

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

P. DUBREIL

Algèbres de Lie (suite)

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 4 (1936-1937), exp. n° 9, p. 1-35

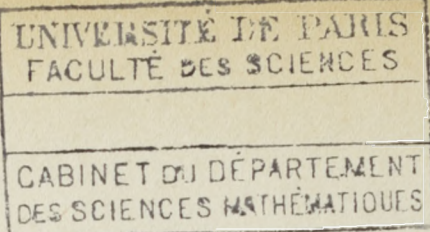
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1936-1937__4__A13_0>

© École normale supérieure, Paris, 1936-1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



IV. - J

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

Quatrième année - 1936-37

Les TRAVAUX de M. Elie CARTAN

Algèbres de Lie

(suite)

Exposé fait par M. DUBREIL, le lundi 26 Avril 1937

Exemplaire n° 3

simple . Nous allons les déduire du second critère de Cartan:

$\bar{G}_2(x) = \text{tr. } X^2$ n'est pas dégénérée où x est un élément général de $\mathcal{G}$:

$$x = x_0 + \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha = \lambda^i h_i + \sum_{\alpha \neq 0} (\xi^\alpha u_\alpha + \xi'^\alpha u'_\alpha + \dots)$$

On a :

$$\begin{aligned} \bar{G}_2(x) &= \text{tr. } X^2 = \text{tr. } X_0^2 + \sum_{\alpha \neq 0} \text{tr. } X_\alpha X_{-\alpha} \\ &= \Phi(\lambda) + \sum_{\alpha \neq 0} (\xi^\alpha \xi^{-\alpha} \text{tr. } U_\alpha U_{-\alpha} + \xi'^\alpha \xi'^{-\alpha} \text{tr. } U'_\alpha U'_{-\alpha} + \dots) \end{aligned}$$

car $\text{tr. } U_\alpha U_\beta \neq 0$ si $\alpha + \beta \neq 0$ puisque $U_\alpha U_\beta$ transforme un vecteur de $\mathcal{G}_\rho$ en un vecteur de $\mathcal{G}_{\rho+\alpha+\beta}$

La forme quadratique $\bar{G}_2$ n'étant pas dégénérée contient effectivement les r variables ξ, η , cela nous donne :

1) puisque $\Phi(\lambda)$ est la somme des carrés des racines α : il y a exactement n racines α linéairement indépendantes. Ces racines ne s'annulent toutes que pour $\lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$, c'est-à-dire pour $h = 0$. Or on a vu qu'elles sont nulles pour tout élément de $\mathcal{G}'_0$. On a donc

$\mathcal{G}'_0 = 0$: $\mathcal{G}_0$ est abélien.

2) tous les ξ^α doivent figurer, donc : $-\alpha$ est racine en même temps que α , et les quantités $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}$, $\text{tr.} U_\alpha U'_{-\alpha}$, ne sont pas toutes nulles : soit $u_{-\alpha}^*$ celui des éléments de base de $\mathfrak{G}_{-\alpha}$ tel que $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}^* \neq 0$.

Pour pouvoir donner les deux dernières propriétés des racines des groupes semi-simples, à savoir : α est racine simple, et $m\alpha$ (ou m est un nombre fixe $\neq \pm 1, 0$) n'est pas racine, nous avons besoin de quelques propositions préliminaires, qui seront d'ailleurs fondamentales pour la suite ; en particulier, il nous faut avoir la valeur de $\text{tr.} U_\alpha U_{-\alpha}^*$. Pour cela, considérons une racine ρ différente de α , et supposons que $\rho - \alpha$ n'est pas racine mais que $\rho + p\alpha$ est racine pour p entier positif ou nul, jusqu'à une certaine valeur P . L'ensemble de ces racines sera appelé une suite $-(\alpha)$.

Soit $v_0 = u_\rho$ le vecteur de poids ρ dans $\mathfrak{G}$. Formons la suite de vecteurs :

$$v_0, v_1 = [u_\alpha v_0] = U_\alpha v_0, \dots, v_{p+1} = U_\alpha v_p, \dots$$

Si v est un vecteur de poids Λ , $U_\alpha v$ est un vecteur de poids $\Lambda + \alpha$, puisque :

$$H \cdot U_\alpha v = [H U_\alpha] v + U_\alpha H v = (\alpha + \Lambda) \cdot U_\alpha v$$

On a donc :

$$(1) \quad H v_p = (\rho + p \alpha) v_p$$

Appliquons à v_{p+1} la transformation $U_{-\alpha}^*$:

$$U_{-\alpha}^* v_{p+1} = [u_{-\alpha}^* [u_{\alpha} v_p]] = -[u_{\alpha} [v_p u_{-\alpha}^*]] - [v_p [u_{-\alpha}^* u_{\alpha}]]$$

ou, en posant $h_{\alpha}^* = [u_{\alpha} u_{-\alpha}^*]$:

$$(2) \quad U_{-\alpha}^* v_{p+1} = [u_{\alpha} [u_{-\alpha}^* v_p]] - H_{\alpha}^* v_p$$

Mais $[u_{-\alpha}^* v_0]$ étant nul, (2) s'écrit pour $p = 0$:

$$U_{-\alpha}^* v_1 = -H_{\alpha}^* v_0 = -\rho_{\alpha}^* v_0$$

en désignant par ψ_{α}^* la valeur que prend pour $h = h_{\alpha}^*$ une forme linéaire $\psi(\lambda)$.

On en déduit de proche en proche :

$$(3) \quad U_{-\alpha}^* v_{p+1} = U_{-\alpha}^* U_{\alpha} v_p = \mu_{p+1} v_p$$

avec :

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_1 = -\rho_{\alpha}^* \\ \mu_{p+1} = \mu_p - (\rho_{\alpha}^* + p \alpha_{\alpha}^*) = -(p+1)(\rho_{\alpha}^* + \frac{p}{2} \alpha_{\alpha}^*) \end{cases}$$

Avant d'utiliser ces formules, nous devons remarquer qu'elles subsistent à de très légères modifications près, si on fait les hypothèses :

$$p = \alpha$$

$$v_0 = u'_\alpha \quad (\text{2ème vecteur de base de } G_\alpha)$$

On a cette fois la congruence :

$$(1') \quad H v_0 \equiv \alpha v_0 \pmod{u_\alpha}$$

$$\text{soit : } H v_0 = \alpha v_0 + k u_\alpha$$

et on voit sans peine que :

$$(1'') \quad H v_p = (p+1) \alpha v_p \quad \text{pour } p \geq 1$$

D'autre part, la relation (2) pour $p = 0$ donne ici, en remarquant que $[u_\alpha^*, v_0]$ est un élément h' de G_0

la congruence :

$$(3') \quad U_\alpha^* v_1 \equiv \omega_1 v_0 = -\alpha_\alpha^* v_0 \pmod{u_\alpha}$$

