Charles Ehresmann

Topologie combinatoire, groupes d'homologie

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 3 (1935-1936), exp. nº 2, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1935-1936__3__A2_0>

III.-B.

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Troisième année 1935-1936

TOPOLOGIE

Topologie combinatoire . - Groupes d'homologie.

Exposé fait par M. Charles EHRESMANN, le 2 Décembre 1935

Exemplaire n° 187

Le but de cette conférence est d'exposer, d'une façon nécessairement sommaire, les notions essentielles ainsi que les premiers résultats fondamentaux de la <u>topologie combinatoire</u> . Je ne cherche pas à donner une définition précise du terme "topologie combinatoire". Il ne désigne pas une branche spéciale mais simplement une méthode spéciale de la topologie, méthode qui convient à la résolution de certains problèmes et qui permet de déterminer un certain nombre d'invariants topologiques d'un espace topologique.Cette méthode combinatoire repose surtout sur les notions de <u>simplexe</u> et de <u>complexe</u>. Elle s'applique directement à tout espace qui peut être considéré comme un agrégat de simplexes, c'est-à-dire comme un complexe . Par exemple, toute variété algébrique peut être considérée comme un complexe . Plus généralement, d'après un résultat publié tout récemment par M.Nöbeling, toute variété topologique admet une subdivision formant un complexe ; on désigne par variété topologique, un espace topologique normal satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions . La méthode combinatoire s'applique même à des espaces qui ne sont pas des complexes mais qui peuvent être approximés par des complexes ou définis par des suites de complexes . Le champ d'application de la topologie combinatoire comprend ainsi tous les ensembles fermés de l'espace ordinaire à n dimensions ainsi que tous les espaces métriques compacts .

Je commencerai par définir les notions de simplexe et de complexe ,Je définirai ensuite les groupes d'homologie et les invariants numériques qui s'en déduisent. Je démontrerai enfin l'invariance topologique des groupes d'homologie.

I. - Définitions .

Simplexe à r dimensions .

Soit R^n l'espace cartésien à n dimensions; chaque point de R^n est défini par l'ensemble de n nombres réels. Soient $P_0, P_1, P_2, \dots, P_r$, r+1 points de l'espace R^n et supposons que ces points n'appartiennent pas à un même espace linéaire à moins de r dimensions .

Attachons à chacun des points P_i , une masse μ_i telle que :

$$(1) \qquad \sum_i \mu_i = 1 \qquad\qquad \mu_i \geq 0$$

Le centre de gravité de ces masses est le point

$$P = \sum_i \mu_i P_i$$

Les quantités μ_i sont appelées les coordonnées barycentriques de P . L'ensemble des points P dont les coordonnées barycentriques satisfont aux conditions (1) forme un espace topologique σ^r qu'on appelle simplexe à r dimensions . Le simplexe est complètement défini par ses $r+1$ sommets . En annulant $r-k$ des coordonnées barycentriques μ_i , le point P engendre un simplexe qu'on appelle face à k dimensions de e^r .

<u>Représentation barycentrique</u> .

Soient deux simplexes e^r et e_1^s tels que $r \geq s$. Faisons correspondre à chaque sommet P_i de e^r un sommet $Q_{t(i)}$ de e_1^s de façon que tout sommet de e_1^s corresponde au moins à un sommet de e^r . Faisons correspondre au point $P = \sum_i \mu_i \rho_i$ le point $Q = \sum_i \mu_i Q_{t(i)}$. La correspondance entre P et Q définit une représentation barycentrique du simplexe e^r sur le simplexe e^s .

<u>Simplexe orienté</u>

On définit une orientation d'un simplexe en choisissant une certaine permutation de ses sommets . Deux permutations définissent la même orientation ou deux orientations opposées suivant qu'elles diffèrent par une permutation paire ou impaire. Tout simplexe non orienté correspond ainsi à deux simplexes orientés qu'on peut désigner par e^r et $-e^r$. Si e^r est défini par $(P_0 , P_1 ,\ldots, P_r)$, le simplexe orienté $-e^r$ est défini par $(P_1 , P_0 ,\ldots, P_r)$.

<u>Simplexe topologique</u> .

Soit A un espace topologique homéomorphe à un simplexe rectiligne e^r . L'espace A associé à une représentation topologique de e^r sur A définit un simplexe topologique E^r . Si A est considéré comme l'image topologique d'un autre simplexe rectiligne e_1^r, il définit un simplexe topologique E_1^r . Les deux simplexes E^r et E_1^r sont considérés comme identiques lorsque les points de e^r et e_1^r qui sont représentés par le même point de A se correspondent par une transformation barycentrique . Les notions de sommet, face, orientation, correspondance et coordonnées barycentriques sont alors applicables à un simplexe topologique . D'une façon générale, nous considérons par la suite des simplexes topologiques.

