorème suivant:

Théorème 3.

Une représentation irréductible est entièrement déterminée (à une isomorphie près) par son poids dominant.

La démonstration s'appuie sur les considérations suivantes : $\mathcal{A}$ étant une algèbre de Lie, prenons-y une base $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ et considérons les X_i comme des variables avec lesquelles on construit des polynômes non-commutatifs $\varphi(X_i)$. Les $c_{i,j,k}$ étant les constantes de structure, considérons l'ensemble linéaire $\mathfrak{u}$ engendré par tous les polynômes de la forme $\theta(X_i X_j - X_j X_i - \sum c_{i,j,k} X_k) \theta'$. Il est clair que tout polynôme φ peut se mettre sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_2 \in \mathfrak{u}$, et où φ_1 est un polynôme dont tous les monômes sont de la forme $a X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_m}$, avec $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m$.

Si $\mathcal{M}$ est un espace de représentation de $\mathcal{A}$, et si $\vec{e}$ est un vecteur de $\mathcal{M}$, on définit immédiatement le vecteur $\varphi \vec{e}$. On a $\varphi_2 \vec{e} = 0$, si $\varphi_2 \in \mathfrak{u}$, d'où

$$\varphi \vec{e} = \varphi_1 \vec{e}.$$

$\mathcal{A}$ étant supposée semi-simple, et mise sous forme réduite par rapport à une sous-algèbre commutative maximale $\mathcal{C}$ nous rangerons les éléments d'une base minima de $\mathcal{A}$ en mettant d'abord les E_α qui correspondent à des racines

$\alpha < 0$, puis ceux qui correspondent à des $\alpha > 0$; puis les éléments d'une base minima $H_1, H_2, \dots, H_n$ de $\mathcal{C}$. Nous appellerons poids d'un monome la somme des racines qui figurent en indices dans les facteurs de ce monome. Nous dirons qu'un polynome φ est isobare de poids $\bar{\omega}$ si tous ses monomes sont de poids $\bar{\omega}$. Si $\vec{e}$ est un vecteur de poids Λ d'un espace de représentation, $\varphi \vec{e}$ est alors nul ou de poids $\Lambda + \bar{\omega}$. Si on met de la manière indiquée plus haut, φ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_2 \in \mathfrak{u}$, φ_1 et φ_2 sont isobares en même temps que φ et de même poids que lui.

Ceci posé, prenons un espace de représentation $\mathcal{M}$ et un vecteur $\vec{e}_0$ de poids dominant Λ_0 . On a le lemme suivant :

Lemme : φ étant un polynome isobare de poids 0, on a $\varphi \vec{e}_0 = \rho \vec{e}_0$, où ρ est un élément de k qui ne dépend que du polynome φ .

Mettons φ sous la forme $\varphi_1 + \varphi_2$ indiquée plus haut. On a $\varphi \vec{e}_0 = \varphi_1 \vec{e}_0$. Un monome de φ_1 est de la forme $a E_\alpha E_\beta \dots E_\lambda H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_s}$ avec $\alpha + \beta + \dots + \lambda = 0$, $\alpha \leq \beta \leq \dots \leq \lambda$.

Si le monome contient au moins un E_α , on a $\lambda > 0$. Le vecteur $H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_s} \vec{e}_0$ est nul ou de poids Λ_0 ;

$\Lambda_0 + \lambda$ n'étant pas un poids, on a $E_\lambda H_{i_1} H_{i_2} \dots H_{i_s} \vec{e}_0 = 0$

On en conclut que ρ est la valeur prise par φ_1 en y remplaçant les E_α par 0 et les H_i par les nombres $\Lambda_0(H_i)$ ce qui démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.

Soient $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$, deux espaces de représentation irréductibles admettant le même poids dominant Λ_0 . Prenons-y des vecteurs $\vec{e}_0, \vec{e}'_0$ de poids Λ_0 . $\mathcal{M}$ étant irréductible, est évidemment identique à l'ensemble des vecteurs $\varphi \vec{e}_0$.

