Séminaire de Mathématiques

Jean Delsarte

L'axiomatique des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert : les opérateurs bornés

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 3, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A4_0>

© École normale supérieure, Paris, 1934-1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT HENRI POINCARE

(Cet exemplaire ne peut quitter la salle de lecture)

Exemplaire n° 4

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

INSTITUT H. POINCARÉ
1, Rue Pierre-Curie
PARIS-5e

ESPACE DE HILBERT

C.- L'axiomatique des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert; les opérateurs bornés

Exposé fait par M. Jean DELSARTE, le 10 Décembre 1934

Plan de l'exposé

a) Définition et propriétés générales des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert.

b) Les opérateurs de projection.

c) Les opérateurs continus - Le théorème de Hellinger-Toeplitz Les suites convergentes d'opérateurs.

d) L'opérateur résolvant - le spectre.

---

a) Définition et propriétés générales des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert

On désigne sous le nom d'opérateur dans l'espace de Hilbert toute transformation ponctuelle $g = Rf$ faisant correspondre à un élément f de l'espace un autre élément g. La transformation est supposée univoque dans le sens $f \rightarrow g$.

En général, l'opérateur n'est défini que lorsque l'élément initial f décrit un certain domaine qui est le domaine d'existence de l'opérateur; l'élément final décrit alors un autre domaine, qui est le domaine des valeurs de l'opérateur.

R et S étant deux opérateurs , a un nombre quelconque, m un entier positif, les notations $R+S$, $R-S$, aR , RS , R^m s'entendent d'elles-mêmes ; il va sans dire que des restrictions convenables doivent être faites en ce qui concerne les domaines d'existence des opérateurs représentés par ces symboles; par exemple, le domaine d'existence de $R+S$ est le domaine commun aux domaines d'existence de R et de S, le domaine d'existence de RS est la partie commune au domaine des valeurs de R et au domaine d'existence de S.

Si la liaison établie par l'opérateur R entre l'élément initial et l'élément final est biunivoque, l'opérateur R possède un inverse qu'on désigne par R^{-1} ; si E désigne l'opérateur identique, il est clair que l'on a

$$R.R^{-1} = R^{-1}.R = E$$

Si R et S ont des inverses, on voit que aR, RS ont aussi des inverses qui sont

$$(aR)^{-1} = \frac{1}{a} R^{-1} \quad ; \quad (RS)^{-1} = S^{-1} R^{-1} \quad ;$$

<u>Définition 1</u>.- Un opérateur A est <u>linéaire</u> si son domaine de définition est une variété linéaire , et si, quels que soient les éléments $f_1, f_2, \ldots . f_k$, de ce domaine, et quels que soient les nombres $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$, on a

$$A\left[a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots . + a_k f_k\right] = a_1 A f_1 + a_2 A f_2 + \ldots . + a_k A f_k \quad ;$$

Nous ne considérerons dans la suite que les opérateurs linéaires dont les domaines de définition sont partout denses dans l'espace de Hilbert.

<u>Définition 2</u>.- En présupposant son existence, on appelle opérateur <u>associé</u> à un opérateur linéaire donné A, et on désigne par $A^{\times}$, un opérateur linéaire ayant même domaine de définition que A, et tel, de plus, que l'on ait, quels que soient les éléments f et g de ce domaine de définition

$$(f.Ag) = (A^{\times} f.g) \quad ; \quad (f.A^{\times} g) = (Af,g)$$

On remarquera que la seconde condition équivaut à la première, comme on le voit en échangeant f et g, et en prenant les imaginaires conjuguées des deux membres . Il en résulte que l'opérateur associé à $A^{\times}$ est A lui-même .

On voit aisément, toujours en supposant leur existence, que les opérateurs associés à A+B, A-B , aA, AB sont

$$(A+B)^{\times} = A^{\times}+B^{\times} \ ; \ (A-B)^{\times} = A^{\times}-B^{\times} \ ; \ (aA)^{\times} = \bar{a}A^{\times} \ ; \ (AB)^{\times} = B^{\times} A^{\times}$$

De la même manière, si A a un inverse A^{-1} et un associé $A^{\times}$, si ce dernier opérateur a aussi un inverse $A^{\times -1}$, A^{-1} et $A^{\times -1}$ sont associés; on a en effet

$$(A^{-1}f.g) = (A^{-1}f.A^{\times}A^{\times -1}g) = (AA^{-1}f.A^{\times -1}g) = (f.A^{\times -1}g) \ ;$$

<u>Remarque</u>.- En réalité, dans un espace vectoriel normé général (espace de S. Banach) l'opérateur linéaire associé à un opérateur linéaire donné est défini dans l'espace dual; ce n'est que parce que l'espace de Hilbert est identique à son espace dual, que la définition précédente a un sens. Cette remarque a son prix, car il en résulte que le concept d'opérateur hermitien n'a de signification que dans l'espace de Hilbert .