On a ensuite les égalités :

$$(3'') \quad U_\alpha^* v_{p+1} = \omega_{p+1} v_p = -\frac{(p+1)(p+2)}{2} \alpha_\alpha^* v_p \quad \text{pour } p \geq 1.$$

Revenons aux premières hypothèses. Soit $l \geq 0$ le plus petit entier tel que l'on ait : $v_{l+1} = 0$; l sera appelé la longueur de la suite (α) considérée. La relation (3), pour $p = l$, donne :

$$\omega_{l+1} = 0$$

d'où

$$(5) \quad l = - \frac{3 \beta_{\alpha}^*}{\alpha_{\alpha}^*}$$

et si $\beta = \rho + p \alpha$ est une racine quelconque de la suite on a :

$$l - 2p = - \frac{2 \beta_{\alpha}^*}{\alpha_{\alpha}^*}$$

Le nombre $\frac{2 \beta_{\alpha}^*}{\alpha_{\alpha}^*}$ est donc un entier. De plus, les quantités

$\beta - k \alpha$ où l'entier k prend toutes les valeurs compri-

ses entre 0 et $\frac{2 \beta_{\alpha}^*}{\alpha_{\alpha}^*}$ sont des racines : ce sont les racines

de la suite (α) comprises entre $\beta = \rho + p \alpha$ et

$$\beta' = \rho + (l - p) \alpha :$$

$$\rho \quad \beta' \quad \beta \quad \rho + l \alpha$$

D'après (3), la transformation $U_{-\alpha}^* U_{\alpha}$ laisse invariant l'espace $\mathcal{R}_1 = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ et sa trace dans cet espace est :

$$\text{tr. } \mathcal{R}_1 \quad U_{-\alpha}^* U_{\alpha} = \sum_{p=1}^l m_p = \sum_{p=1}^l \frac{p(l-p+1)}{2} \alpha_{\alpha}^* = \frac{\alpha_{\alpha}^*}{2} \cdot \frac{l(l+1)(l+2)}{6}$$

On peut maintenant faire le même raisonnement dans l'espace facteur $\mathcal{G}/\mathcal{R}_1$; on aura dans cet espace (où

les poids sont toujours des racines de G_f) une nouvelle suite (α) de longueur $l' \geq 0$, et ainsi de suite . On voit ainsi que :

1) les propriétés précédentes des nombres $\frac{2\beta_\alpha^*}{\alpha_\alpha^*}$ sont valables pour toute racine β ;

2) la trace de la transformation $U_{-\alpha}^* U_\alpha$ dans l'espace G_f lui-même est :

$$\text{Tr. } U_{-\alpha}^* U_\alpha = \frac{\alpha_\alpha^*}{2} \sum \frac{l(l+1)(l+2)}{6}$$

la sommation étant étendue aux suites $-(\alpha)$ considérées successivement dans G_f , $G_f/\mathfrak{p}_1$, etc.... Comme on a

$$\text{Tr } U_\alpha U_{-\alpha}^* = \text{Tr } U_{-\alpha}^* U_\alpha \neq 0$$

il vient

$$\alpha_\alpha^* \neq 0$$

Nous allons en déduire que la racine α est nécessairement simple . En effet s'il en était autrement, $G_{f,\alpha}$ admettrait au moins un deuxième vecteur de base $u'_\alpha \neq 0 \pmod{u_\alpha}$. La suite des v formée à partir de $v_0 = u'_\alpha$ ne comprendrait d'après (3'') que des vecteurs différents de 0 quel que soit $p > 0$, ce qui est absurde . Toutes les racines sont donc simples, et on a :

$$U_{-\alpha}^* = U_{-\alpha} \quad . \quad \text{tr. } U_{\alpha} U_{-\alpha} = N_{\alpha} \neq 0 \quad \alpha_{\alpha}^* = \alpha_{\alpha} \} \alpha_{\alpha} \neq 0 .$$

Enfin, si $m\alpha$, $-m\alpha$ ($m \geq 2$) étaient racines, mais non $(m+1)\alpha$, $-(m+1)\alpha$, on pourrait construire la suite définie par le vecteur $v_0 = u_{-m\alpha}$ ($\neq 0$). Cette suite, puisque $\alpha_{\alpha} \neq 0$ serait de longueur $2m$ et le premier vecteur pouvant être nul serait v_{2m+1} . Or v_{m+1} étant de poids α , est un multiple de u_{α} et $v_{m+2} = [u_{\alpha}, v_{m+1}]$ est nul. On a donc :

$$2m + 1 \leq m + 2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad m \leq 1$$

et aucun multiple entier de α n'est racine. Il est impossible de plus que $k\alpha$ soit racine, k étant un nombre fixe quelconque différent de ± 1 et de 0. Si on avait en effet $\beta = k\alpha$, il en résulterait

$$\frac{2\beta_{\alpha}}{\alpha_{\alpha}} = 2k$$

$$\frac{2\alpha_{\beta}}{\beta_{\beta}} = \frac{2}{k}$$

$2k$ et $\frac{2}{k}$ devant être entiers et 2α , 2β n'étant pas racines, il reste la seule possibilité $k = \pm 1$.

En résumé, un groupe semi-simple a une base de la forme

$$G = (h_1, \dots, h_n, u_{\alpha}, u_{-\alpha}, u_{\beta}, u_{-\beta}, \dots)$$

et sa structure est définie par les relations :

$$[h_i, h_k] = 0 \quad , \quad [h, u_\alpha] = \alpha u_\alpha \quad , \quad \alpha = a_i \lambda^i \quad .$$

$$[u_\alpha, u_{-\alpha}] = h_\alpha = -a^i h_i \quad , \quad [u_\alpha, u_\beta] = N_{\alpha\beta} u_{\alpha+\beta}$$

$$(N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta} \quad , \quad N_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha + \beta \quad \text{n'est pas racine})$$

et on a

$$\sigma_2(x) = \bar{\Phi}(\lambda) + \sum_{\alpha \neq 0} N_\alpha \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \lambda \end{matrix} \right\}^{-\alpha}$$

$$N_\alpha = \text{Tr.} U_\alpha U_{-\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} \sum \frac{\ell(\ell+1)(\ell+2)}{6}$$

avec

$$\bar{\Phi}(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$$

2.- Classification des groupes simples .

Chacun des vecteurs $u_\alpha, u_{-\alpha}, u_\beta, \dots$ n'étant défini qu'à un facteur près, on pourra les normer de manière à simplifier les constantes $N_\alpha, N_{\alpha\beta}$. Nous choisirons $u_\alpha, u_{-\alpha}$ de manière que l'on ait

$$N_\alpha = -1$$

α_α est alors négatif et rationnel . Cela fait, on pourra encore multiplier u_α par un facteur arbitraire μ_α , à condition de multiplier $u_{-\alpha}$ par $\frac{1}{\mu_\alpha}$.