Considérons tous les polynômes $\overline{\varphi}$ tels que $\overline{\varphi} \vec{e}_0 = 0$.

Les vecteurs $\overline{\varphi} \vec{e}'_0$ forment évidemment un sous-espace invariant $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}'$. Montrons que $\vec{e}'_0 \notin \mathcal{M}'$. En effet,

si on avait $\overline{\varphi} \vec{e}_0 = 0, \overline{\varphi} \vec{e}'_0 = \vec{e}'_0$, les mêmes formules seraient vraies en remplaçant $\overline{\varphi}$ par la somme $\vec{\overline{\varphi}}$ de ceux

de ses monomes qui sont de poids 0. Mais on aurait alors en

vertu du lemme $\vec{\overline{\varphi}} \vec{e}_0 = \rho \vec{e}_0, \vec{\overline{\varphi}} \vec{e}'_0 = \rho \vec{e}'_0$, ce qui

est impossible. $\mathcal{M}'$ étant irréductible, on a $\mathcal{M}' = \{0\}$.

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ jouant des rôles symétriques, on voit que la correspondance $\varphi \vec{e}_0 \longleftrightarrow \varphi \vec{e}'_0$ est une isomorphie de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{M}'$, ce qui démontre le théorème de M. Cartan.

Il résulte de là que la recherche des représentations irréductibles d'une algèbre simple est ramenée aux problèmes suivants : trouver tous les poids dominants possibles - trouver pour chaque poids dominant une représentation irréductible l'admettant. Ces problèmes ont été entièrement

résolus par M. Cartan pour chacun des types d'algèbres simples. Nous nous contenterons de donner quelques indications rapides sur la solution .

Les quantités α_a sont connues dès qu'on connaît la structure de l'algèbre semi-simple . D'autre part, si Λ est un poids dominant et si α est une racine > 0 , on doit avoir, en tenant compte de ce que $\Lambda + \alpha$ n'est plus un poids, $\Lambda_a = \frac{h}{2} \alpha_a$, h étant un entier ≥ 0 . M. Cartan a démontré que les formes linéaires Λ qui satisfont à cette condition sont toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 de n d'entre elles , $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ qu'on peut appeler les poids dominants fondamentaux . Il a également montré que, dans chaque cas, chacun de ces poids dominants fondamentaux est effectivement le poids dominant d'une représentation irréductible qu'il a construite . D'autre part, on peut montrer que :

si Λ et Λ' sont les poids dominants de deux représentations irréductibles , $\Lambda + \Lambda'$ est le poids dominant d'une nouvelle représentation irréductible .

Soient , en effet, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$ des espaces de représentation comportant les poids dominants Λ, Λ' . Prenons des bases minimales $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{U}$, composées de vecteurs ayant des poids , $\vec{e}_1$ étant de poids Λ et $\vec{f}_1$ de

pois Λ' . Posons $X \vec{e}_1 = \sum_{\lambda} a_{1\lambda} (X) \vec{e}_{\lambda}$ et
 $X \vec{f}_j = \sum_{\mu} b_{j\mu} (X) \vec{f}_{\mu}$. Prenons un espace linéaire $\mathcal{L}$ de
dimension mn admettant une base $\vec{g}_{ij}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)
et posons $X \vec{g}_{ij} = \sum_{\lambda\mu} a_{i\lambda} b_{j\mu} \vec{g}_{\lambda\mu}$. $\mathcal{L}$ devient, au
moyen de ces formules, espace de représentation de A ; la
représentation ainsi obtenue est appelée produit kroeckerien
des représentations fournies par $\mathcal{M}$ et par $\mathcal{M}'$. Le vec-
teur $\vec{g}_{11}$ est de poids dominant $\Lambda + \Lambda'$; en prenant le
plus petit espace invariant contenant ce vecteur, on obtient
un espace de représentation satisfaisant aux conditions impo-
sées.

