JEAN LERAY

Propriétés topologiques des transformations continues

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. nº 3, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A3_0>

III.- C.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

Propriétés topologiques des transformations continues

Exposé fait par M. Jean LERAY, le lundi 18 Décembre 1935

Exemplaire n° 187

I.- Définition des multiplicités

1.- Une pseudo-multiplicité fermée à n dimensions est par définition un complexe fini qui possède les propriétés suivantes: chacun de ses simplexes à k ($< n$) dimensions est frontière d'au moins un simplexe à n dimensions ; chacun de ses simplexes à n-1 dimensions est frontière de deux simplexes à n dimensions ; deux quelconques de ses simplexes à n dimensions peuvent être reliés par une chaine de simplexes à n et n-1 dimensions, deux à deux incidents .

Une pseudo-multiplicité est dite orientable quand on peut orienter chacun de ses simplexes à n dimensions en sorte que les orientations induites dans chaque simplexe à n-1 dimensions par les deux simplexes incidents à n dimensions soient opposables .

Une multiplicité à n dimensions est une pseudo-multiplicité à n dimensions dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la boule à n dimensions :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$$

II.- Homomorphisme engendré par une transformation

(aperçu sommaire)

2.- Définition de cet homomorphisme.

Soient deux complexes K_1^n et K_2^m ; soit une transformation continue g qui représente K_1^n dans K_2^m (c'est-à-dire qui attache continûment à tout point de K_1^n un point de K_2^m). En vertu de la définition des chaines singulières, les chaines singulières de K_1^n sont transformées en chaines singulières de K_2^m et les relations de frontière sont conservées :

(1) $F\,g\,(C^k) = g\,(F\,C^k)$ (F : frontière de ...)

g représente donc homomorphiquement le groupe d'homologie de K_1^n dans le groupe d'homologie de $K2^m$.

3.- Une homotopie laisse invariant cet homomorphisme .

Faisons subir à g une homotopie, c'est-à-dire une modification continue . On constate que l'homomorphisme engendré par g ne varie pas ; la démonstration se relie à celle du théorème fondamental de la conférence précédente (B.p.19; une chaine singulière peut être déformée continûment en une chaine homologue non singulière).

4.- Remarque.

Supposons que K_1^n et K_2^m soient des multiplicités fermées . Envisageons deux cycles simpliciaux de K_1^n , à i et k dimensions ($i+k \geq n$), leurs simplexes constituent deux hypersurfaces qui se coupent suivant une hypersurface à $i+k-n$ dimensions ; on définit, avec des simplexes portés par cette hypersurface, un cycle à $i+k-n$ dimensions, qui est dit <u>produit</u> des cycles précédents . Ceci permet de définir le produit de deux classes d'homologie ; les classes d'homologie de K_1^n constituent donc un anneau.

L'homomorphisme engendré par g représente l'anneau d'homologie de K_1^n sur celui de K_2^m ; nous avons vu que cet homomorphisme respecte l'addition.

<u>Il ne respecte pas la multiplication</u> (H.Hopf).

5.- <u>Exemple</u>.

K_2^m est la sphère à n dimensions S^n :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{n+1}^2 = 1)$$

L'homomorphisme des groupes d'homologie de dimensions 1;... n-1 , de K_1^n sur ceux de S^n est banal , puisque chacun de ces derniers se réduit au seul élément zéro . Seule la dimension n peut donc être intéressante .

6.- <u>Cas où K_1^n et K_2^m sont des pseudo-multiplicités fermées, orientées, à nombre égal de dimensions</u>.

Les simplexes à n dimensions de K_1^n , orientés de façon cohérente, constituent un cycle à n dimensions modulo ϑ : Z_1^n . Les multiples de Z_1^n constituent le groupe d'homologie à n dimensions de K_1^n (mod. ϑ).

Nous avons :

$$g(Z_1^n) = \delta\, Z_2^n \tag{2}$$

δ reste invariant quand g varie continûment; δ est nommé <u>degré topologique</u> de g.