Complexe simplicial

Un complexe simplicial est un espace topologique K défini par l'ensemble d'un nombre fini ou dénombrable de simplexes, satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) . Tout point de K appartient à un nombre fini des simplexes donnés et à un simplexe au moins .

(2) . Les faces d'un simplexe de l'ensemble des simplexes appartiennent aussi à cet ensemble .

(3) . Etant donnés deux simplexes de l'ensemble considéré, ou bien ils n'ont pas de points communs, ou bien ils ont une face commune, ou bien l'un est une face de l'autre.

(4) . Si l'on considère un voisinage d'un point P dans chacun des simplexes auxquels ce point appartient, la réunion de ces voisinages définit un voisinage de P dans le complexe K.

Exemples : La sphère ou un polyèdre admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes finis . l'espace R^n ou un domaine quelconque dans K^n admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes infinis.

Si on peut établir une correspondance biunivoque entre les sommets d'un complexe K et ceux d'un complexe K_1 de façon que les sommets d'un simplexe de l'un des complexes correspondent aux sommets d'un simplexe de l'autre, cette correspondance définit une transformation topologique simpliciale de K en K_1 , c'est-à-dire une transformation topologique par laquelle tout simplexe de K subit une transformation barycentrique . En désignant par K^n un complexe composé de simplexes à n dimensions, ou plus, et en admettant au moins un simplexe à n dimensions, on démontre facilement le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : <u>Tout complexe K^n est simplicialement homéomorphe à un complexe rectiligne de l'espace R^{2n+1}</u>

<u>Sous-complexe</u>

Un sous-complexe d'un complexe K est un complexe composé de simplexes de K .

<u>Subdivision</u>

Une subdivision d'un complexe K est un complexe K' tel que tout simplexe de K coincide avec un sous-complexe de K'.

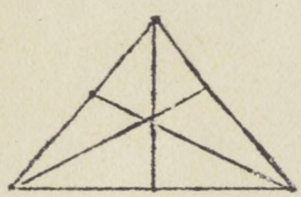
En particulier, la subdivision <u>normale</u> d'un complexe K est définie de la façon suivante : sur chaque simplexe E^r de

K nous considérons le centre de gravité, c'est-à-dire le point dont les r coordonnées barycentriques sont égales . Considérons une suite de simplexes E^{r_1}, E^{r_2} ..... E^{r_k} tels que

$$E^{r_1} \subset E^{r_2} \subset \ldots\ldots \subset E^{r_k} \quad ; \quad r_1 < r_2 < \ldots < r_k$$

Les centres de gravité de ces simplexes définissent dans E^{r_k} un simplexe $\overline{E}^k$ qui sera le simplexe général de la subdivision normale de K . La subdivision normale de K s'appelle aussi <u>complexe dérivé</u> de K . La figure (1) représente la subdivision normale d'un triangle .

fig.(1)



Une question fondamentale de la topologie combinatoire est la suivante : <u>Si deux complexex K et K_1 sont homéomorphes existe-t-il une subdivision K' de K et une subdivision K'_1 de K_1 telles que K' et K'_1 soient simplicialement homéomorphes</u> ?

Dans le travail déjà cité, M.Nöbeling répond par l'affirmative à cette question .

II .- Groupes d'homologie

<u>Chaines</u> .- Soit K un complexe simplicial . Fixons l'orientation de chaque simplexe de K et désignons par E_i^r les simplexes o-

rientés ainsi considérés, l'indice supérieur indiquant la dimension. Une <u>chaine à r dimensions</u> est une forme linéaire par rapport aux symboles E_i^r

$$C^r = \sum_i u_i E_i^r$$

où u_i désigne un entier positif , négatif ou nul ; dans le cas d'un complexe infini nous supposerons de plus qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombre u_i qui soient différents de zéro.

<u>Chaine-frontière</u>

Soit E^r le simplexe orienté $\varepsilon\,(P_0\ P_1\ \ldots.\ P_r)$, où $\varepsilon = \pm 1$. On peut associer à E^r une chaine appelée chaine-frontière et définie par :

$$F(E^r) = \varepsilon \sum (-1)^i\,(P_0\ P_1\ \ldots\ P_{i-1}\ P_{i+1}\ \ldots\ P_k)$$

La relation entre E^r et $F(E^r)$ s'exprime souvent par le symbole ($\longrightarrow$) : $E^r \longrightarrow F(E^r)$

<u>Relations d'incidence</u>.