<u>Définition 3</u>.- Un opérateur linéaire est <u>hermitien</u> si il est identique à son associé .

<u>Définition 4</u>.- Un opérateur linéaire U est dit <u>unitaire</u> , lorsque l'on a

$$UU^{\times} = U^{\times}U = E$$

Il en résulte

$$(Uf.Ug) = (U^{\times}Uf.g) = (f.g) \quad ; \quad \|Uf\| = \|f\|$$

Les opérateurs unitaires invarient donc les normes et les produits scalaires des éléments auxquels on les applique.

Théorème 1.- Si un opérateur linéaire partout défini invarie la norme, il est unitaire. Supposons en effet que l'on ait

$$(Uf.Uf) = (f.f)$$

changeant f en f+g, puis en f-g et soustrayant, on trouve

$$Re.(Uf.Ug) = Re.(f.g)$$

changeant ensuite f en if, on obtient

$$Im.(Uf.Ug) = Im.(f.g)$$

finalement

$$(Uf.Ug) = (f.g)$$

quels que soient les éléments f et g; donc $U.U^{*} = E$ et U est unitaire .

Définition 5.- Un opérateur linéaire A est continu si, à tout nombre ε positif correspond un nombre positif η tel que $\|f-g\| \leq \eta$ entraine $\|Af-Ag\| \leq \varepsilon$ et celà, aussi petit que soit ε .

Théorème 2.- Un opérateur linéaire partout défini qui est continu à l'origine, est un opérateur continu .

Cela résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur car

$$A(f-g) = Af - Ag$$

Définition 6.- Un opérateur linéaire A partout défini est dit borné, s'il existe un nombre positif M, tel que l'on ait, quels que soient les éléments f et g de l'espace

$$\|Af - Ag\| \leq M \|f-g\|$$

<u>Théorème 3</u>.- **La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit continu est qu'il soit borné.**

Il est d'abord bien clair que tout opérateur borné est continu.

Inversement, supposons l'opérateur A continu, et soit δ la valeur de η correspondant à $\varepsilon = 1$; alors si f est de norme inférieure à δ, on a $\|Af\| \leq 1$.

Posons encore $M = \frac{2}{\delta}$; l'inégalité

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

est vérifiée pour f nul ; soit, dans le cas contraire $g = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} f$

$$\|g\| = \frac{1}{2}\delta \quad \text{et} \quad Ag = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} Af$$

mais $\|Ag\|$ est inférieur à l'unité puisque $\|g\|$ est inférieur à δ, on a donc bien

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

<u>Borne d'une fonctionnelle bilinéaire</u>.- De $\|Af\| \leq M \|f\|$ résulte

$$|(Af.g)| \leq \|Af\| . \|g\| \leq M \|f\| . \|g\|$$

Inversement, si $|(Af.g)| \leq M \|f\| . \|g\|$, on voit, en changeant g en Af, que

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

---

b) Les opérateurs de projection

Leur étude est importante car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent naturellement les opérateurs hermitiens .

Définition 7. - Soit $\mathfrak{M}$ une multiplicité linéaire fermée. On a vu (exposé B) que tout élément f de l'espace se décompose d'une manière unique $f = g+h$ en un élément g contenu dans $\mathfrak{M}$ et en un élément h orthogonal à $\mathfrak{M}$. L'opération faisant passer de f à g sera considérée maintenant comme l'application à f d'un opérateur de projection

$$g = P_{\mathfrak{M}} f$$

Le domaine de définition de cet opérateur est l'espace tout entier, son domaine des valeurs est la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Théorème 4.- Les opérateurs de projection sont des opérateurs linéaires.