Supposons que g soit simpliciale, c'est-à-dire que g soit linéaire sur chacun des simplexes de K_1^n et transforme chacun d'eux en un simplexe de K_2^n . Envisageons un simplexe à n dimensions de K_2^n . Il figure δ fois dans le second membre de (2) . S'il est recouvert par α simplexes à n dimensions de K_1^n avec conservation de l'orientation et par β avec changement de l'orientation, alors il figure $\alpha - \beta$ fois au premier membre de (2) . Nous pouvons donc dire que δ est <u>le nombre algébrique de fois que</u> $g(K_1^n)$ <u>recouvre</u> K_2^n .

<u>Exemple</u> : K_1^2 et K_2^2 sont la sphère S^2 . Soient θ la latitude, φ la longitude de cette sphère . La transformation continue

$$\theta' = \theta \qquad\qquad \varphi' = \varphi$$

où δ est un entier positif, négatif ou nul, a pour degré topologique δ .

7.- <u>Théorème de H.HOPF</u>.

Nous énoncerons ce théorème sans le démontrer . (Voir H.Hopf, commentarii Math.Helvetici t.V, p.39 ,1933).

Soient une pseudo-multiplicité et une sphère orientées à n dimensions, K^n et S^n ; soit g une transformation continue de K^n dans S^n .

Soit Z^n le cycle que constituent les simplexes à n dimensions de S^n , orientés comme S^n . Tout cycle (mod.0,2,3,.....) de S^n est multiple de Z^n .

Envisageons sur K^n un système de cycles (mod. 0,2,3,....) à n dimensions, les cycles Z_i^n ,tels que tout cycle à n dimensions de K^n soit homologue à un multiple de l'un des Z_i^n (mod.0,2,3,....) . Ce système est fini .

Posons

$$g(Z_i^n) = \delta_i Z^n$$

Les "degrés" δ_i sont des entiers , mod.0,2,3,.....; leur nombre est fini; ils restent invariants quand g varie continûment .

Théorème : Pour que deux transformations de K^n dans S^n puissent être réduites continûment l'une à l'autre, il faut et il suffit que chacun des degrés δ_i aient la même valeur pour ces deux transformations.

Remarque I .

Deux transformations g et h de K^n dans un plan P^m sont homotopes : la transformation (1) $kh + (1-k)g$, qui

---

(1) $kh + (1-k)g$ est le point du segment $\overline{hg}$ qui divise ce segment dans le rapport $\dfrac{k}{1-k}$

dépend continûment du paramètre k, se réduit à g pour $k=0$, à h pour $k=1$. L'homomorphisme engendré par une transformation de K^n dans P^m est banale et ne définit aucun invariant.

Remarque II. Soient deux transformations g et h d'un complexe K_1^n dans un complexe K_2^m ; si K_2^m n'est ni un plan, ni une sphère, alors il est vraisemblable que l'étude de l'homologie ne peut plus conduire à une condition suffisante pour que g et h soient homotopes.

III.- Degré topologique d'une transformation

8.- Une transformation simpliciale est une transformation continue, définie sur un complexe et linéaire sur chacun des simplexes de ce complexe.

Toute transformation continue, définie sur un complexe, peut être approchée arbitrairement près par une transformation simpliciale, à condition d'effectuer une subdivision assez finé du complexe donné (Brouwer).

9. - Définition du degré topologique (Brouwer).

Soit un ensemble ouvert Ω d'une pseudo-multiplicité orientée, à m dimensions ; soit Ω' sa frontière; soit une transformation g, définie et continue sur $\Omega + \Omega'$ qui donne de $\Omega + \Omega'$ une image continue dans une pseudo-multiplicité orientée M à m dimensions . Supposons qu'un point B de M, étranger à l'image $g(\Omega')$ de la frontière soit l'image d'un nombre fini de points A_1 , ... A_{p+n} de Ω, en lesquels g est simpliciale ; supposons que A_1 ,.... A_p soient intérieurs à des simplexes à m dimensions que g transforme en simplexes orientés comme M ; supposons que A_{p+1},.....A_{p+n} soient intérieurs à des simplexes à m dimensions que g transforme en simplexes dont l'orientation est opposée à celle de M ; nous dirons alors que le degré topologique de g en B est p-m .

Supposons que B varie et tranverse l'image d'un simplexe à m-1 dimensions ; lors de cette traversée, deux circonstances différentes peuvent se produire :

1) B sort de l'image d'un simplexe à m dimensions pour péhétrer dans l'image , orientée similairement d'un autre simplexe à m dimensions ,

2) B pénètre dans (ou quitte) les images , orientées en sens opposés, de deux simplexes à m dimensions .