Les chaines-frontières des simplexes orientés de K sont définies par des relations

$$E_i^r \longrightarrow \sum_j e_{ij}^r\,E_j^{r-1} \quad , \quad (e_{ij}^r = 0,\ +1,\ -1)$$

appelées relations d'incidence de K .

A la chaine $C^r = \sum u_i E_i^r$ est associée une chaine-frontière définie par

$$C^r \to F(C^r) = \sum u_i\, F(E_i{}^r) = \sum_{i,j} u_i\, e_{ij}^r\, E_j{}^{r-1}$$

On a :

$$F(E^r) \to 0 \quad , \text{ d'où } \quad F(C^r) \to 0 \; .$$

Un complexe K est complètement déterminé par ses relations d'incidence . Nous nous proposons de déduire de ces relations d'incidence des invariants topologiques de K .

Chaines par rapport à un groupe abélien G.

Soit G un groupe abélien additif quelconque . Une chaine par rapport à G est une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i\, E_i{}^r$$

les symboles u_i désignant des éléments de G . La somme de deux chaines $\sum_i u_i\, E_i{}^r$ et $\sum_i v_i\, E_i{}^r$ sera la chaine $\sum_i (u_i + v_i)\, E_i{}^r$. Les chaines C^r forment donc un groupe abélien $\mathcal{L}_G^r$.

A la chaine $\sum_i u_i\, E_i{}^r$ on peut associer la chaine $\sum_{ij} u_i\, e_{ij}^r\, E_j{}^{r-1}$ appelée chaine-frontière par rapport à G.

$$\sum_i u_i\, E_i{}^r \xrightarrow[G]{} \sum_{ij} u_i\, e_{ij}^r\, E_j{}^{r-1}$$

Cette correspondance définit un homomorphisme du groupe $\mathcal{L}_G^r$ sur un sous-groupe $\mathcal{H}_G^{r-1}$ de $\mathcal{L}_G^{r-1}$. Dans cet homomorphisme, les chaines de $\mathcal{L}_G^r$ qui correspondent à la chaine σ de

$\mathcal{H}_G^{r-1}$ définissent un sous-groupe $\mathcal{L}_G^r$ de $\mathcal{L}_G^r$. Une chaine Γ^r appartenant à $\mathcal{Z}_G^r$ s'appelle aussi cycle par rapport à G; on a : $\Gamma_G^r \longrightarrow 0$. Le groupe $\mathcal{H}_G^{r-1}$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{Z}_G^{r-1}$. Un cycle Γ^{r-1} de $\mathcal{H}_G^{r-1}$ est la chaine-frontière d'une chaine C^r : $C^r \xrightarrow[G]{} \Gamma^{r-1}$. On exprime ce fait en disant que Γ^{r-1} est <u>homologue à 0 par rapport à G</u>, et on écrit: $\Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0$. Deux cycles Γ^{r-1} et Γ_1^{r-1} sont dits <u>homologues par rapport à G</u>, si $\Gamma_1^{r-1} - \Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0$; on écrit aussi $\Gamma_1^{r-1} \underset{G}{\sim} \Gamma^{r-1}$

<u>Groupes d'homologie par rapport à G</u>.

Soit $\mathcal{K}_G^r$ le groupe quotient :

$$\mathcal{K}_G^r = \mathcal{Z}_G^r / \mathcal{H}_G^r$$

C'est le <u>groupe d'homologie</u> par rapport à G et correspondant à la dimension r . Un élément de $\mathcal{K}_G^r$ peut être considéré comme la classe des cycles $\underset{G}{\sim}$ à un cycle donné Γ^r . Le groupe $\mathcal{K}_G^r$ a été défini pour une subdivision simpliciale de l'espace topologique K ; mais nous verrons plus loin que c'est un invariant topologique de K; il ne dépend pas de la décomposition particulière en simplexes .

Le groupe $\mathcal{K}_G^r$ dépend de G . Les cas les plus importants sont les suivants :

(1) G est le groupe additif des nombres entiers . On a alors

le groupe d'homologie proprement dit $\mathcal{K}^r$.

(2) G est le groupe des restes modulo m des nombres entiers. On a alors le groupe d'homologie modulo m : $\mathcal{K}^r$ (mod.m) En particulier si m=2, on peut faire abstraction de l'orientation des simplexes.

