Henri Cartan

Résumé du mémoire de F. Riesz sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 2 (1934-1935), exp. nº 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1934-1935__2__A14_0>

Exemplaire n° 4

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Deuxième année 1934-1935

ESPACE DE HILBERT

L.- Résumé du Mémoire de F.RIESZ sur les groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires dans l'espace de Hilbert

---

Exposé fait par M.Henri CARTAN, le 20 Mai 1935

Le mémoire en question est intitulé "Über Sätze von Stone und Bochner" (Acta de Szeged, VI, 1933, p.184-198) et se compose de deux parties (I.- Théorème de Bochner généralisé II.- théorème de Stone) précédées d'une introduction.

Introduction

On considère un groupe continu à un paramètre t d'opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert (Voir dans l'exposé C de Delsarte, la définition d'un opérateur unitaire) . U_t désignant l'opérateur, on aura

$$U_s U_t = U_{s+t} , \qquad U_0 = 1 \text{ (opérateur identique)}$$

U_t est par hypothèse une fonction <u>faiblement continue</u> de t , c'est à dire que $(U_t f, g)$ est une fonction continue de t, quels que soient f et g .

<u>Le théorème de Stone</u> (Proceedings Nat.Acad., 16, 1930 p.172-175) affirme que U_t admet une représentation spectrale de la forme

$$(1) \qquad U_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d\, E_\lambda$$

les E_λ constituant une décomposition spectrale de l'unité, indépendante de t. D'une façon précise, (Cf. l'exposé F de Chevalley) les E_λ sont des opérateurs de projection formant une suite non décroissante ($E_\lambda \leq E_\mu$ si $\lambda \leq \mu$), continue à gauche, avec

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = 1$$

La notation (1) signifie que l'on a, quels que soient f et g,

$$(2) \qquad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d\,(E_\lambda f, g)$$

et en particulier

$$(3) \qquad (U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d\,(E_\lambda f, f)$$

En d'autres termes, le théorème de Stone affirme que tout groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires est engendré par une transformation infinitésimale qui se met sous la forme d'un opérateur hypermaximal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \, d\,E_\lambda \qquad \text{(Cf. l'exposé F).}$$

Pour démontrer le théorème de Stone, il faut, connaissant U_t , déterminer E_λ . Ce problème présente l'aspect particulier suivant : dans (3) , f étant supposé fixé, le premier membre est une fonction continue connue p(t); au second membre, $(E_\lambda f, f)$ est une fonction inconnue $V(\lambda)$, bornée, non décroissante, continue à gauche, avec la condition supplémentaire : $\lim_{\lambda \to -\infty} V(\lambda) = 0$

D'où le problème : A quelles conditions une fonction continue p(t) (à valeurs complexes) admet-elle une représentation de

Fourier-Stieltjes

$$(4) \qquad p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d\,V(\lambda)$$

$V(\lambda)$ satisfaisant aux conditions énoncées plus haut ?

D'ailleurs $d\,V(\lambda)$ désigne une mesure de Radon, partout non négative, de masse totale finie; inversement, une telle mesure de Radon définit $V(\lambda)$ d'une façon unique.

La réponse est donnée par le <u>théorème de Bochner</u> (Vorlesungen über Fourriersche Integrale, p.74-76; Leipzig 1932) : il faut et il suffit que p(t) soit de <u>type positif</u> c'est à dire que l'on ait :

$$(5) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{m} p\,(t_\mu - t_\nu)\,\rho_\mu \overline{\rho_\nu} = 0$$

quels que soient $t_1, \ldots\ldots, t_m$ réels en nombre quelconque, et quels que soient $\rho_1, \ldots\ldots, \rho_m$ complexes.

Cette condition entraine en particulier :

1°- $p(-t) = \overline{p(t)}$

2°- $p(0) \geq 0$, $p(t) \leq p(0)$, donc $|p(t)|$ borné.