Dans chacun de ces deux cas, p-n ne varie pas .

Le degré topologique est donc constant sur un continu de M <u>quand ce continu est étranger à $g(\Omega')$</u> et quand il est l'image de points en lesquels g est simpliciale. Il en résulte que ce degré reste constant si g varie continûment en respectant ces conditions .

<u>Etant donnés la transformation continue g et un point</u>

B étranger à g(Ω') , les transformations simpliciales qui approchent suffisamment g ont donc le même degré topologique en B ; ce degré sera nommé : degré topologique en B de la transformation g envisagée sur Ω .

Les propriétés suivantes sont évidentes dans le cas des transformations simpliciales, et par suite exactes dans le cas des transformations continues :

1) le degré topologique reste constant quand B, Ω et g varient continûment sans que B rencontre g(Ω').

2) Si $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 étant deux domaines étrangers l'un à l'autre, si B est étranger à g($\Omega_1 + \Omega_2$), alors le degré en B de g envisagé sur Ω est la somme des degrés de g envisagé sur Ω_1 , puis sur Ω_2 .

3) B appartient nécessairement à g(Ω) quand le degré en B de g envisagé sur Ω n'est pas nul ; (quand ce degré est nul, B peut appartenir ou ne pas appartenir à g(Ω)).

Signalons que ces trois propriétés du degré permettent de discuter les équations du type:

$$g(A) = B$$

où g et B sont donnés, l'inconnue étant le point A .

10.- Degré topologique du produit de deux transformations.

Etant donnée la transformation g, continue sur $\Omega + \Omega'$ considérons une transformation h , continue sur g($\Omega + \Omega'$)

qui donne de cet ensemble une image appartenant à une nouvelle pseudo-multiplicité orientée .

Ω se compose de domaines connexes D_1 ,......, D_i,... les points du domaine D_i constituent une classe d'homologie a_i^0 de Ω pour la dimension σ ; les a_i^0 constituent une base d'homologie pour Ω et cette dimension .

$g(\Omega')$ décompose en domaines la pseudo-multiplicité qui porte $g(\Omega+\Omega')$; soient b_j^0 les classes d'homologie de dimension σ dont chaque élément représente l'un de ces domaines . Envisageons de même les domaines déterminés par $hg(\Omega')$ et les classes d'homologie c_ℓ^0 qui leur correspondent .

Soit δ_j le degré en les points de la classe b_j^0 de g envisagée sur Ω ; soit γ_{ji} le degré en ces points de cette transformation envisagée sur D_i ; nous écrirons :

$$(1) \qquad g^{-1}(\delta_j b_j^0) = \sum_i \gamma_{ji}\, a_i^0$$

Cette relation a, au second membre, un nombre fini de termes non nuls ; elle doit être lue comme suit :

Un point de la classe b_j^0 est recouvert δ_j fois , à savoir:

γ_{j1} fois par les points de la classe a_1^0

γ_{j2} fois " " " " " " a_2^0

etc .....

De même, δ'_ℓ étant le degré en un point de c_ℓ^o de hg envisagée sur

(2) $\qquad (hg)^{-1}(\delta'_\ell c_\ell^o) = \sum_i \gamma''_{\ell i} a_i^o$

Enfin, un point de la classe c_ℓ^o est l'image par h de points B que g recouvre chacun un nombre de fois égal à son degré topologique :

(3) $\qquad h^{-1}(\delta'_\ell c_\ell^o) = \sum_j \gamma'_{\ell j} \delta_j b_j^o$

La conbinaison de (1) et (3) nous donne :

(4) $\qquad g^{-1}h^{-1}(\delta'_\ell c_\ell^o) = \sum_{j,i} \gamma'_{\ell j} \gamma_{ji} a_i^o$

Il est évident dans le cas des transformations simpliciales donc vrai dans tous les cas, que <u>cette formule (4) doit être équivalente à (2)</u>, c'est-à-dire :

(5) $\qquad \gamma''_{\ell i} = \sum_j \gamma'_{\ell j} \gamma_{ji}$

Nous allons montrer comment ce fait a pour corollaire le théorème de Jordan .