Supposons que K soit un complexe fini. Les groupes $\mathcal{Z}^r$ et $\mathcal{H}^r$ sont alors des groupes abéliens à un nombre fini de générateurs. Il en sera de même du groupe $\mathcal{K}^r$. Les éléments d'ordre fini de $\mathcal{K}^r$ forment un sous-groupe $\mathcal{T}^r$ appelé <u>groupe de torsion</u>. Un élément de $\mathcal{T}^r$ est de la classe des cycles homologues à un cycle Γ^r pour lequel on a : $t\,\Gamma^r \sim 0$, t étant un nombre entier. On convient d'écrire $\Gamma^r \approx 0$ pour un cycle qui satisfait à une homologie de la forme $t\,\Gamma^r \sim 0$; on convient de même d'écrire $\Gamma^r \sim \Gamma_1^r$ lorsqu'on a : $t\,\Gamma^r \sim t\,\Gamma_1^r$

<u>Groupe de Betti</u>

Le groupe de Betti pour la dimension r est le groupe quotient

$$\mathcal{B}^r = \mathcal{K}^r / \mathcal{T}^r$$

Un élément de $\mathcal{B}^r$ est de la classe des cycles Γ^r tels que $\Gamma^r \approx \Gamma_1^r$, où Γ_1^r est un cycle donné. Le groupe $\mathcal{B}^r$

est un groupe abélien <u>libre</u> à b^r générateurs. Le nombre b^r s'appelle le <u>nombre de Betti</u> pour la dimension r. On peut trouver b^r cycles $\Gamma_1^r, \Gamma_2^r, \dots, \Gamma_{b^r}^r$ tels que tout cycle Γ^r soit lié par une homologie de la forme :

$$\Gamma^r \approx \lambda_1 \Gamma_1^r + \lambda_2 \Gamma_2^r + \dots\dots + \lambda_{b^r} \Gamma_{b^r}^r$$

Ces b^r cycles définissent une <u>base du groupe de Betti.</u>

Le groupe de torsion $\mathcal{T}^r$ est la somme directe d'un certain nombre de groupes cycliques dont les ordres sont des entiers t_1, t_2, ..., t_s . Ces entiers sont complètement déterminés si l'on impose les conditions :

$$t_{i+1} \equiv 0 \pmod{t_i}$$

Les nombres t_i ainsi déterminés s'appellent <u>coefficients de torsion</u> pour la dimension r .

Considérons de même le groupe $\mathcal{H}^r$ (mod.m) . Ce groupe est la somme directe de $b^r(m)$ groupes cycliques d'ordre m et d'un certain nombre de groupes cycliques ayant respectivement pour ordres des entiers $t_1(m)$, $t_2(m)$ ... $t_\sigma(m)$ inférieurs à m et tels que

$$t_{i+1}(m) \equiv 0 \pmod{t_i(m)} .$$

Le nombre $b^r(m)$ et les nombres $t_i(m)$ s'appellent respectivement <u>nombre de Betti</u> et <u>coefficients de torsion modulo m</u> .

Les invariants numériques précédents déterminent complètement les groupes $\mathcal{H}^r$ et $\mathcal{H}^r$ (mod.m) . On peut les calculer effectivement quand on connait les relations d'incidende de K . Soit (e^r) la matrice d'incidence formée par les coefficients e_{ij}^r . Les coefficients de torsion t_i pour la dimension r sont les diviseurs élémentaires supérieurs à 1 de la matrice (e^r) . Le nombre de Betti b^r est donné par :

$$b^r = \alpha^r - \rho^r - \rho^{r-1}$$

où α^r désigne le nombre de simplexes E_i^r à r dimensions , ρ^r étant le rang de la matrice (e^r) . De l'égalité précédente , on tire :

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r$$

On a de même :

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r(m)$$

La quantité $\sum_r (-1)^r \alpha^r$ s'appelle caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe K . C'est un invariant topologique comme les nombres de Betti .

(Pour les démonstrations, voir Seifert-Threlfall, chap.III, et XII) .

Groupes d'homologie modulo L

Soit L un sous-complexe de K . On peut convenir de négliger partout dans les chaines les simplexes appartenant à L. On définit ainsi les chaines mod.L , les cycles mod.L , les groupes d'homologie mod.L . D'une façon générale, on aura le groupe d'homologie $\mathcal{K}_G^r$ (mod.L) .

III.- Invariance topologique des groupes d'homologie

Pour démontrer l'invariance topologique du groupe $\mathcal{K}_G^r$ nous allons montrer que ce groupe est isomorphe à un groupe $\overline{\mathcal{K}}_G^r$ que nous appellerons groupe d'homologie topologique. Pour éviter toute confusion, $\mathcal{K}_G^r$ sera appelé groupe d'homologie combinatoire. Cela nous oblige à introduire les notions de simplexe singulier et de chaine singulière.

Simplexe singulier.