Soient en effet, f et g deux éléments de l'espace, on a

$$f = P_{\mathfrak{M}} f + h \qquad\qquad g = P_{\mathfrak{M}} g + k$$

h et k sont orthogonaux à la multiplicité $\mathfrak{M}$, ainsi que h+k et on peut écrire

$$f+g = P_{\mathfrak{M}} f + P_{\mathfrak{M}} g + h + k$$

comme de plus $P_{\mathfrak{M}} f + P_{\mathfrak{M}} g$ appartient à la multiplicité $\mathfrak{M}$ on voit qu'on a nécessairement

$$P_{\mathfrak{M}} f + P_{\mathfrak{M}} g = P_{\mathfrak{M}} (f+g) \quad ;$$

Théorème 5.- Les opérateurs de projection sont hermitiens.

Il suffit de remarquer que

$$(P_{\mathfrak{M}} f.g) = (P_{\mathfrak{M}} f.P_{\mathfrak{M}} g + h) = (P_{\mathfrak{M}} f.P_{\mathfrak{M}} g) = (P_{\mathfrak{M}} f + h.P_{\mathfrak{M}} g)$$
$$= (f.P_{\mathfrak{M}} g)$$

puisque h et k sont orthogonaux à la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Théorème 6.- Un opérateur de projection est identique à son carré.

C'est un point évident.

Théorème 7.- Tout opérateur hermitien partout défini , qui est identique à son carré, est un opérateur de projection.

Soit A un tel opérateur. Soit $\mathfrak{M}$ la multiplicité linéaire fermée qui contient les Af; on a

$(Af.g-Ag)=(Af.g)-(Af.Ag)=(Af.g)-(A^2f.g) =(Af.g)-(Af.g) = 0$

Tous les g-Ag sont donc orthogonaux aux Af, les éléments de l'espace orthogonaux aux g-Ag forment une multiplicité linéaire fermée qui se confond avec $\mathfrak{M}$, et les éléments g-Ag appartiennent à la multiplicité linéaire fermée complètement orthogonale à $\mathfrak{M}$; mais une décomposition de g sur ces deux multiplicités est

$$g = (g-Ag) + Ag$$

comme une telle décomposition est unique, on a

$$A = P_{\mathfrak{M}}$$

Théorème 8.- Soient $A = P_{\mathfrak{M}}$, $B = P_{\mathfrak{N}}$, deux opérateurs de projection ; pour que A+B soit un opérateur de projection, il est nécessaire et suffisant que AB = BA = 0 ; les multiplicités $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont alors complètement orthogonales .

Appliquons le théorème 7 : A+B est évidemment partout défini et hermitien, il suffit d'écrire que

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A+B +AB+BA = A + B$

Il est donc nécessaire et suffisant que AB + BA soit nul, mais alors il vient

$A(AB + BA) = AB + ABA = 0 \qquad A(AB + BA)A = 2\ ABA = 0$

ABA est donc nul ainsi que AB et BA . Il vient ensuite, quels que soient les éléments f et g

$$(ABf.g) = (Bf.Ag) = 0$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont donc bien complètement orthogonales. Désignons par $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ la multiplicité linéaire dont chaque élément est la somme d'un élément f de $\mathfrak{M}$ et d'un élément g de $\mathfrak{N}$. Soit h un tel élément ; on a

$$Af=f \ ; \quad Bf=BAf=0 \quad ; \quad Bg=g \quad ; \quad Ag=ABg=0$$

puis

$$(A+B)(f+g)=Af + Bf + Ag + Bg = f+g \quad ; \quad (A+B)h = h$$

Ceci prouve que la multiplicité $\mathfrak{N}+\mathfrak{M}$ est le domaine des valeurs de l'opérateur $A+B$, cette multiplicité est donc fermée, et on peut écrire

$$P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}}$$

<u>Théorème 9</u>.- Les opérateurs de projection sont bornés.

La relation $f = P_{\mathfrak{M}} f + h$, où h est orthogonal à $P_{\mathfrak{M}} f$ donne en effet

$$\| f \|^2 = \| P_{\mathfrak{M}} f \|^2 + \| h \|^2$$

et

$$\| P_{\mathfrak{M}} f \| \leq \| f \|$$

<u>Théorème 10</u>.- $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ étant des opérateurs de projection, la condition nécessaire et suffisante pour que $A_1 + A_2 + \ldots. + A_k$ soit un opérateur de projection est que tous les opérateurs $A_i A_j$ $(i \neq j)$ soient nuls. Il est aussi nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait, quel que soit f

$$\| A_1 f \|^2 + \| A_2 f \|^2 + \ldots\ldots + \| A_k f \|^2 \leq \| f \|^2$$

Si $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_k$ est un opérateur de projection on a