IV.- Théorème de JORDAN généralisé

11.- Enoncé du théorème.

Soient deux hyperplans à m dimensions, P_1^m et P_2^m où sont tracés deux ensembles fermés F_1 et F_2 : <u>si F_1 et</u>

F_2 <u>sont homéomorphes, ils décomposent respectivement P_1^m et P_2^m en le même nombre de domaines</u>.

<u>Exemple</u>: L'image bicontinue d'un cercle décompose le plan en deux domaines (Jordan). L'image bicontinue d'un cercle ne délimite dans l'espace qu'un seul domaine .

12.- <u>Prolongement de l'homéomorphie</u>.

F_1 et F_2 sont homéomorphes, autrement dit, il existe une correspondance ponctuelle bicontinue entre ces deux ensembles . Il est aisé de prolonger cette correspondance en une transformation g qui transforme continûment P_1^m dans P_2^m , et une transformation h qui tranforme P_2^m dans P_1^m ; on peut même faire en sorte qu'au voisinage de l'infini g et h soient linéaires, soient inverses l'un de l'autre et conservent l'orientation .(Faire en sorte que g et h soient <u>partout</u> inverses l'un de l'autre est en général <u>impossible</u> sinon aussi difficile que la démonstration du théorème en vue) .

Posons :

$$\Omega_1 = P_1^m - F_1 \qquad\qquad \Omega_2 = P_2^m - F_2$$

$g(F_1)$ appartient à F_2 , $h(F_2)$ à F_1 , $hg(F_2)$ à F_1 et $gh(F_2)$ à F_2 .

$g(\Omega_1)$ recouvre les points de Ω_2 autant de fois

que $g(P_1^m)$, c'est-à-dire autant de fois que $g(P_1^m)$ recouvre P_2^m ; ce nombre est +1 , vu le comportement de g à l'infini.
Plus généralement :

$g(\Omega_1)$	recouvre	+1	fois les points de	Ω_2 ;
$h(\Omega_2)$	"	+1	" "	Ω_1 ;
$hg(\Omega_1)$	"	+1	" "	Ω_1 ;
$gh(\Omega_2)$	"	+1	" "	Ω_2 ;

Dans les formules (1) et (3) , où $c_\ell^o = a_\ell^o$, nous devons donc poser $\delta_j = 1$; il vient :

(6) $$g^{-1}(b_j^o) = \sum_i \gamma_{ji}\, a_i^o$$

(7) $$h^{-1}(a_i^o) = \sum_j \gamma'_{ij}\, b_j^o$$

On peut réduire continûment hg à être l'identité sans que hg cesse d'être l'identité sur Ω'_1 : il suffit d'introduire la transformation

$$(1-k)\, hg + k\, I$$

I étant la transformation identique, le paramètre k variant de 0 à 1 . La formule (2) s'écrit donc :

(8) $$(hg)^{-1}(a_i^o) = a_i^o$$

De même :

(9) $$(gh)^{-1}\,(b_j{}^o) = b_j{}^o$$

13.- Démonstration du théorème .

La formule (8) exprime que la matrice γ''_j est la matrice identique . D'après (5), le produit des matrices $\gamma'_{\ell j}$ et γ_{ji} est cette matrice identique . Ceci implique que l'indice j a au moins autant de valeurs que l'indice i = F_2 détermine dans $P2^m$ au moins autant de domaines que F_1 dans $P_1{}^m$. C.Q.F.D.

Variante .

Soient $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ les groupes d'homologie à 0 dimensions de Ω_1 et Ω_2 . La relation (6) exprime que g^{-1} établit un homomorphisme de $\mathfrak{B}_2$ dans $\mathfrak{B}_1$; la relation (7) exprime que h^{-1} établit un homomorphisme de $\mathfrak{B}_1$ dans $\mathfrak{B}_2$. D'après le paragraphe 10, (8) et (9) doivent résulter de (6) et (7) ; les deux produits de ces deux homomorphismes constituent donc les homomorphismes identiques de $\mathfrak{B}_1$ sur $\mathfrak{B}_1$ et de $\mathfrak{B}_2$ sur $\mathfrak{B}_2$. Par suite, g^{-1} établit un isomorphisme entre $\mathfrak{B}_1$ et un sous-groupe de $\mathfrak{B}_2$; h^{-1} établit un isomorphisme entre $\mathfrak{B}_2$ et un sous-groupe de $\mathfrak{B}_1$; les deux produits de ces deux isomorphismes doivent être les isomorphismes identiques de $\mathfrak{B}_1$ sur $\mathfrak{B}_1$ et de $\mathfrak{B}_2$ sur $\mathfrak{B}_2$. Il ne peut donc s'agir de vrais sous-groupes : g^{-1} et h^{-1} établissement un isomorphisme entre $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$.