Soit x^r un simplexe rectiligne et considérons une représentation continue (pas nécessairement biunivoque) de x^r sur un ensemble de points A d'un espace topologique K. L'ensemble de points A associé à la représentation continue de x^r sur A définit un simplexe singulier X^r sur K. Etant donnés sur K deux simplexes singuliers X^r et X_1^r images continues des simplexes rectilignes x^r et x_1^r, on dit que les deux simplexes singuliers sont identiques lorsqu'ils coincident en tant qu'ensembles de points et lorsqu'il existe une correspondance barycentrique entre x^r et x_1^r telle que deux points correspondants de x^r et x_1^r aient pour images le même point de K. Une représentation continue de x^r sur K fait correspondre aux deux simplexes orientés x^r et $-x^r$ deux simplexes singuliers orientés X^r et $-X^r$. Il se peut qu'il existe une correspondance barycentrique entre x^r et $-x^r$ telle que deux points correspondants soient représentés par le même point de K . On a alors $X^r = -X^r$ et on dit que X^r est un simplexe dégénéré singulier .

Exemple : Considérons une représentation barycentrique t d'un simplexe rectiligne E^r sur un simplexe rectiligne E^{r-h} où $h \succ 0$. Le simplexe E^{r-h} définit alors un simplexe singulier X^r. Le simplexe E^r admet au moins deux sommets P_0 et P_1 qui soient représentés sur un même sommet de E^{r-h} . Considérons la transformation barycentrique de E^r en $-E^r$ qui échange les sommets P_0 et P_1 et qui laisse fixes les autres sommets de E^r . Deux points correspondants de E^r et de $-E^r$ sont évidemment représentés par t sur le même point de E^{r-h} ou X^r . Par suite , X^r est un simplexe singulier dégénéré.

Chaines singulières

Une chaine singulière sera une forme linéaire finie $\sum_i u_i X_i^r$, où les symboles X_i^r désignent des simplexes singuliers non dégénérés définis sur un complexe K , les coefficients u_i étant des nombres entiers. Supposons que X^r soit une image continue d'un simplexe rectiligne x^r . Les faces x_i^{r-1} de x^r sont représentées sur des simplexes singuliers X_i^{r-1} appelés faces de X^r . Soit $\sum c_i x_i^{r-1}$ la chaine frontière de x^r . Nous appellerons chaine-frontière de X^r

la chaine singulière $\sum e_i X_i^{r-1}$, où l'on néglige tous les simplexes singuliers dégénérés .

<u>Chaines singulières par rapport à un groupe abélien G</u> .

Une chaine singulière par rapport à G sur un complexe K sera une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i X_i^r \qquad (u_i = \text{élément de } G)$$

Les symboles X_i^r désignant des simplexes singuliers non dégénérés sur K . A la chaine C^r est associée une chaine frontière par rapport à G :

$$X_i^r \longrightarrow \sum_j e_{ij} X_j^{k-1}$$

$$C^r \xrightarrow[G]{} \sum_{i,j} u_i e_{ij} X_j^{k-1}$$

<u>Groupes d'homologie topologiques</u>.

L'ensemble des chaines singulières sur un complexe donné K permet de définir les groupes abéliens suivants :

$\overline{\mathcal{L}}_G^r$ = groupe des chaines singulières par rapport à G.

$\overline{\mathcal{Z}}_G^r$ = groupe des cycles singuliers par rapport à G .

$\overline{\mathcal{H}}_G^r$ = groupe des cycles singuliers $\underset{G}{\sim}$ 0 .

$\overline{\mathcal{K}}_G^r = \overline{\mathcal{Z}}_G^r \big/ \overline{\mathcal{H}}_G^r$ = groupe d'homologie topologique

Il est évident que tous ces groupes sont des invariants topologiques du complexe K ; car une transformation topologique de K en un complexe K_1 transforme toute chaine singulière C^r sur K en une chaine singulière C_1^r sur K_1, la chaine-frontière de C^r correspondant à la chaine-frontière de C_1^r. Je me propose de démontrer maintenant le fait remarquable et surprenant que le groupe d'homologie topologique $\overline{\mathcal{H}}_G^r$ est isomorphe au groupe d'homologie $\mathcal{H}_G^r$ défini précédemment . Il en résultera l'invariance topologique des groupes d'homologie combinatoire $\mathcal{H}_G^r$.

<u>Déformations continues</u>.