La forme G_2 étant invariante par le groupe adjoint, on a pour tout x :

$$x = \lambda^i h_i + \sum_{\beta \neq 0} \xi^\beta x_\beta^{u_\beta}$$

$$G_2([u_\alpha x], x) = 0$$

Or

$$[u_\alpha x] = - \xi^{-\alpha} a^i h_i - \alpha u^\alpha + \sum_{\substack{\beta \neq -\alpha \\ \beta \neq 0}} N_{\alpha\beta} \xi^\beta u_{\alpha+\beta}$$

ce qui donne

$$G_2([u_\alpha x], x) = - \xi^{-\alpha} \Phi(a^i, \lambda^k) + \alpha \xi^{-\alpha} - \sum_{\alpha + \beta + \gamma = 0} N_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\gamma = 0$$

d'où les deux relations importantes :

$$(6) \quad \Phi(a^i, \lambda^k) = g_{ik} a^i \lambda^k = \alpha = g_k \lambda^k$$

$$(7) \quad \sum_{\alpha + \beta + \gamma \neq 0} N_{\alpha\beta} \xi^\beta \xi^\gamma = 0$$

Utilisons d'abord la première ; nous avons :

$$a_k = g_{ik} a^i$$

de sorte que les a_k et les a^i sont les composantes covariantes ^{et contravariantes} du même vecteur a par rapport au tenseur fondamental g_{ik} : ce vecteur a de l'espace à n dimensions qui

correspond d'une manière biunivoque à la racine $\alpha = a_i \lambda^i$ sera appelé vecteur-racine. Comme $h_\rho = -b^i h_i$, on peut écrire :

$$\alpha_\beta = -a_i b^i = -(a, b)$$

(a, b) désignant le produit scalaire des deux vecteurs a et b ; de là résulte la propriété de symétrie $\alpha_\beta = \beta_\alpha$.

Considérons maintenant n racines linéairement indépendantes : $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ dont toute autre racine ρ est une combinaison linéaire

$$\rho = r_k \alpha^{(k)}$$

Désignons par $a^{(i)}$ et r les vecteurs-racines correspondant à $\alpha^{(i)}$ et ρ , et par ω_i^k l'entier $2 \frac{(a^{(k)}, a^{(i)})}{(a^{(i)}, a^{(i)})}$

on voit facilement que le déterminant $|\omega_i^k|$ est différent de zéro ; les n coefficients r_k peuvent se déterminer au moyen des n relations :

$$2 \frac{(r, a^{(i)})}{(a^{(i)}, a^{(i)})} = \omega_i^k r_k$$

et les r_k sont réels et rationnels. Nous pouvons donc choisir dans l'espace à n dimensions des vecteurs a un système de coordonnées tel que toutes les racines soient réelles : la forme quadratique $\Phi(\lambda) = \sum \alpha^2 = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$

est alors réelle et définie-positive, et la métrique définie par le tenseur g_{ik} est une métrique euclidienne ordinaire.

On peut achever de normer les vecteurs de base u_α du groupe G_f de façon que les constantes $N_{\alpha\beta}$ elles-mêmes deviennent réelles. Pour établir ce point, on peut remarquer d'abord que la relation (7) entraîne :

$$(8) \quad N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \quad \text{dès que} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

D'autre part, si β appartient à la suite (α) :

$$\beta - j\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + k\alpha$$

on a d'après (3)

$$\left[u_{-\alpha} [u_\alpha u_\beta] \right] = \frac{(j+1)k}{2} \alpha_\alpha u_\beta$$

d'où, en tenant compte de (8) :

$$(9) \quad N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, -\beta} = R_{\alpha\beta}$$

où la quantité

$$R_{\alpha\beta} = - \frac{(j+1)k}{2} \alpha_\alpha$$

est rationnelle et positive, dès que $\alpha + \beta$ est racine $(k \geq 1)$, ce qui entraîne $N_{\alpha\beta} \neq 0$.

De plus, les racines étant des formes linéaires réelles, on peut les ordonner : cela permet de normer de proche en proche (en multipliant u_α et divisant $u_{-\alpha}$ par le même

facteur μ_α } de manière que l'on ait

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}$$

Alors, d'après l'équation (9) . les constantes de structure $N_{\alpha\beta}$ sont réelles . On constate en outre que les nombres $N_{\alpha\beta}$ sont déterminés d'une manière unique par le système $\sum_n$ des vecteurs-racines $a, b, \dots$. Il en est évidemment de même de l'ordre r du groupe G_f puisque $\sum_n$ se compose de $r-n$ vecteurs .

Nous nous proposons maintenant d'indiquer la méthode qui permet de former tous les systèmes $\sum_n$ correspondant aux groupes simples . D'après les propriétés établies, ces systèmes satisfont aux quatre conditions suivantes :

1°- $\sum_n$ contient $-a$ en même temps que a , mais non ka ($k \neq 0, \pm 1$) .

2°- $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 2 \frac{\beta_\alpha}{\alpha_\alpha}$ est entier . Par conséquent,

si φ désigne l'angle des deux vecteurs a et b , on a :

$$\cos^2 \varphi = \frac{(ab)^2}{(aa)(bb)} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{ ou } \frac{3}{4}$$

et φ ne peut être que $= 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$, ou 30° (ou leurs suppléments, mais, en remplaçant un des vecteurs par son opposé, on peut toujours se ramener au cas d'un angle non obtus).

Les différentes possibilités, en supposant que a est le plus petit des deux vecteurs, sont données par le tableau suivant :

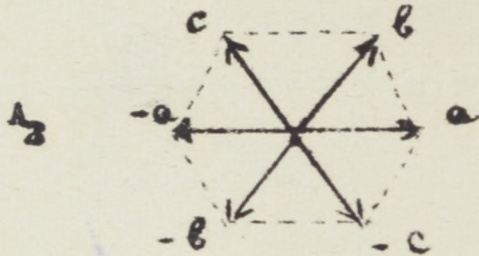
φ	$\frac{(ab)}{(aa)}$	$\frac{(ab)}{(bb)}$	$\frac{(bb)}{(aa)}$
30°	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
45°	1	$\frac{1}{2}$	2
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
90°	0	0	quelconque

De ce tableau résulte que, du rapport des longueurs de deux vecteurs non perpendiculaires, on peut déduire leur angle.