l'existence de cet isomorphisme prouve le théorème .

V.- L'homomorphisme engendré par l'inverse d'une transformation ; le théorème d'ALEXANDROFF

(H.Freudenthal [1], compositio math. t.II, p.163,1935)

14.- Définition de cet homomorphisme.

Soit un ensemble ouvert Ω d'une pseudo-multiplicité orientée à m dimensions; soit une transformation g, continue sur $\Omega + \Omega'$,qui donne de $\Omega + \Omega'$ une image contenue dans une pseudo-multiplicité orientée M , à m dimensions. Soit une chaine de M, connexe, étrangère à $g(\Omega')$ et à k dimensions : C^k . Soit δ le degré constant le long de C^k de g envisagé sur Ω , g et C^k étant supposés simpliciales, nous allons définir une chaine de Ω , que nous nommerons $g^{-1}(\delta C^k)$.

Nommons T^m et U^m les simplexes à m dimensions de Ω et de M orientés positivement ; par hypothèse, g transforme chaque T^m en un $\pm U^m$. Soient u^k les simplexes constituant C^k ; δC^k est une combinaison linéaire de δu^k ; puisque g^{-1} doit opérer linéairement sur δC^k , il nous suf-

---

(1) On peut alléger ce travail du prg.L.4 et de tout le prg5 (p.172-176) en imposant à g et h , comme nous le faisons, d'établir une correspondance biunivoque entre deux voisinages, cette simplification n'avait d'ailleurs pas échappée à H.Freudenthal.

fira de définir $g^{-1}(\delta u^k)$.

Il n'est pas gênant pour la suite de supposer que u^k est, ou bien intérieur à un U^m, que nous nommerons $U_o{}^m$ ou bien intérieur à la frontière U^{m-1} de deux U^m, que nous nommerons $U_1{}^m$ et $U_2{}^m$. Traçons dans Ω tous les simplexes $t_i{}^k$ tels que

$$g(t_i{}^k) = u^k$$

nous poserons

$$g(\delta u^k) = \sum_i \varepsilon_i t_i{}^k$$

les ε_i valant ± 1 et étant définis comme suit :

Si $t_i{}^k$ est intérieur à un T^m, que nous nommerons $T_i{}^m$

$$g(T_i{}^m) = \varepsilon_i U_o{}^m$$

Si $t_i{}^k$ est intérieur à un T^{m-1}, frontière de deux T^m que nous nommerons T_{1i}^m et T_{2i}^m, nous poserons

$$g(T_{1i}^m) = \varepsilon_{1i} U_1{}^m, \quad g(T_{2i}^m) = \varepsilon_{2i} U_2{}^m, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}}{2}$$

On constate sans peine que g^{-1} respecte les relations de frontière :

(10) $\quad g^{-1}(\delta F C^k) = F g^{-1}(\delta C^k) \qquad$ (F : frontière de ...)

Par suite, si C^k est un cycle, $g^{-1}(\delta C^k)$ est un cycle; si $C_1{}^k$ et C_2^k sont deux cycles homologues dans $M - g(\Omega')$ $g^{-1}(\delta C_1{}^k)$ et $g^{-1}(\delta C_2{}^k)$ sont homologues dans Ω.

Nommons $\mathcal{B}_1$ le groupe d'homologie de Ω ; soit $a_1{}^k$

une base de $\mathcal{B}_1$; chaque a_i^k est une classe de cycles homologues à k dimensions . Soit $\mathcal{B}_2$ le groupe d'homologie de l'ensemble ouvert $M - g(\Omega')$; soit b_j^k une base de $\mathcal{B}_2$; nous supposerons que chacune des classes b_j^k contient un cycle connexe B_j^k ; le degré de g, envisagé sur Ω , est constant le long de B_j^k ; soit δ_j.