Il en résulte que toute combinaison linéaire à coef-
ficients entiers $= 0$ des poids dominants fondamentaux, est
le poids dominant d'une représentation irréductible, et qu'on
obtient ainsi toutes les représentations irréductibles.

Théorème de Lévi.

Des méthodes analogues à celles qui lui ont servi
à démontrer la complète réductibilité des représentations des
algèbres semi-simples ont permis à M. Whitehead de donner une
démonstration du très important théorème suivant dû à Lévi :

Théorème 4

A étant une algèbre de Lie, $\mathcal{X}$ sa plus grande

sous-algèbre invariante résoluble . $\mathcal{A}$ contient une sous-
algèbre isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{K}$.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme : Soit $\mathcal{M}$ un espace de représentation
d'une algèbre semi-simple $\mathcal{A}$. A chaque couple (X, Y)
d'éléments de $\mathcal{A}$, faisons correspondre un vecteur
 $\vec{f}_{X,Y} \in \mathcal{M}$. Les conditions nécessaires et suffisantes
pour que ces vecteurs puissent se mettre sous la forme
 $\vec{f}_{X,Y} = X \vec{e}_Y - Y \vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]}$, où les $\vec{e}_X$ soient des
vecteurs dépendant linéairement de X , sont que :

1) $\vec{f}_{X,Y}$ dépende linéairement de X et de Y ;

2) on ait

$$\vec{f}_{X,Y} + \vec{f}_{Y,X} = 0 \quad Z\vec{f}_{X,Y} + X\vec{f}_{Y,Z} + Y\vec{f}_{Z,X} = \vec{f}_{[X,Y],X} \\ + \vec{f}_{[Y,Z],X} + \vec{f}_{[Z,X],Y}$$

On voit tout de suite que ces conditions sont nécessaires . Inversement, supposons-les remplies .

Nous allons envisager divers cas :

1) La représentation donnée par $\mathcal{M}$ est la représentation 0 . Formons un espace linéaire $\mathcal{N}$ dont les éléments sont en correspondance bi-univoque avec ceux de $\mathcal{A}$, et formons l'espace $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. $\vec{g}_Y$ étant l'élément de $\mathcal{N}$ qui correspond à Y , posons $X \vec{g}_Y = \vec{f}_{X,Y} + \vec{g}_{[X,Y]}$

et $X \vec{f} = 0$ si $\vec{f} \in \mathcal{M}$. On obtient une représentation de $\mathcal{A}$ dans laquelle $\mathcal{M}$ est sous-espace invariant. Il existe donc un autre sous-espace invariant $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_1$. Soit $\vec{g}_Y$ l'élément de $\mathcal{M}_1$ qui est congru (mod. $\mathcal{M}$) à $\vec{g}_Y$. On a $X \vec{g}_Y = X \vec{g}_Y = \vec{f}_{X,Y} + \vec{g}_{[X,Y]} \in \mathcal{M}_1$; donc $\vec{f}_{X,Y} = \vec{g}_{[X,Y]} - \vec{g}_{[X,Y]}$ ne dépend que du crochet $[X,Y]$, ce qui démontre le lemme dans ce cas.

2) Supposons que $\mathcal{M}$ donne une représentation irréductible fidèle. Dans ce cas, le discriminant de la représentation est $\neq 0$. Prenons une base $(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)$ de $\mathcal{A}$, et la base complémentaire $(Z^1, Z^2, \dots, Z^r)$. On voit comme plus haut que la transformation linéaire $\sum Z_i Z^i$ est égale à $\frac{r}{d} 1$, si d est le degré de la représentation. Posons :

$$\vec{e}_X = \frac{d}{r} \sum Z^i \vec{f}_{Z_i, X}$$

La condition 2) donne

$$\begin{aligned} \vec{f}_{X,Y} = X \vec{e}_Y - Y \vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]} + \frac{d}{r} \left\{ \sum Z^i \vec{f}_{[Y, Z_i], X} - \sum [Z^i, Y] \vec{f}_{Z_i, X} \right\} \\ + \frac{d}{r} \left\{ \sum Z^i \vec{f}_{[Z_i, X], Y} - \sum [Z^i, X] \vec{f}_{Y, Z_i} \right\} \end{aligned}$$