$3^\circ \sum_n$ contient en même temps que a et b , tous les vecteurs $b - ka$ où l'entier k prend les valeurs

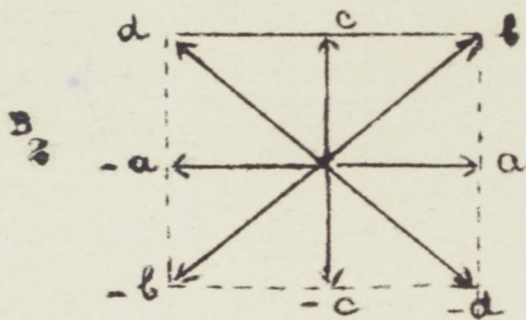
$0, \dots, 2 \frac{(ab)}{(aa)}$. Cela entraîne les conséquences suivantes:

1) Si a et b font un angle de 60° , on a $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 1$



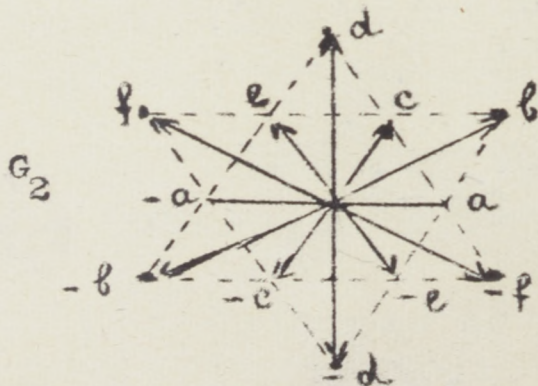
et $b - a = c$ appartient au système. En introduisant les vecteurs opposés, on a le système A_2 des six rayons d'un hexagone régulier.

- 2) Si a et b font un angle de 45° , on a $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 2$



et les deux vecteurs $c = b - a$
 $d = b - 2a$ appartiennent au système, ce qui donne, avec les vecteurs opposés, un système B_2 de huit vecteurs formant les demi-diagonales et les demi-médiatrices d'un carré.

- 3) Si a et b font un angle de 30° , on a $2 \frac{(ab)}{(aa)} = 3$



d'où les trois vecteurs :

$$c = b - a, \quad e = b - 2a, \quad f = b - 3a$$

Comme b fait avec $-f$ un angle de 60° , nous avons encore nécessairement le vecteur $d = b + f$ complétant l'hexagone. On a donc finalement avec a et b un système G_2 de 12

vecteurs formant une sorte d'étoile qui résulte de la réunion de deux hexagones du type A_2 .

4° Le groupe G_2 étant simple, $\sum_n$ ne se décompose pas en deux systèmes partiels perpendiculaires l'un à l'autre, car on voit sans difficulté que le sous-espace de G_2 engendré par les vecteurs u_α correspondant aux vecteurs-racines a d'un des systèmes partiels, et par les crochets $[u_\alpha u_{-\alpha}]$ serait sous-groupe invariant de G_2 .

Cela étant, il y a un seul système $\sum_1$, constitué par deux vecteurs opposés :

$$-a \xleftarrow{0} a$$

le groupe simple correspondant est à trois paramètres.

Les systèmes $\sum_2$ peuvent être construits à partir d'un couple a et b faisant l'angle minimum, a étant le plus petit des vecteurs du couple. On obtient ainsi, pour les valeurs 60° , 45° , 30° de l'angle minimum, les systèmes A_2 , B_2 , G_2 , qui sont visiblement complets. Les groupes simples correspondants ont 8, 10 et 14 paramètres.

Voyons maintenant les différents systèmes $\sum_3$ possibles; ils proviennent de G_2 , B_2 , ou A_2 .

Extension de G_2

Cherchons à adjoindre à G_2 un vecteur μ non perpendiculaire à son plan : nous pouvons le supposer non perpendi-

culaire à a, b, c, d . On a (en prenant a de longueur 1)

$$\frac{(rr)}{(aa)} = (rr) = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1.$$

$$\frac{(rr)}{(bb)} = \frac{(rr)}{3} = \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } 1$$

d'où $(rr) = 3$ ou 1 .

$$1) \quad \underline{(rr) = 3} \text{ entraîne } \widehat{ar} = \widehat{cr} = 30^\circ.$$

mais les cônes de révolution d'axes a et c et de demi-angle au sommet 30° , n'ont en commun que la ligne d'action de b . Ce cas est donc impossible.

2) $\underline{(rr) = 1}$ entraîne $\widehat{br} = \widehat{dr} = 30^\circ$, et ce cas est impossible pour la même raison. Donc :

Le système G_2 n'admet pas d'extension à plus de deux dimensions et aucun système $\sum_n$ pour $n \geq 3$, ne contient d'angle égal à 30° .

Extension de B_2

Nous adjoignons à B_2 un vecteur r que nous pouvons toujours supposer non perpendiculaire à a et à b . De $(aa) = 1$, $(bb) = 2$, résulte $(rr) = 2$ ou 1 .

1°) Cas $(rr) = 2$. On a alors $\widehat{ra} = 45^\circ$, $\widehat{rb} = 60^\circ$

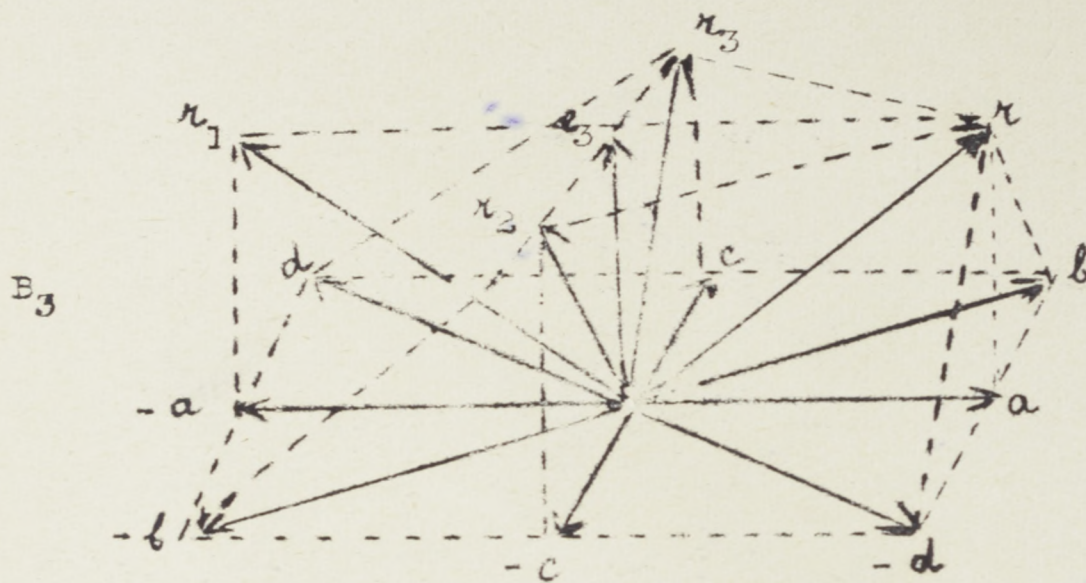
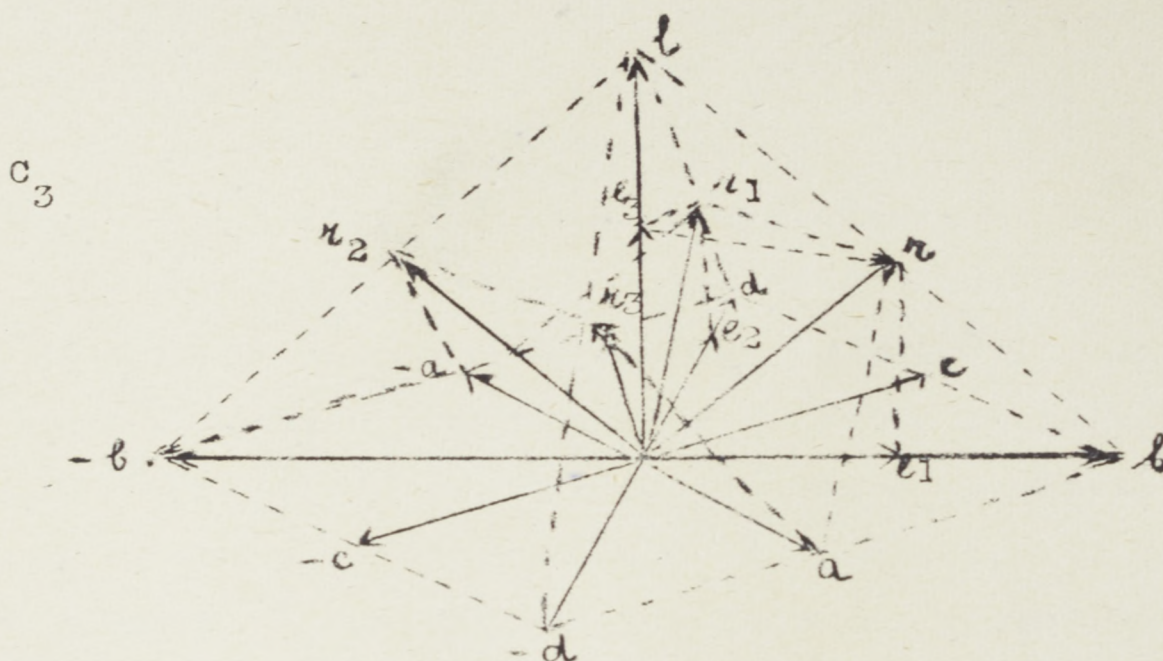