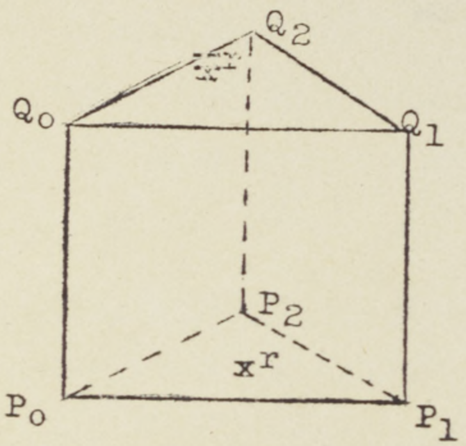
Soit a un espace topologique et considérons une représentation continue de a sur un ensemble de points A d'un espace topologique K . Désignons par [1] l'intervalle fermé (0,1) et soit $a \times [1]$ le produit topologique de a par [1] . Désignons par a_t l'ensemble des points de $a \times [1]$ qui correspondent à un point t de l'intervalle [1] . Considérons une représentation continue de $a \times [1]$ dans l'espace K telle que a_0 soit représenté sur A et a_1 sur $\overline{A}$. Une telle déformation continue s'appelle aussi <u>homotopie</u> . En particulier, lorsque l'image A_t de a_t est homéomorphe à a_t quelque soit t , la déformation continue est appelée <u>isotopie</u>

<u>Déformation continue d'un simplexe singulier</u> .

Soit x^r un simplexe rectiligne. Le produit $x^r \times [1]$

pout être considéré comme un prisme dont les deux bases seront désignés par x^r et $\overline{x}^r$ .Soient P_o ,$P_1, \ldots, P_r$ les som-

fig.(2)



mets du simplexe x^r et Q_o ,$Q_1, \ldots, Q_r$ les sommets correspondants du simplexe $\overline{x}^r$. On peut décomposer le prisme en simplexes .Soit x_i^{r+1} le simplexe orienté $(Q_o\ Q_1\ ..Q_i, P_i, .., P_r)$ On peut associer au prisme $x^r \times [1]$ la chaine orientée suivante :

$$\mathcal{D}\ x^r = \sum\ (-1)^{i-1}\ x_i^{r+1}$$

que nous appellerons <u>chaine de déformation</u> du simplexe x^r . La même loi associe à une face x_i^{r-1} de x^r ,une chaine de déformation $\mathcal{D}\ x_i^{r-1}$. Par suite, à la chaine frontière $F(x^r) = \sum \varepsilon_i\ x_i^{r-1}$ correspond la chaine de déformation $\mathcal{D}\ F(x^r) = \sum \varepsilon_i\ \mathcal{D}\ x_i^{r-1}$. La chaine-frontière de $\mathcal{D}\ x^r$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{D}\ x^r \longrightarrow \overline{x}^r - x^r - \mathcal{D}\ F(x^r)$$

Considérons maintenant une représentation continue du prisme $x^r \times [1]$ dans l'espace K. On définit ainsi une déformation continue de simplexe singulier X^r, image de x^r, en un simplexe singulier $\overline{X}^r$, image de $\overline{x}^r$. A la chaine $\mathcal{D}\, x^r$ correspond dans K une chaine singulière $\mathcal{D}\, X^r$ appelée chaine de déformation de X^r. A la chaine $\mathcal{D}\, F(x^r)$ correspond une chaine singulière $\mathcal{D}\, F(X^r)$, et on a :

$$\mathcal{D}\, X^r \longrightarrow \overline{X}^r - X^r - \mathcal{D}\, F(X^r)$$

<u>Déformation continue d'une chaine singulière</u> .

Soit c un complexe simplicial et soit C le complexe singulier obtenu par représentation continue de c dans l'espace K. Une déformation continue de C en un autre complexe singulier $\overline{C}$ est définie par une représentation continue dans K du produit topologique $c \times [1]$. A chaque simplexe singulier X^r de C correspond un simplexe déformé $\overline{X}^r$ de $\overline{C}$ et une chaine de déformation $\mathcal{D}\, X^r$. Soit $C^r = \sum_i u_i\, X_i^r$ une chaine singulière formée de simplexes de C, les coefficients u_i étant des éléments d'un groupe abélien G. A cette chaine C^r correspond une chaine de déformation

$$\mathcal{D}\, C^r = \sum_i u_i\, \mathcal{D}\, X_i^r$$

Soit $\overline{C}^r = \sum_i u_i\, \overline{X}^r$ la chaine déformée. On a la relation

$$\mathcal{D}\, C^r \xrightarrow[G]{} \overline{C}^r - C^r - \mathcal{D}\, F(C^r)$$

En particulier si $F(C^r) = 0$, on a :

$$\mathcal{D}\, C^r \xrightarrow[G]{} \overline{C}^r - C^r$$

donc $\overline{C}^r \underset{G}{\sim} C^r$

C'est-à-dire : <u>deux cycles singuliers homotopes</u> (qui se déduisent l'un de l'autre par une homotopie) <u>sont aussi homologues</u> .