$$\|A_1 f\|^2 + \ldots + \|A_k f\|^2 = (A_1 f.f) + (A_2 f.f) + \ldots + (A_k f.f) =$$
$$([A_1 + A_2 + \ldots + A_k] f.f) = \|(A_1 + \ldots + A_k) f\|^2 \leq \|f\|^2$$

et la seconde condition est remplie ; si la seconde condition est remplie et si f est un élément tel que $A_m f = f$, on a $(m \neq \ell)$

$$\|f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 = \|A_m f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 \leq \|A_1 f\|^2 + \ldots + \|A_k f\|^2 \leq \|f\|^2$$

et par suite $A_\ell f = 0$. Mais g étant un élément quelconque on a $A_m(A_m g) = A_m g$, donc aussi $A_\ell(A_m g) = 0$, ce qui prouve que la première condition est remplie; enfin, il est immédiat que si la première condition est remplie, $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ est un opérateur de projection.

Définition 8.- Soient $A = P_{\mathfrak{M}}$, $B = P_{\mathfrak{N}}$ deux opérateurs de projection, supposons la multiplicité $\mathfrak{M}$ contenue dans la multiplicité $\mathfrak{N}$; on écrira

$$A \leq B$$

ce signe a toutes les propriétés du signe "plus petit que".

Théorème 11.- Si, entre deux opérateurs de projection A et B on a la relation $A \leq B$, on a aussi, quel que soit f

$$\|Af\| \leq \|Bf\|$$

Il est clair en effet, que si $A \leq B$, on a $A = AB$, et par suite

$$\|Af\| \leq \|A[Bf]\| \leq \|Bf\|$$

d'après le théorème 9.

c) Les opérateurs continus
Le théorème d'Hellinger-Toeplitz
Les suites convergentes d'opérateurs

On a défini dans une précédente conférence, deux sortes de convergence dans l'espace de Hilbert. D'abord la convergence ordinaire , basée sur l'expression de la distance de deux éléments, et qui admet le critère de Cauchy; puis une autre espèce de convergence, que nous dénommerons convergence faible, et qui est reliée à la forme des fonctionnelles linéaires continues : une suite d'éléments f_1; f_2 ;....;f_n;.... converge faiblement vers l'élément f, si, quel que soit l'élément g, la fonctionnelle linéaire $(g.f_n)$ converge vers $(g.f)$. On a démontré à ce propos, les deux points suivants , qui sont essentiels :

1°) - Si la suite f_1; f_2;...;f_n;... est telle que, quel que soit l'élément g,la fonctionnelle linéaire $(g.f_n)$ converge, cette suite converge faiblement vers un élément f;

2°) - de plus, les éléments de la suite sont bornés en normes, dans leur ensemble.

Il résulte de là que la convergence faible admet un principe de choix, c'est à dire que de toute suite infinie d'éléments bornés en normes dans leur ensemble, on peut extraire une suite partielle faiblement convergente . C'est ce qu'on aperçoit immédiatement en prenant un système coordonné et en appliquant le procédé diagonal.

Tout ceci étant rappelé, considérons un opérateur borné et continu A. Prenons un système coordonné orthogonal et normal :

$$\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots\ldots ; \varphi_n ; \ldots\ldots$$

soit f un élément quelconque de l'espace, posons $g = Af$; les fonctionnelles linéaires $(g.\varphi_i)$ sont évidemment des fonctionnelles linéaires continues de l'élément f; elles sont donc de la forme

$$(g.\varphi_i) = (f.\sigma_i)$$

Ces formules, une fois donnés les systèmes (φ_i) et (σ_i) définissent l'opérateur A. Le système (σ_i) n'est évidemment pas quelconque; en particulier, il est nécessaire que, quel que soit l'élément f, la série

$$\sum_i |(f.\sigma_i)|^2$$

soit convergente. Nous donnerons le nom de système (L) à tout système d'une infinité d'éléments vérifiant cette condition; (à noter qu'il en résulte que les éléments d'un tel système convergent faiblement vers 0). Inversement, donnons-nous un système (L) ; σ_1; σ_2; ..... ; σ_n; ..... ; les formules

$$(g.\varphi_i) = (f.\sigma_i)$$

donnent évidemment le résultat de l'application d'un certain opérateur linéaire A à l'élément f. Cet opérateur est partout défini ; la question se pose de savoir s'il est continu ; la réponse, affirmative, est donnée par le <u>Théorème d'Hellinger-Toeplitz</u>.