fig.1

et r est la demi-diagonale du carré construit sur a dans le plan perpendiculaire à B_2 (fig.1). De a et r on déduit les vecteurs e_3 et r_1 ; de b et r le vecteur r_2 (diagonale du carré $-c, e_3$), de $-d$ et r (ou de $-c$ et r_2) le vecteur r_3 . Avec les vecteurs opposés, on a un système que nous appellerons B_3 . On ne peut adjoindre à ce système aucun vecteur sans augmenter sa dimension, car il contient déjà toutes les solutions r du type $(rr) = 2$, et nous verrons qu'il ne peut contenir une solution du type $(rr) = 1$.

Si nous prenons dans l'espace à trois dimensions, les vecteurs fondamentaux $e_1 = a$, $e_2 = c$, et e_3 , les vecteurs de B_3 sont les vecteurs $\pm e_i$ et $\pm e_i \pm e_j$

2°) Cas $(rr) = 1$. On a cette fois : $\hat{ra} = 60^\circ$, $\hat{rb} = 45^\circ$ et r est la demi-diagonale du carré construit



sur b dans le plan perpendiculaire à B_2 (fig. 2).

On en déduit successivement les différents vecteurs portés sur la figure qui, avec les vecteurs opposés, forment un système à trois dimensions C_3 . Il est impossible de combiner C_3 avec B_3 , car l'un contient un vecteur l de longueur $\sqrt{2}$ porté par la perpendiculaire au plan B_2 , tandis que l'autre contient un vecteur de longueur 1 porté par la même droite.

Si on rapporte l'espace aux vecteurs : $e_1 = \frac{l}{2}$, $e_2 = \frac{d}{2}$, $e_3 = \frac{l}{2}$, les vecteurs de C_3 sont tous les vecteurs :

$$\pm 2 e_i \quad \text{et} \quad \pm e_i \pm e_j$$

Extension de A_2

L'angle minimum du système étant 60° , nous ne pourrions avoir ici que des angles de 60° ou 90° . On a $(a a) = 1$, $(b b) = 1$ et nécessairement $(c c) = 1$. Si, comme on peut toujours le supposer, c n'est perpendiculaire ni à a ni à b , il forme avec ces vecteurs un tétraèdre régulier et il est perpendiculaire à c (fig. 3). En associant c à a et à b on obtient les nouveaux vecteurs c_1 et c_2 . Avec les vecteurs opposés, on a un système A_3 qui est re-

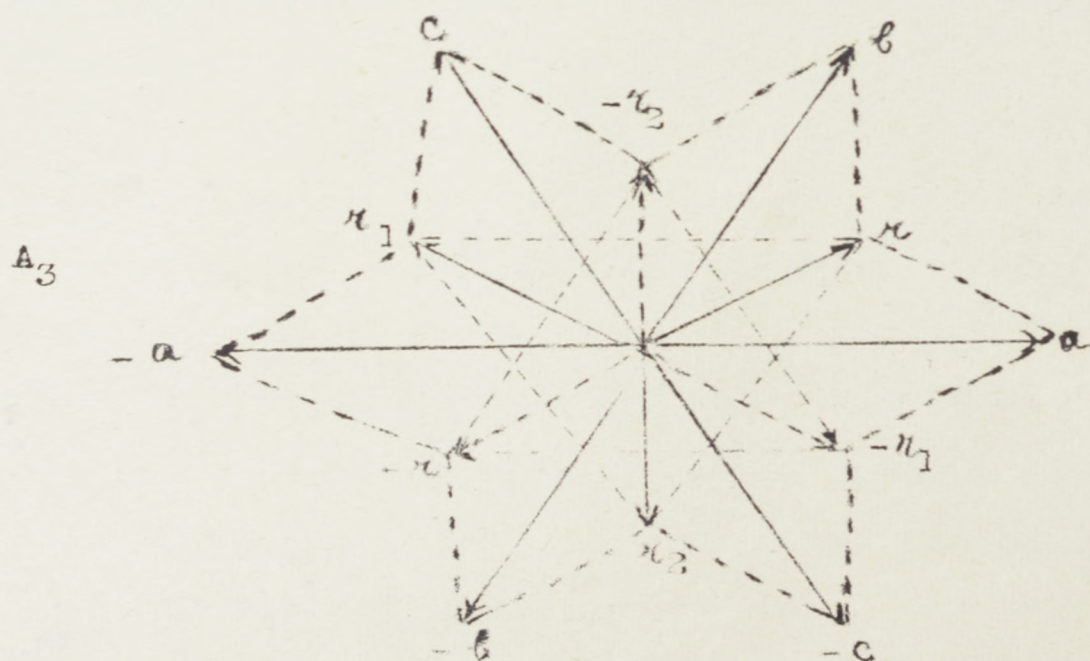


fig. 3

présentée ci-contre par sa projection sur le plan de A_2 (et non plus en perspective). Comme autres vecteurs possibles, nous ne pourrions avoir que les symétriques des précédents par rapport au plan de A_2 ; à eux seuls ces vecteurs constituent un système équivalent à A_3 . Mais si l'on remarque que le symétrique de $- \kappa$ par exemple, fait avec κ_1 et κ_2 des angles inférieurs à $\kappa_1 \wedge \kappa_2 = 60^\circ$, on voit qu'il est impossible de combiner les deux systèmes.