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème fondamental qui établit un lien entre les chaines singulières et les sous-chaines d'un complexe simplicial K .

<u>Théorème fondamental sur les déformations</u> (Alexander, Veblen)

1°- <u>Tout complexe singulier sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en un sous-complexe de K.</u>

2°- <u>Toute chaine singulière C^r sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en une sous-chaine de K, les chaines considérées étant définies par rapport à un groupe abélien G.</u>

Soit C un complexe singulier sur K. On peut subdiviser les simplexes singuliers de C en simplexes suffisamment petits de façon qu'on obtienne une subdivision C' de C jouissant de la propriété suivante : il existe au moins un aster du complexe K contenant à son intérieur un aster singulier quelconque du complexe C'; (on appelle aster de centre O l'ensemble des simplexes d'un complexe donné ayant le point O comme sommet) . A chaque sommet P_λ de C', faisons alors correspondre un sommet Q_λ de K tel que l'aster singulier de centre P_λ soit contenu dans l'aster de centre Q_λ . De cette façon, nous faisons correspondre aux sommets d'un simplexe de C' les sommets d'un simplexe de K . En effet, soit P un point quelconque d'un simplexe singulier X^r de C Soit E^k un simplexe de K contenant le point P . Tout aster de K qui contient P contient E^k . Donc les sommets de X^r ne peuvent correspondre qu'à des sommets de E^k ; c'est-à-dire les sommets de X^r correspondent aux sommets d'un simplexe E^h qui appartient à E^k . Soit c' un complexe rectiligne tel que le complexe singulier C' se déduise de c' par une représentation continue T. La correspondance entre les sommets de X^r et ceux de E^h définit une représentation barycentrique de x^r sur E^h. On a ainsi une représentation barycentrique de x^r sur E^h bien déterminée pour tous les simplexes de c' ce qui fournit une représentation simpliciale $\overline{T}$ de c' sur un sous-complexe $\overline{C}$ de K. Un point P de x^r est représenté par T sur un point P de X^r et par $\overline{T}$ sur un point $\overline{P}$ de E^k .Les points P et $\overline{P}$ appartiennent à un même simplexe, à savoir E^k et peuvent être joints dans ce simplexe par un segment rectiligne bien déterminé. Le produit topologique $c' \times [1]$ admet alors une représentation continue f dans K définie de la façon suivante : f coincide avec T pour l'ensemble de points $c' \times 0$, produit topologique de c' par le point 0 de l'intervalle 1 ; f coincide avec T pour l'ensemble de points $c \times 1$; pour les points

du segment $p \times [1]$, où p est un point donné de c' ; f est la représentation barycentrique de ce segment sur le segment rectiligne $P\bar{P}$. La représentation continue f définit donc une déformation continue du complexe singulier C' en un sous complexe $\bar{C}$ de K. Ceci démontre la première partie du théorème. On peut encore l'exprimer de la façon suivante :
<u>Toute représentation continue d'un complexe simplicial c dans un complexe simplicial K est homotope à une représentation simpliciale d'une subdivision c' de c dans le complexe K.</u>

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, nous considérons une chaine singulière C^r sur K. L'ensemble de ses simplexes singuliers et de leurs faces forme un complexe singulier C. On peut trouver une subdivision C' de C qui soit déformable en un sous-complexe $\bar{C}$ de K. Soit x^r un simplexe rectiligne et orienté ; nous pouvons subdiviser x^r en un certain nombre de simplexes partiels x_1^r et orienter chacun des simplexes partiels x_1^r de telle façon que la transformation linéaire qui fait passer du simplexe orienté x_1^r au simplexe orienté x^r soit une transformation à déterminant positif dans l'espace cartésien à r dimensions défini par x^r. La somme des simplexes orientés x_1^r sera appelée <u>subdivision</u> de la chaine définie par le simplexe orienté x^r. De cette notion se déduit immédiatement la notion de <u>subdivision d'un simplexe singulier ou d'une chaine</u>

singulière. A la chaine singulière C^r correspond donc sur C' une chaine singulière bien déterminée, ${C_1}^r$, appelée subdivision de C^r . En déformant C' en $\overline{C}$, nous faisons correspondre à ${C_1}^r$ une chaine $\overline{C}_1{}^r$ qu'on appelle chaine déformée et qui est composée de simplexes de K . Ceci démontre le théorème .