Or, si nous posons $[Y, Z_j] = \sum b_{i,j} Z_j$, nous avons

$b_{1,j} = s_{\mathcal{M}}([Y, Z_i] Z^j) = s_{\mathcal{M}}([Z^j, Y] Z_i)$. d'où $[Z^j, Y] = \sum b_{ji} Z_i$, de sorte que les deux termes entre accolades sont nuls, ce qui démontre le lemme dans ce cas .

3) Supposons maintenant seulement $\mathcal{M}$ irréductible . On a $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1$ étant annulé par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ fournissant une représentation irréductible fidèle de $\mathcal{A}_2$. Il en résulte qu'on peut trouver des vecteurs $\vec{e}_X$, tels que l'égalité $\vec{f}_{X,Y} = X \vec{e}_Y - Y \vec{e}_X - \vec{e}_{[X,Y]}$ soit vraie quand X et Y sont à la fois contenus dans $\mathcal{A}_1$, ou dans $\mathcal{A}_2$. Posons $\vec{f}'_{X,Y} = \vec{f}_{X,Y} - X \vec{e}_Y + Y \vec{e}_X + \vec{e}_{[X,Y]}$. Ces nouveaux vecteurs vérifient encore les conditions du lemme . Prenant $X, Y \in \mathcal{A}_1$, et $Z \in \mathcal{A}_2$, il vient $\vec{f}'_{[X,Y],Z} = 0$. L'algèbre $\mathcal{A}_1$ étant sa propre dérivée, on a $\vec{f}'_{X,Y} = 0$ pour $X \in \mathcal{A}_1$, $Z \in \mathcal{A}_2$, donc $\vec{f}_{X,Y} = 0$ quels que soient X, Y . Le lemme est encore démontré dans ce cas .

4) On passe au cas général en procédant par récurrence sur le degré de la représentation exactement comme pour le premier lemme de Whitehead .

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Lévi . Nous le ferons par récurrence sur l'ordre r de $\mathcal{A}$.

Supposons le théorème démontré pour toutes les algèbres d'ordres $< r$. Si l'algèbre dérivée $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ est $\neq \{0\}$, $\mathcal{A}/\mathcal{H}'$ est d'ordre $< r$, donc contient une algèbre $\mathcal{A}_1/\mathcal{H}'$ isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}$, $\mathcal{A}_1$ est d'ordre $< r$, et contient par suite une sous-algèbre isomorphe à $\mathcal{A}_1/\mathcal{H}'$ et à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. Supposons donc $\mathcal{H}' = \{0\}$: $\mathcal{H}$ est commutative et constitue un espace de représentation de l'algèbre semi-simple $\mathcal{A}/\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ contient un espace linéaire $\mathcal{A}^*$ tel que $\mathcal{A} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}^*$ et il existe une correspondance linéaire biunivoque $X \longleftrightarrow X^*$ entre $\mathcal{A}/\mathcal{H}$ et $\mathcal{A}^*$. Posons $H_{X,Y} = [X^*, Y^*] - [X, Y]^*$. Les éléments $H_{X,Y}$ de $\mathcal{H}$ ainsi déterminés satisfont aux conditions du lemme. Il existe donc des éléments $H_X \in \mathcal{H}$ dépendant linéairement de X tels que

$$H_{X,Y} = [X^*, H_Y] - [Y^*, H_X] - H[X, Y]$$

Il en résulte que les éléments $X^* - H_X$ forment une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{H}$.