$g^{-1}(\delta_j B_j^k)$ appartient à une classe $\sum\limits_i \gamma_{ji}\, a_i^k$

les coefficients δ_j , γ_{ij} sont indépendants du choix de B_j^k dans b_j^k . Nous exprimerons ce fait en écrivant :

(11) $$g^{-1}(\delta_j b_j^k) = \sum_i \gamma_{ji}\, a_i^k$$

La formule (11) reste invariante lorsque g varie continûment à l'intérieur de Ω , en associant constamment à chaque point de Ω' le même point de M (En effet, il est loisible de supposer que g ne varie pas sur un B_j^k convenablement choici à chaque instant). On peut donc donner un sens à (11) lorsque g n'est pas simpliciale sur C^k : on écrit la formule qui vaut pour les transformations simpliciales approchant g .

Envisageons le sous-groupe de $\mathcal{B}_2$ qu'engendrent les éléments $\delta_j b_j^k$; d'après (11) , g^{-1} établit un homomorphisme de ce sous-groupe dans $\mathcal{B}_1$.

Signalons que :

(12) $$g\, g^{-1}\,(\delta_j\, b_j^k) = \delta_j\, b_j^k$$

15.- Produit de transformations.

Envisageons comme au prg.10 une seconde transformation h, définie sur $g(\Omega+\Omega')$. Soit c_ℓ^k une base du groupe d'homologie de l'ensemble ouvert, complémentaire de $hg(\Omega')$ dans la pseudo-variété qui porte $hg(\Omega+\Omega')$. Chaque classe c_ℓ^k est supposée contenir un cycle connexe C_ℓ^k ; soit δ_ℓ' le degré, constant sur ce cycle, de hg envisagé sur Ω. Nous avons les formules analogues à (1), (2) et (3) :

(13) $$g^{-1}(\delta_j b_j^k) = \sum_i \gamma_{ji}\, a_i^k$$

(14) $$h^{-1}(\delta_\ell' c^k) = \sum_j \gamma'_{\ell j}\, \delta_j b_j^k$$

(15) $$(hg)^{-1}(\delta_\ell' c_\ell^k) = \sum_i \gamma''_{\ell i} a_i^k$$

Comme au prg.10, (15) soit être une conséquence de (13) et (14).

16.- Théorème d'ALEXANDROFF.

Démonstration

Nous adopterons les notarions du prg.12. Nous avons évidemment les formules, plus générales que (6) et (7) :

$$(16) \qquad g^{-1}(b_j{}^k) = \sum_i \gamma_{ji}\, a_i{}^k$$

$$(17) \qquad h^{-1}(a_i{}^k) = \sum_j \gamma'_{ij} b_j{}^o$$

De ces deux formules doit résulter :

$$(hg)^{-1}(a_i{}^k) = a_i{}^k$$

$$(gh)^{-1}(b_j{}^k) = b_j{}^k$$

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ les groupes d'homologie de Ω_1 et Ω_2. Le raisonnement du prg.13 (variante) prouve que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont isomorphes . Donc :

Théorème.- Soient deux ensembles fermés homéomorphes, F_1 et F_2, situés, l'un sur l'hyperplan $P_1{}^m$, l'autre sur l'hyperplan $P_2{}^m$. Les groupes d'homologie des ensembles ouverts $P_1{}^m - F_1$ et $P_2{}^m - F_2$ sont isomorphes .

Compléments

Le raisonnement et la conclusion restent les mêmes si l'on suppose que F_1 et F_2 sont tracés non sur deux hyperplans mais sur deux hypersphères ; il suffit de compléter chacun de ces hyperplans $P_1{}^m$ et $P_2{}^m$ par un point à l'infini .

Le raisonnement employé peut prouver plus : l'isomorphie des tableaux d'intersections et d'enlacements des éléments de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

VI.- Résumé d'un mémoire de H.HOPF

(Journal für reine u.angew.Math. T.163, 1930)

17.- Envisageons deux multiplicités fermées, orientées M_1 et M_2 , et une transformation g de M_1 que M_2 .