Pour avoir rencontré toutes les circonstances remarquables qui se présentent dans la construction des systèmes $\sum_n$, il nous reste à mettre en évidence l'existence de suites infinies de systèmes d'un même type : c'est ce que nous ferons pour les systèmes B_n .

Soit donc B_n le système constitué par les vecteurs $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$ dans un espace euclidien à n dimensions rapporté à n vecteurs unitaires rectangulaires e_i . Nous adjoignons dans l'espace à $n+1$ dimensions, un vecteur $\kappa = (r_1, r_2, \dots, r_{n+1})$ non perpendiculaire à B_n , et non contenu dans l'hyperplan B_n . On a $(\kappa \kappa) = 1$ ou 2 . Prenons $(\kappa \kappa) = 2$. On peut toujours supposer que κ fait un angle aigu avec e_1 ; on a alors $(\kappa e_1) = r_1 = +1$, $\kappa \wedge e_1 = 45^\circ$. On a ensuite $(\kappa e_i) = r_i = 0$ pour $i = 2, \dots, n$, car autrement κ ferait avec e_1 et e_i , qui

sont perpendiculaires, des angles de 45° ou 135° , donc seraient dans leur plan. Par suite, on a $r_{n+1}^2 = 2 - \kappa_1^2 = 1$ d'où, par exemple, $\kappa = (1, 0, \dots, +1)$. De κ et e_1 , on déduit

$$\kappa - e_1 = e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

et

$$\kappa - 2e_1 = (-1, 0, \dots, 0, 1)$$

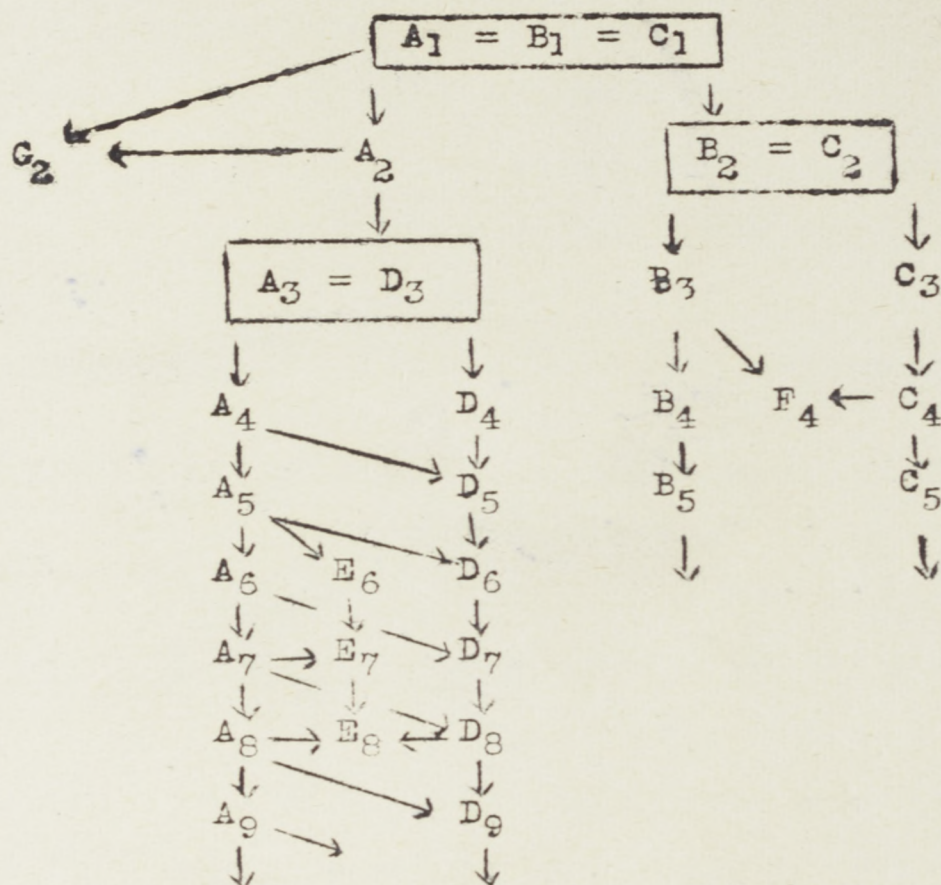
Enfin, $\eta = e_1 \pm e_i$ est un vecteur de $\sum_n$ pour lequel $(\eta \eta) = 2$; κ , qui ne lui est pas perpendiculaire, fait avec η un angle de 60° , d'où le vecteur

$$\kappa - \eta = (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0, 1)$$

C'est le vecteur construit à partir de e_i comme κ à partir de e_1 : toutes les possibilités sont donc épuisées pour les vecteurs de carré 2, et le système B_{n+1} obtenu se compose lui aussi des vecteurs $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j$.

Le cas $(\kappa \kappa) = 1$ ne peut se présenter que pour $n = 4$ et conduit à un système exceptionnel F_4 , non prolongeable, (comme G_2).

Bornons-nous maintenant à indiquer les résultats complets au moyen du tableau suivant :



On a, en outre, les relations d'inclusion :

$$D_4 \longrightarrow F_4$$

$$D_n \longrightarrow B_n$$

$$D_n \longrightarrow C_n$$

} faciles à vérifier sur
les figures pour $n = 3$

Les cinq groupes exceptionnels correspondant à G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 , ont respectivement 14, 52, 78, 133 et 248 paramètres. Les groupes correspondant à A_n , B_n , C_n

D_n , ont respectivement $n(n+2)$, $n(2n+1)$, $n(2n+1)$, $n(2n-1)$ paramètres, et on peut les réaliser de la manière suivante : pour A_n , on a le groupe projectif à n variables ; pour B_n et D_n , les groupes projectifs d'une surface du second degré à $2n$ et $2n-1$ variables ; pour $D_n^{C_n}$, le groupe projectif d'un complexe linéaire à $2n-1$ variables.

3.- Propriétés concernant la nature du corps.

Les résultats obtenus jusqu'à présent sur les algèbres de Lie supposent, comme il a été dit, le corps K algébriquement fermé, ce qui a permis de faire intervenir toutes les racines de l'équation caractéristique. Mais certains des théorèmes établis dans la précédente conférence, dont l'énoncé ne fait pas intervenir ces racines, s'étendent facilement au cas d'un corps quelconque.