Nous aurons encore besoin de la propriété suivante :
La subdivision ${C_1}^r$ de la chaine singulière C^r peut être déformée en C^r sur le complexe singulier C.
Il suffit de démontrer cette propriété pour le cas de chaines non singulières. Or si C est une sous-chaine de K , et ${C_1}^r$ une subdivision de C^r , on peut montrer que la déformation définie plus haut réduit ${C_1}^r$ à C^r, tout point de ${C_1}^r$ restant pendant la déformation sur le simplexe de C^r auquel il appartient initialement . En particulier, tout cycle singulier est homologue à l'une quelconque de ses subdivisions .

Invariance topologique des groupes d'homologie.

D'après le théorème fondamental et la propriété précédente, tout cycle singulier Γ^r sur le complexe K est homologue à un sous-cycle $\overline{\Gamma}^r$ de K, les cycles étant définis par rapport à un groupe abélien donné G. Si Γ^r est homologue à 0 , $\overline{\Gamma}^r$ est aussi homologue à 0 ; c'est-à-dire , il existe une chaine singulière C^{r+1} telle que $C^{r+1} \xrightarrow[G]{} \overline{\Gamma}^r$

En vertu du théorème fondamental, il existe alors également

une sous-chaine $\overline{C}^{r+1}$ de K telle que $\overline{C}^{r+1} \xrightarrow[G]{} \Gamma^r$;
c'est-à-dire Γ^r est aussi homologue à 0 au sens combinatoire . La correspondance entre Γ^r et $\overline{\Gamma}^r$ établit donc une correspondance biunivoque et isomorphe entre les groupes $\overline{\mathcal{K}}_G^r$ et $\mathcal{K}_G^r$. Donc :

<u>Théorème</u>

<u>Les groupes d'homologie $\mathcal{K}_G^r$ d'un complexe K sont des invariants topologiques de K</u> .

<u>Invariance topologique des groupes $\mathcal{K}_G^r$ (mod. L)</u>.

Soit L un sous-complexe de K . D'une chaine singulière sur K on déduit une chaine singulière modulo L en y supprimant tous les simplexes qui sont situés sur L . A l'aide des chaines singulières modulo L on peut définir des groupes d'homologie topologiques désignés par $\overline{\mathcal{K}}_G^r$ (mod.L) . Il résulte du théorème fondamental sur les déformations que le groupe $\overline{\mathcal{K}}_G^r$(mod.L) est isomorphe au groupe d'homologie combinatoire $\mathcal{K}_G^r$(mod.L). Donc les groupes $\mathcal{K}_G^r$ (mod.L) sont des invariants topologiques de l'ensemble du complexe K et de son sous-complexe L . Monsieur S.Lefschetz a démontré que ces groupes sont même des invariants topologiques de l'espace K-L .

Remarques sur la détermination effective des groupes d'homologie.

Théoriquement, les groupes d'homologie peuvent être déterminés à partir des relations d'incidence du complexe K. Mais cette étude ne peut être appliquée pratiquement lorsque K est composé d'un grand nombre de simplexes. On trouvera une méthode pratique ainsi que de nombreuses applications dans ma thèse : Sur la topologie de certains espaces homogènes (Ann.of Math. 35 , 1934 , p.411). Mais avant de terminer il est indispensable d'indiquer au moins les groupes d'homologie de l'espace S^n, espace sphérique à n dimensions . L'espace S^n est homéomorphe à la frontière d'un simplexe E^{n+1} Le cycle $F(E^{n+1})$ est un cycle à n dimensions défini sur S^n . Tout autre cycle à n dimensions est homologue à un multiple de celui-ci . Donc $\mathcal{K}^n$ est le groupe cyclique infini : $b^n = 1$. L'espace S^n est aussi l'espace R^n que l'on suppose fermé par un point à l'infini . Or toute chaine C^r sur R^n , où $r < n$, peut être réduite au point à l'infini par déformation continue (par ex.par une homothétie dont le rapport tend vers l'infini). Donc le groupe $\mathcal{K}^r$ se réduit à 0, pour $0 < r < n$. Le groupe $\mathcal{K}^0$ est le groupe cyclique infini. Il n'y a pas de coefficient de torsion. Les nombres de Betti sont

$$b^0 = b^n = 1 \quad , \quad b^r = 0 \quad \text{pour } 0 < r < n .$$

Remarquons encore que pour tout complexe de dimension n, les groupes $\mathcal{K}^r$, où $r > n$, se réduisent à 0 .

BIBLIOGRAPHIE

Pour une étude plus détaillée du sujet de cet exposé, voir :

G.LEFSCHETZ , Topology, chapitres I et II .

SEIFERT und THRELFALL : Lehrbuch der Topologie, chapitres II III et IV .

Veblen analysis situs