Théorème 12.- Quels que soient le système (L) et le système coordonné choisis, il existe un nombre positif M tel que l'on ait, pour tout élément f

$$\| Af \| \leq M \| f \|$$

Nous montrerons d'abord que l'opérateur A est faiblement continu . Considérons en effet, un élément h de l'espace , et la fonctionnelle (h.g) qui est une fonctionnelle linéaire de f. Si $x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots$ sont les coordonnées de l'élément h par rapport au système (φ_i) , les éléments

$$h_n = \sum_{i i}^{n} x_i \varphi_i$$

convergent vers h, et les produits scalaires $(h_n.g)$ convergent vers (h.g) ; or,

$$(h_n.g) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\varphi_i.g) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\sigma_i.f) = (k_n.f)$$

avec

$$k_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i$$

quel que soit f, $(k_n.f)$ a une limite (h.g) ; les k_n convergent faiblement vers un élément k, et (h.g) = (k.f) . Considérons maintenant une suite (f_i) convergeant faiblement vers f; $(k.f_i)$ converge vers (k.f) , et si l'on pose $g_i = Af_i$, on aura

$$(h.g_i) = (k.f_i)$$

et l'on voit que $(h.g_i)$ a une limite (k.f) quel que soit h, d'où résulte que la suite g converge faiblement vers un élément g tel que

$$(h.g) = (k.f)$$

En particulier, pour $h = \varphi_i$, on a $k = \sigma_i$, on voit donc que $g = A(f)$. L'opérateur A est donc bien faiblement continu . Le raisonnement précédent met de plus en évidence un autre opérateur linéaire, celui qui fait correspondre l'élément k à l'élément h ; il est caractérisé par le fait que $(h.Af) = (k.f)$, et il a partout un sens, c'est donc l'opérateur A^* associé à A, dont nous avons , du même coup, montré l'existence et l'unicité. Il est facile de déterminer le système (L) correspondant à cet opérateur ; il suffit , dans la formule précédente, de faire $f = \varphi_i$; ce qui donne $(k.\varphi_i) = (h.A\varphi_i)$ et le système

$$\rho_i = A\varphi_i$$

est le système (L) cherché . On verrait de même que $\sigma_i = A^*\varphi_i$ formules définissent le système (L) de l'opérateur A.
On peut remarquer que le système coordonné (φ_i) est un système (L) particulier ; plus généralement, si (α_i) est un système (L), les éléments

$$\beta_i = A\alpha_i$$

constituent aussi un nouveau système (L) ; c'est ce qu'on voit en remarquant que

$$(f.\beta_i) = (f.A\alpha_i) = (A^*f.\alpha_i)$$

La série $\sum |(f.\beta_i)|^2$ est donc convergente ; on peut énoncer le théorème :

Théorème 13 .- Les opérateurs faiblement continus invarient l'ensemble des systèmes (L).

Pour achever la démonstration du théorème de Hellinger-Toeplitz, il suffit de montrer qu'un opérateur faiblement continu est borné . En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite d'éléments (f_i) bornés en normes dans leur ensemble, et telle que les éléments de la suite correspondante $g_i = Af_i$ aient des normes indéfiniment croissantes . Or, de la suite (f_i) , on peut tirer, par le principe de Bolzano, une suite partielle faiblement convergente, la suite partielle correspondante tirée de la suite (g_i) convergerait faiblement, elle serait donc bornée en norme dans son ensemble, il y a contradiction . L'opérateur A est donc borné et continu . Sa borne M_A est la borne supérieure précise des normes de $g = Af$ quand $\|f\| = 1$ .C'est aussi la borne supérieure précise de $|(g.Af)|$ quand $\|f\| = \|g\| = 1$; mais comme $(g.Af) = (A^* g.f)$ on voit que les opérateurs associés A et A^* ont la même borne :

$$M_A = M_{A^*}$$

Passons maintenant à l'étude des suites d'opérateurs

I°)- Convergence faible d'une suite d'opérateurs

Définition 9 .- Une suite d'opérateurs bornés $A_1; A_2; \ldots A_n; \ldots$ converge faiblement si, quel que soit l'élément f, la suite d'éléments $g_n = A_n f$ est faiblement convergente. Soit g la limite faible de cette suite (g_n) ; on passe de f à g par l'application d'un certain opérateur que nous désignerons par A . Prenons un système coordonné orthogonal et normé (φ_i) , désignons par σ_{ni} le système (L) définissant A_n . Quel que soit f, le produit scalaire

$$(g_n . \varphi_i) = (f . \sigma_{ni})$$

a une limite $(g . \varphi_i)$; la suite $\sigma_{1i} ; \sigma_{2i} ; \ldots ; \sigma_{ni} ; \ldots$ converge donc faiblement vers un élément σ_i; on a de plus $(g . \varphi_i) = (f . \sigma_i)$, ce qui prouve que (σ_i) est un système (L) définissant l'opérateur borné A .