Soient : G une algèbre de Lie sur un corps K quelconque, Ω l'extension algébriquement fermée de K , G^* l'algèbre de Lie, extension de G dans Ω , c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les éléments de la forme αa , $\alpha(\Omega a)$, G et G^* sont intégrables en même temps, car $(G^*)' = (G')^*$. On voit aussi qu'elles sont nilpotentes en même temps. Donc le théorème de Engel est valable pour un corps quelconque. Le premier critère de Cartan s'étend d'une manière analogue, tout au moins dans le cas d'un

corps infini .

Le second critère de Cartan résulte du premier par des raisonnements rationnels : donc, il est valable aussi pour un corps quelconque (infini).

Le second critère de Cartan étant valable, la semi-simplicité est indépendante du corps : G_f et G_f^* sont semi-simples en même temps . On ne peut pas en dire autant pour les groupes simples : il est évident que si G_f admet un sous-groupe invariant L_f , G_f^* admet le sous-groupe invariant L_f^* : donc si G_f^* est simple, il en est de même de G_f . Mais si G_f est simple, G_f^* est soit simple, soit semi-simple. Cette seconde circonstance peut effectivement se produire : si, par exemple, G_f est un groupe simple à paramètres réels, G_f^* s'il n'est pas simple, peut être et peut seulement être la somme directe de deux groupes simples imaginaires conjugués :

$$G_f^* = G_{f1}^* \oplus \overline{G_{f1}}^*$$

Si le groupe simple G_{f1}^* est à s paramètres, G_f^* est à $2s$ paramètres, et il se déduit de G_{f1}^* d'une manière triviale .

Les remarques précédentes conduisent à examiner deux catégories de problèmes bien distinctes . En premier lieu, il semble désirable, au point de vue algébrique, d'a-

voir pour les théorèmes fondamentaux des démonstrations rationnelles, c'est-à-dire ne faisant pas sortir du corps K : nous indiquerons à ce sujet comment on peut établir rationnellement le théorème de Engel, en utilisant la notion d'algèbre enveloppante. En second lieu, on peut chercher à obtenir, à partir des classes de groupes simples complexes précédemment déterminées, les différents types possibles de groupes simples réels.

1. Démonstrations rationnelles.

On a la propriété fondamentale suivante : si $\mathcal{O}_f$ est une algèbre de matrices nilpotente il en est de même de l'algèbre enveloppante $\mathcal{O}$ et inversement.

Par définition, une algèbre associative $\mathcal{O}$ est dite nilpotente s'il existe un entier N tel que $\mathcal{O}^N = 0$, c'est-à-dire si le produit de N éléments quelconques de $\mathcal{O}$ est nul. Il faut évidemment pour qu'il en soit ainsi que tous ses éléments soient nilpotents -c'est également suffisant car une algèbre non nilpotente contient, d'après un théorème de Wedderburn, un élément idempotent.

Cela étant, si $\mathcal{O}$ est nilpotente, toutes les racines de l'équation caractéristique d'une matrice A quelconque de $\mathcal{O}$ sont nulles et $\mathcal{O}_f$ est nilpotent.

Inversement, supposons que dans G toutes les matrices ont $\lambda^n = 0$ comme équation caractéristique. Montrons que $\mathcal{A}$ est nilpotent. Il suffit pour cela de montrer que toutes les matrices de $\mathcal{A}$ ont une trace nulle, car s'il n'en résultait pas que $\mathcal{A}$ est nilpotent, il existerait dans A une matrice $U \neq 0$ idempotente ($U^2 = U$) qui pourrait se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

dont la trace h est différente de 0, d'où contradiction.

Or, un calcul direct et élémentaire permet de calculer pour un groupe infinitésimal quelconque de matrices la trace d'une matrice de l'algèbre enveloppante $\mathcal{A}$ en fonction des coefficients de l'équation caractéristique des éléments de G .

D'abord les traces des matrices $A \in G$ sont connues ainsi que les traces des matrices A^p en fonction rationnelle des coefficients de l'équation caractéristique de A . On connaît par conséquent de même la trace des

matrices $\sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p}$ où $\sum$ indique la somme étendue à toutes les permutations des indices $i_1, i_2, \dots, i_p$, car c'est la forme multilinéaire associée à $\text{tr } A^p$.

Pour calculer $\text{tr}.A_1 A_2 \dots A_p$, on remarque que :

$$\begin{aligned} & \text{tr}(A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_{k+1} A_k A_{k+2} \dots A_p - A_1 A_2 \dots A_p) \\ &= \text{tr}.A_1 \dots A_{k-1} \begin{bmatrix} A_{k+1} & A_k \end{bmatrix} A_{k+2} \dots A_p \end{aligned}$$

Mais $\begin{bmatrix} A_{k+1} & A_k \end{bmatrix}$ est un élément de $\mathcal{O}_f$. On a donc au second membre la trace d'un produit de $p-1$ facteurs seulement. On arrive ainsi à une relation de la forme :

$$(10) \quad \text{tr}.A_1 A_2 \dots A_p = \frac{1}{p!} \text{tr}. \sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} + \mu$$

où μ est une somme de traces de produits de moins de p facteurs. Si $\mathcal{O}_f$ est nilpotent, $\text{tr}.A^p = 0$, donc $\text{tr}. \sum A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_p} = 0$ et comme $\text{tr}.A_1 = 0$, la formule (10) montre par récurrence que la trace de toute matrice de $\mathcal{O}$ est nulle, donc que $\mathcal{O}$ est nilpotente.

On peut donner d'autre part pour une algèbre de Lie une deuxième définition de nilpotent, équivalente à celle de la précédente conférence, et qui, étant analogue à celle des algèbres associatives, se trouve plus maniable dans les dé-

monstrations faisant intervenir l'algèbre enveloppante .

Appelons $[f_1, f_2]$ l'algèbre de Lie engendrée par les crochets d'un élément de f_1 avec un élément de f_2 , f_1 et f_2 étant sous-groupes invariants d'un même groupe G . On peut définir les puissances d'une algèbre de Lie par les formules suivantes :

$$G^2 = [G, G] = G'$$

$$G^3 = [G, G^2] \supset G''$$

.....

$$G^k = [G, G^{k+1}] \supset G^{(k)}$$

Une algèbre de Lie G sera alors dite nilpotente si une puissance de G est nulle : $G^k = 0$: une telle algèbre est visiblement intégrable .

Mais un élément générateur quelconque de G^k s'écrit :

$$[a_1 [a_2 [\dots [a_{k-1} a_k] \dots]]]$$

a_i éléments quelconques
de G

et cette quantité est précisément égale à

$$A_1 A_2 \dots A_{k-1} a_k$$

où A_i est la matrice de la représentation adjointe correspondant à a_i ; ceci montre que si une puissance de l'al-

gèbre de Lie est nulle. l'algèbre enveloppante est nilpotente et inversement . De ceci résulte que nous avons montré rationnellement : 1) l'équivalence des deux définitions de nilpotent, 2) qu'une algèbre nilpotente est intégrable .