Représentation linéaire des algèbres de Lie quelconques

M. Ado a tout récemment démontré le théorème suivant:

Théorème 5

Toute algèbre de Lie possède une représentation li-

néaire fidèle .

La démonstration de ce théorème étant fort longue et compliquée, et étant probablement susceptible de simplifications importantes, nous ne ferons qu'en indiquer quelques aspects .

1. Si nous considérons d'abord une algèbre A de rang 0 (nilpotente), on démontre qu'on peut construire une algèbre B (également de rang 0) telle que A soit isomorphe à l'algèbre quotient de B par une sous-algèbre invariante C qui contient le centre Z de B . Comme la représentation adjointe de B est une représentation fidèle de B/Z , on voit que A est isomorphe à une algèbre quotient $(B/Z) / (C/Z)$ d'une algèbre qui possède une représentation fidèle. L'existence d'une représentation fidèle pour une algèbre de rang 0 se déduit alors du lemme suivant:

Lemme : Toute algèbre quotient d'une algèbre de Lie qui admet une représentation fidèle admet aussi une représentation fidèle .

La construction de l'algèbre B dont nous venons de parler se fait par extensions centrales successives ; les extensions centrales étant définies de la manière suivante : on appelle extension centrale d'une algèbre A une nouvelle algèbre A_1 telle que A soit isomorphe au quotient de A_1

par une sous-algèbre de $\mathcal{A}_1$ qui fasse partie à la fois du centre et de l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}_1$. M. Ado démontre qu'une algèbre de rang 0 admet toujours une extension centrale non triviale, qui est encore de rang 0, et que l'on peut former à partir de $\mathcal{A}$ une chaîne $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n = \mathcal{B}$ d'algèbres de Lie dont chacune est extension centrale de la précédente, et dont la dernière jouit des propriétés énoncées plus haut.

Quant au lemme, le principe de sa démonstration est le suivant : considérons une algèbre de Lie $\mathcal{A}$ composée de substitutions linéaires portant sur n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. On voit facilement que les polynômes en les x_i de degrés bornés par un nombre d forment encore un espace de représentation de $\mathcal{A}$. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une sous-algèbre invariante de $\mathcal{A}$ dont on suppose d'abord qu'elle est de rang 0 et contenue dans l'algèbre dérivée de $\mathcal{A}$. M. Ado montre alors que, si d est assez grand, on peut trouver une famille linéaire de polynômes qui soient annulés par tous les éléments de $\mathcal{C}$ et par ceux-là seulement. Cette famille de polynômes fournit alors un espace de représentation fidèle de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. Ceci fait, il est assez facile de généraliser pour une sous-algèbre invariante quelconque, et de démontrer ainsi le lemme

2) M. Ado démontre que, dans toute algèbre de Lie $\mathcal{A}$ existe une sous-algèbre invariante Γ de rang 0 maxima (qui contient toutes les autres). Les éléments de $\mathcal{A}$ définissent alors des automorphismes de Γ . Par extensions centrales successives, on passe de Γ à une nouvelle algèbre de rang 0 Γ_1 , qui permet de construire une représentation linéaire de Γ . Or on démontre que toute automorphie de Γ peut être prolongée par une automorphie de Γ_1 . On en déduit qu'on peut fabriquer une algèbre $\mathcal{A}^*$ composée de transformations linéaires contenant Γ comme sous-algèbre invariante, et telle que toute automorphie de Γ puisse être engendrée par un élément de $\mathcal{A}^*$. De cette manière se trouve établie une correspondance entre les éléments de $\mathcal{A}$, considérés comme produisant des automorphismes de Γ , et certains éléments de $\mathcal{A}^*$, qui engendrent une algèbre $\mathcal{A}_1^*$. $\mathcal{A}_1^*$ n'est pas en général isomorphe à $\mathcal{A}$; mais on montre qu'on peut par un artifice déduire de $\mathcal{A}_1^*$ une algèbre isomorphe à $\mathcal{A}$ qui admette une représentation fidèle.