<u>Théorème 14</u>.- La suite faiblement convergente d'opérateurs $A_1 ; A_2 ; \ldots ; A_n ; \ldots$ est bornée dans son ensemble , c'ést à dire qu'il existe un nombre positif M tel que

$$\| A_n f \| \leq M \| f \|$$

quel que soit l'élément f et pour tout indice n.
Dans le cas contraire, on pourrait tirer de la suite donnée une suite partielle A_{i_n} telle que les éléments

$$g_n = A_{i_n} f$$

aient des normes indéfiniment croissantes; or, cela est contradictoire, puisque cette suite d'éléments doit être faiblement convergente.

On peut montrer aussi qu'il existe un principe de Bolzano pour la convergence faible des suites d'opérateurs.

2°)- Convergence uniforme d'une suite d'opérateurs.

Définition 10.- Une suite d'opérateurs bornés A_1; A_2;...;A_n;... converge uniformément vers l'opérateur borné A, lorsque la borne M_{A-A_n} de l'opérateur $A - A_n$ tend vers 0.

Il est clair alors, que, quel que soit l'élément f, la suite $A_n f$ converge vers Af.

La convergence uniforme des suites d'opérateurs admet un critère de Cauchy :

Théorème 15.- La condition nécessaire et suffisante pour que la suite A_n converge uniformément est que la borne $M_{A_{n+p}-A_n}$ puisse être rendue aussi petite qu'on le veut en prenant n assez grand, quel que soit p positif.

C'est nécessaire car

$$M_{A_{n+p}-A_n} \leq M_{A-A_n} + M_{A-A_{n+p}}$$

comme on le voit par application de l'inégalité triangulaire.

C'est suffisant ; soit en effet, (σ_{ni}) le système (L) de l'opérateur A_n relativement au système coordonné (φ_i) . L'inégalité

$$\|\sigma_{n+p,i} - \sigma_{n,i}\| = \| A^*_{n+p}\varphi_i - A^*_n \varphi_i \| \leq M_{A_{n+p}-A_n}$$

prouve que la suite σ_{1i}; σ_{2i};.....;σ_{ni};.... converge vers un élément σ_i . L'inégalité

$$\left| M_{A_{n+p}} - M_{A_n} \right| \leq M_{A_{n+p}-A_n}$$

conséquence aussi de l'inégalité triangulaire, prouve que les

M_{A_n} ont une limite; ils sont donc bornés dans leur ensemble par un nombre positif M, et comme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|(f.\,\sigma_{ni})\right|^2 \leq M^2 \,\|f\|^2$$

on voit, en passant à la limite, que le système (σ_i) est aussi un système (L) . Il définit un opérateur borné vers lequel les A_n tendent faiblement . Pour achever la démonstration, remarquons préalablement que, lorsqu'une suite d'opérateurs convergent faiblement vers l'opérateur A, et lorsque les M_{A_n} sont bornés dans leur ensemble par un nombre positif M, on a certainement $M_A \leq M$; c'est ce que l'on constate sans peine en partant de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \left|(f.\,\sigma_{ni})\right|^2 \leq M^2 \,\|f\|^2$$

puis en faisant d'abord n, puis m, infinis. Appliquons ceci à la suite $A_{n+p} - A_n$, qui pour p infini, converge faiblement vers $A-A_n$. Si n est pris d'autre part assez grand pour que

$$M_{A_{n+p}-A_n} \leq \varepsilon$$

on aura, d'après ce qui vient d'être dit $M_{A-A_n} \leq \varepsilon$, et la suite A_n converge uniformément vers l'opérateur A.

<u>Théorème 16.</u>- Si les suites d'opérateurs bornés A_n et B_n convergent uniformément vers les opérateurs bornés A et B, l'opérateur $A_n B_n$ converge uniformément vers AB.
On a en effet :

$$M_{AB-A_nB_n} = M_{A(B-B_n)+(A-A_n)B_n} \leq M_{A(B-B_n)} + M_{(A-A_n)B_n}$$

$$\leq M_A M_{B-B_n} + M_{A-A_n} M_{B_n}$$

ce qui suffit à prouver notre assertion puisque M_{A-A_n} et et M_{B-B_n} tendent vers 0 .