Pour démontrer rationnellement qu'inversement le premier dérivé d'un groupe intégrable est nilpotent, on s'appuie sur le théorème suivant dont nous ne donnerons pas la démonstration :

Je rappelle d'abord qu'une algèbre associative est dite semi-simple si elle ne contient aucune sous-algèbre nilpotente invariante $\neq 0$. Soit alors $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie de matrices , Γ son sous-groupe intégrable invariant maximum de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}$. Si $\mathcal{A}$ est semi-simple

$$\mathfrak{G} = \Gamma \oplus \mathfrak{G}_1$$

où Γ est abélien.

Supposons alors $\mathfrak{G}$ intégrable : $\mathfrak{G} = \Gamma$. Soit $\mathcal{N}$ le radical, c'est-à-dire la sous-algèbre invariante nilpotente maximale de l'algèbre enveloppante $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{G}$. Les congruences $g_1 \equiv h_1 \pmod{\mathcal{N}}$, $g_2 \equiv h_2 \pmod{\mathcal{N}}$ entraînent $[g_1 \ g_2] \equiv [h_1 \ h_2] \pmod{\mathcal{N}}$. Les éléments de $\mathfrak{G}$ pris modulo $\mathcal{N}$ forment donc une algèbre de Lie $\mathcal{X}$ homo-

morphe à $\mathcal{O}_f$. donc intégrable. dont l'algèbre enveloppante est $\mathcal{O}_f/\mathcal{N}$. Celle-ci est semi-simple . donc d'après le théorème précédent, $\mathcal{Y}$ est abélien . On a donc pour tout couple d'éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{O}_f$:

$$[g_1 g_2] \equiv 0 \pmod{\mathcal{N}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{O}_f' \subset \mathcal{N}$$

donc $\mathcal{O}_f'$ est nilpotent.

Le théorème s'étend sans peine à une algèbre de Lie abstraite . Si $\mathcal{O}_f$ est intégrable, la représentation adjointe, est en effet une algèbre de Lie de matrices dont le dérivé est contenu dans une algèbre nilpotente . Il existe donc t tel que $A_1 A_2 \dots A_t = 0$ pour tous A_i dans $\mathcal{O}_f'$; donc pour tout x de $\mathcal{O}_f$, on a $A_1 A_2 \dots A_t x = 0$; or ceci s'écrit en revenant aux éléments de l'algèbre abstraite:

$$[a_1 [a_2 \dots [a_t x] \dots]] = 0, \text{ ou, en prenant } x \text{ dans } \mathcal{O}_f' :$$

$$(\mathcal{O}_f')^{t+1} = 0$$

C.Q.F.D.

2. Détermination des groupes simples réels.

D'après ce qui a été vu précédemment, le problème consiste à trouver tous les groupes réels d'ordre r correspondant à chacun des groupes simples complexes $\mathcal{O}_f^*$ d'ordre r déterminés ci-dessus . Or la méthode que nous avons utilisée

dans cette détermination nous s permis, en normant convenablement les vecteurs de base de $\mathcal{O}_f^*$ de donner à ce groupe une structure réelle . ($N_{\alpha\beta}$ réels) et de mettre la forme quadratique $\mathcal{G}_2$ sous la forme :

$$\mathcal{G}_2 = \Phi(\lambda) - \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \xi^{-\alpha}$$

où $\Phi(\lambda) = g_{ik} \lambda^i \lambda^k$ est définie positive .

De là résulte déjà qu'à $\mathcal{O}_f^*$ correspondent deux groupes réels simples évidents :

D'abord le groupe obtenu en remplaçant les paramètres complexes de $\mathcal{O}_f^*$ par des paramètres réels ; pour ce groupe la forme quadratique $\mathcal{G}_2$ contient certainement des carrés positifs (provenant de Φ) .

Puis, on peut remarquer que cette forme $\mathcal{G}_2$ serait définie négative si on donnait aux λ^i des valeurs imaginaires pures et à $\xi^{\alpha}, \xi^{-\alpha}$, des valeurs imaginaires conjuguées . Or on vérifie bien aisément que le crochet de deux éléments de $\mathcal{O}_f^*$ dont les coordonnées sont de cette nature, est encore un élément de ce type . Comme tous ces éléments s'expriment linéairement au moyen de la base $(ih_1, \dots, ih_n, u_{\alpha} + u_{-\alpha}, i(u_{\alpha} - u_{-\alpha}), \dots)$ avec des paramètres réels , leur ensemble est un nouveau groupe simple réel $\mathcal{O}_f$ déduit de $\mathcal{O}_f^*$ et pour lequel la forme quadratique $\mathcal{G}_2$

est définie négative ⁽¹⁾.

Les deux groupes ainsi obtenus se distinguent par leur caractère δ , c'est-à-dire par la différence entre le nombre des carrés positif et le nombre des carrés négatifs dans G_2 .

L'existence d'un groupe réel simple pour lequel G_2 est définie négative entraîne des conséquences importantes, mais qui sortent du point de vue algébrique, qui fait l'objet de ces conférences. On peut en effet montrer directement, à partir de cette propriété, que le groupe adjoint Γ du groupe continu G engendré par le groupe infinitésimal considéré est clos. On en déduit ensuite que G lui-même est clos en montrant qu'à une transformation de Γ ne correspondent dans G qu'un nombre fini d'éléments, circonstance due encore au fait que G_2 est définie.

Cela étant, Monsieur Cartan a montré en outre qu'étant donné un groupe simple ouvert à paramètres réels, on peut toujours trouver un groupe clos de même structure. Et

(1) Les résultats sur lesquels on s'appuie ici étant valables pour un groupe semi-simple, on voit qu'à tout groupe semi-simple à paramètres complexes correspond un groupe semi-simple à paramètres réels pour lequel la forme G_2 est définie négative.

la recherche des groupes réels ouverts d'une structure simple donnée revient à celle des substitutions isomorphiques involutives du groupe clos de la structure donnée . Les différents types de groupes simples réels ainsi obtenus se distinguent les uns des autres par leur caractère . Enfin c'est à ce problème de la détermination des différentes formes réelles qu'est susceptible de prendre un groupe simple de structure complexe donnée que se ramène la recherche des espaces de Riemann dont la courbure est conservée par le transport parallèle .

BIBLIOGRAPHIE

H. WEYL .- Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen II, Math. Zeitsch. 24 . p.328 .
The structure and representation of continuous groups (Princeton, 1933) .

B. I. van der WAERDEN .-

Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen, Math. Zeitsch. 37, p.446 .

E. CARTAN .- Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse Paris , Nony 1894)

Les groupes réels simples finis et continus (Ann. Ec. Normale , sup. 1914, p.261) .

Groupes simples clos et ouverts et géométrie Riemannienne (Journal math. 1939, p.1).

N. JACOBSON .- Rational methods in the theory of Lie algebras (Annals of math. 36 (1935) , p.875).