Nous avons déjà dit au prg.4 que g établit un homomorphisme du groupe d'homologie de M_1 dans celui de M_2 .

Au contraire, g^{-1} établit un homomorphisme de ce second anneau dans le premier .

Par voie purement algébrique, H.HOPF tire de ce fait une série de théorèmes dont voici un exemple :

Théorème.- Si le degré topologique δ de g diffère de 0 , le $k^{ième}$ nombre de Betti de M_1 est au moins égal à celui de M_2 :

Exemple : $\delta = 0$ si M_1 est une sphère , M_2 un tore .

VII.- Topologie des espaces abstraits.

18.- Préliminaires .

Nous envisagerons des espaces abstraits de Banach (linéaires et métriques) ; ce sont ceux qu'on rencontre le plus fréquemment en analyse (ex.: espace de fonctions continues ; espace de fonctions höldériennes d'exposant donné ; espace de Hilbert).

Un domaine borné d'un espace de Banach, en général, n'est pas compact et ne peut pas être assimilé à un complexe. Il semble d'abord que les propriétés de la topologie combinatoire y tombent en défaut .

Certes, il est facile de définir le groupe d'homologie d'un domaine appartenant à un espace de Banach et de définir l'homomorphisme qu'engendre une transformation continue opérant dans un tel espace (prg.2 et 3).

Mais dans l'espace de Hilbert , la correspondance bicontinue qui associe au point $(x_1 , x_2 , \ldots)$ le point $(0 , x_1 , x_2 , x_3 \ldots)$ transforme l'un en l'autre un hyperplan de l'espace et l'espace entier . On contredit aisément le théorème de Jordan. On construit aisément des transformations pour lesquelles il est absurde d'admettre qu'il existe un degré topologique possédant les propriétés usuelles .

Ces difficultés ont longtemps arrêté le développement du calcul fonctionnel .

19.- Un type spécial de transformation.

On vérifie aisément le lemme que voici :

Lemme : Soit une transformation continue g opérant dans un espace euclidien E^m et qui laisse globalement invariants les hyperplans à plus de p dimensions parallèles à une direction donnée . Le degré topologique de g (prg.9) et l'homomorphisme engendré par g^{-1} (prg.14) sont les mêmes quand on envisage g comme opérant dans E^m tout entier et quand on envisage g comme opérant dans un hyperplan à plus de p dimensions parallèle à la direction donnée .

Considérons une transformation g, qui opère dans un espace de Banach et qui est "dégénérée" , c'est-à-dire qui laisse globalement invariants les hyperplans à nombre fini de dimensions, parallèles à une direction donnée . Le lemme ci-dessus nous permet de définir le degré topologique de g et l'homomorphisme engendré par g^{-1} comme étant le degré et l'homomorphisme qui s'introduisent quand on envisage g comme opérant dans l'un de ces hyperplans .

Ce degré et cet homomorphisme restent invariants quand g varie continûment ; ceci permet d'étendre leurs définitions aux transformations qui sont limites de transformations dégénérées . Celles-ci sont les transformations du type :

$$y = x + \mathcal{F}(x) \tag{18}$$

x étant un point de l'espace de Banach , y , son transformé, $\mathcal{F}(x)$ étant un point qui dépend continûment de x ,et qui décrit un ensemble compact quand x décrit un domaine de définition.

Par conséquent, le degré topologique d'une telle transformation existe ; et le théorème d'Alexandroff vaut quand l'homéomorphisme entre les deux ensembles fermés F_1 et F_2 est une correspondance du type (18) . (Le premier théorème de cette nature est dû à J.Schlauder ; il s'agissait de "l'invariance du domaine" [1]).

L'existence de ce degré topologique permet de discuter les équations du type , en fait très usuel :

$$x + \mathcal{F}(x) = 0$$

(existence d'au moins une solution; continuité des solutions par rapport aux données, unicité de la solution ; ordre d'approximation d'une solution approchée . Voir : Leray et Schauder , Annales E.N.S. t.51, 1934 , et une conférence à paraître dans l'enseignement mathématique).

D'ailleurs seule la topologie peut fournir des moyens permettant de discuter les équations dont il est impossible ou compliqué de construire les solutions au moyen des séries .

---

(1) L'invariance du domaine est un corollaire du théorème de Jordan .