On notera que ce théorème n'est pas exact pour la convergence faible des suites d'opérateurs.

Remarque.- On envisage aussi une troisième espèce de convergence des suites d'opérateurs : la convergence forte, dont on obtient la définition en supprimant l'adverbe faiblement dans celle de la convergence faible . Cette troisième espèce de convergence est en quelque sorte intermédiaire entre les deux précédentes .

---

d) L'opérateur résolvant et le spectre

Soit λ un paramètre arbitraire pouvant prendre des valeurs complexes. Dans la suite, A désignera un opérateur borné, E l'opérateur identique .

Nous considèrerons l'opérateur $E - \lambda A$; quand λ est nul, il se réduit à l'opérateur identique qui est son propre inverse On peut se demander si, quand λ est suffisamment petit en module, $E - \lambda A$ n'a pas un opérateur inverse X satisfaisant aux conditions

$$X (E - \lambda A) = (E - \lambda A) X = E$$

Considérons la série formelle d'opérateurs

$$X = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots\ldots + \lambda^n A^n + \ldots$$

qui satisfait formellement aux équations précédentes. Je dis qu'elle est uniformément convergente pour $|\lambda|$ assez petit. Soit en effet

$$X_n = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n ;$$

Il est clair que la borne de l'opérateur $\lambda^p A^p$ est inférieure à $|\lambda|^p . (M_A)^p$, par suite

$$M_{X_{n+p}-X_n} \leq |\lambda|^{n+1} (M_A)^{n+1} + |\lambda|^{n+2} (M_A)^{n+2} + \ldots + |\lambda|^{n+p} (M_A)^{n+p}$$

il apparait que pour $|\lambda| < \frac{1}{M_A}$, $M_{X_{n+p}-X_n}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, quel que soit l'entier positif p, en prenant n assez grand. De plus, pour ces valeurs de λ, l'opérateur $\lambda^n A^n$ converge uniformément vers l'opérateur nul, et comme

$$(E - \lambda A)\, X_n = X_n\, (E - \lambda A) = E - \lambda^{n+1} A^{n+1}$$

on voit que la limite uniforme X de la suite X_n, somme de la série uniformément convergente

$$X = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots\ldots + \lambda^n A^n + \ldots$$

est l'inverse de l'opérateur $E - \lambda A$.

<u>Définition 11</u>.- On appelle <u>spectre</u> de l'opérateur A, l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'inverse de $E - \lambda A$ n'existe pas. Les autres valeurs de λ sont appelées valeurs ordinaires.

<u>Définition 12</u>.- λ étant une valeur ordinaire du paramètre, on appelle <u>opérateur résolvant</u> de l'opérateur A, l'opérateur A_λ, évidemment borné et continu, défini par la relation

$$(E-\lambda A)^{-1} = E + \lambda A_\lambda$$

D'après ce qui précède, les valeurs de λ de module inférieur à $1/M_A$ sont des valeurs ordinaires, et pour ces valeurs, A_λ est la somme de la série uniformément convergente

$$A_\lambda = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + \dots + \lambda^n A^{n+1} + \dots$$

En particulier A_0 se réduit à A.

<u>Equation fondamentale de l'opérateur résolvant</u>.- λ étant une valeur ordinaire, écrivons que

$$(E-\lambda A)(E+\lambda A_\lambda) = (E+\lambda A_\lambda)(E-\lambda A) = E$$

il vient

$$A_\lambda - A - \lambda A A_\lambda = A_\lambda - A - \lambda A_\lambda A = 0 \qquad (1)$$

Plus généralement, soitnt λ et μ deux valeurs ordinaires ; on a

$$E-\lambda A = (E+\lambda A_\lambda)^{-1}, \qquad E-\mu A = (E+\mu A_\mu)^{-1}$$

puis successivement

$$(\mu - \lambda) E = \mu(E+\lambda A_\lambda)^{-1} - \lambda(E+\mu A_\mu)^{-1}$$

$$(\mu-\lambda)(E+\lambda A_\lambda)(E+\mu A_\mu) = \mu(E+\mu A_\mu) - \lambda(E+\lambda A_\lambda)$$

qui donne en simplifiant, et en supposant $\lambda\mu \neq 0$

$$A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda) A_\lambda A_\mu = 0 \qquad (2)$$

on peut aussi permuter λ et μ, on a donc aussi

$$A_\mu - A_\lambda + (\lambda - \mu) A_\mu A_\lambda = 0 \qquad (2)$$

Les opérateurs résolvants A_λ et A_μ sont donc permutables.

Quand $\lambda\mu = 0$ on retrouve les relations (1) ; les relations (2) sont donc générales ; elles ont des conséquences importantes:

<u>Théorème 17.-</u> L'opérateur résolvant est une fonction continue de λ , c'est à dire que si une suite de valeurs ordinaires $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n; \ldots$ converge vers λ et si les $M_{A_{\lambda_n}}$ sont bornés dans leur ensemble, λ est aussi une valeur ordinaire .

On a, en effet, d'après (2)

$$M_{A_{\lambda_m} - A_{\lambda_n}} \leq |\lambda_m - \lambda_n| M_{A_{\lambda_m}} M_{A_{\lambda_n}} \leq |\lambda_m - \lambda_n| M^2 \quad \text{, puisque}$$

$M_{A_{\lambda_m}} \leq M$. L'opérateur A_{λ_n} tend donc uniformément vers un opérateur borné B. L'opérateur $E + \lambda_n A_{\lambda_n}$ tend uniformément vers $E + \lambda B$. Les produits $(E + \lambda_n A_{\lambda_n})(E - \lambda_n A)$ et $(E - \lambda_n A)(E + \lambda_n A_{\lambda_n})$ tendent uniformément vers $(E + \lambda B)(E - \lambda A)$ et $(E - \lambda A)(E + \lambda B)$, mais les termes de ces deux dernières suites sont égaux à E; on a donc

$$B = A_\lambda$$

<u>Théorème 18.-</u> La borne M_{A_λ} de l'opérateur résolvant A_λ est une fonction continue de λ .

Une conséquence de la relation (2) est en effet

$$\left| M_{A_\lambda} - M_{A_\mu} \right| \leq |\lambda - \mu| \, M_{A_\lambda} M_{A_\mu}$$

On en déduit, si $M_{A_\lambda} \neq 0$, ainsi que M_{A_μ}

$$\left| \frac{1}{M_{A_\lambda}} - \frac{1}{M_{A_\mu}} \right| \leq |\lambda - \mu|$$

ce qui prouve l'assertion . D'ailleurs l'hypothèse $M_{A_\lambda} \neq 0$ équivaut à $A_\lambda \neq 0$, et celà est bien réalisé, sans quoi, d'après (1), A serait aussi nul .

<u>Théorème 19.-</u> L'ensemble des valeurs ordinaires de λ est un ensemble ouvert.

Plus précisément, si λ est ordinaire, et si $|\lambda - \mu| < \frac{1}{M_{A_\lambda}}$ μ est aussi ordinaire.

Pour le voir, il suffit d'écrire, compte tenu de la relation (1)

$$E - \mu A = E - \lambda A - (\mu - \lambda) A = E - \lambda A - (\mu - \lambda)(E - \lambda A)(E + \lambda A_\lambda) A$$
$$= (E - \lambda A)(E - [\mu - \lambda] A_\lambda)$$

et les deux facteurs du second membre ont un inverse. On a donc

$$E + \mu A_\mu = (E - [\mu - \lambda] A_\lambda)^{-1}(E + \lambda A_\lambda)$$

D'ailleurs

$$(E - [\mu - \lambda] A_\lambda)^{-1} = E + (\mu - \lambda) A_\lambda + (\mu - \lambda)^2 A_\lambda^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^n + \ldots\ldots$$

et tout calcul fait, il reste

$$A_\mu = A_\lambda + (\mu - \lambda) A_\lambda^2 + \ldots\ldots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^{n+1} + \ldots\ldots$$

On peut dire que l'opérateur résolvant considéré comme fonction du paramètre λ admet pour dérivées successives

$$1!\, A_\lambda^2 \;;\; 2!\, A_\lambda^3 \;;\ldots\ldots;\; n!\, A_\lambda^{n+1} \;;\ldots\ldots$$

Ce dernier résultat conduit à regarder A_λ comme une fonction analytique de λ et à lui appliquer l'appareil de Cauchy.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

RIESZ.- Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.
v.NEUMANN.- Math.Grundlagen der Quantenmechanik
Eigenwerttheorie Hermitescher Operatoren; Math.Ann. Bd.IO2
Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc.LVII.