<u>But du mémoire de F.RIESZ</u> : appliquer la technique des séries de Fourier, d'abord à la démonstration du théorème de Bochner (sous l'hypothèse <u>p(t) mesurable</u> , hypothèse plus large que la continuité ; on détermine alors $V(\lambda)$ et l'on montre que (4) a lieu <u>presque partout</u> pour t), puis à la démonstration du théorème de Stone <u>déduit de celui de Bochner</u> (on ne sup-

pose donc pas la continuité de U_t , mais seulement la mesurabilité de $(U_t f,f)$; on définit E_λ , et on montre d'abord que (2) a lieu presque partout ; puis on montre que (2) a lieu partout, d'où suit la <u>continuité</u> de U_t).

<u>Théorème de BOCHNER</u>

Indiquons seulement le plan de la démonstration . La condition de Bochner est évidemment nécessaire . Il faut montrer qu'elle est suffisante .

1°- <u>Détermination de</u> $V(\lambda)$ <u>à partir de</u> $p(t)$ <u>mesurable et de type positif</u>.

Riesz définit, à partir de $p(t)$ fixée une fois pour toutes, une fonctionnelle linéaire $A(h)$ (Voir la définition de $A(h)$ dix lignes plus bas), définie pour toutes les fonctions $h(t)$ "<u>du type h</u>", c'est à dire réelles, continues, et ayant par morceaux, une dérivée continue. Cette fonctionnelle est réelle et bornée, elle a une valeur non négative quand $h(t)$ est non négative . Elle peut donc , d'après un théorème classique de Riesz, être considérée comme l'intégrale de $h(t)$ par rapport à une mesure de Radon, partout non négative et de masse totale finie, cette mesure de Radon caractérisant la fonctionnelle $A(h)$, et par suite la fonction $p(t)$.

D'où la fonction $V(\lambda)$ telle que

$$(6) \qquad A(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) \; d\,V(\lambda) \; .$$

Indiquons seulement comment on définit $A(h)$. On pose :

$$(7) \qquad A(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \;\; h^{\times}(-t) \;\; dt$$

$h^{\times}(t)$ désignant la transformée de Fourier de $h(t)$, c'est-à dire

$$(8) \qquad h^{*}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \;\; h(\lambda) \;\; d\lambda$$

L'intégrale (7) existe parce que $p(t)$ est mesurable et bornée. Le fait que la fonctionnelle $A(h)$ est bornée (on a, d'une façon précise, $|A(h)| \leq p(0)$ si $|h(t)| \leq 1$) , et qu'elle est non négative si $h(t)$ est non négative, résulte essentiellement du fait que :

$$A(h^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(t-s) \; h^{*}(t) \;\; \overline{h^{*}(s)} \;\; dt \, ds$$

est ≥ 0 , conséquence du fait que $p(t)$ est de <u>type positif.</u> (Pour le détail des démonstrations, consulter le mémoire de F.Riesz) .

2°- <u>$V(\lambda)$ étant ainsi définie</u>, il reste à montrer que :

$$q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \;\; d\,V(\lambda)$$

qui est bornée et continue, est égale, presque partout, à

$p(t)$, ce qui relève de la technique des séries de Fourier.

On montre d'abord que

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\, h^{*}(-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, h^{*}(-t)\, dt$$

quelle que soit $h(t)$ réelles, puis complexes ; ensuite on prend une fonction $h(t)$ particulière, telle que

$$h^{*}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{2}{n}\ \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t+u)}{(t+u)^2} \qquad (u > 0,\ n \text{ entier})$$

et, dans (9), on fait croitre n indéfiniment, u restant fixe; le premier membre tend vers $\frac{\pi}{2}\, q(u)$, le second vers $\frac{\pi}{2}\, p(u)$ pour presque toutes les valeurs de u.

C.Q.F.D.

<u>Complément</u>

Pour la suite, il est bon de rappeler comment on trouve $V(\lambda)$ à partir de la fonctionnelle $A(h)$. On a $(\lambda_1 \leq \lambda_2)$

$$V(\lambda_2 - 0) - V(\lambda_1 + 0) = \lim_{n\to\infty} A(h_n)$$

les $h_n(t)$ étant une suite de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{cases} 0 \leq h_n(t) \leq 1 & \text{quel que soit } t \\ h_n(t) = 0 \text{ pour } t \leq \lambda_1 & \text{et pour } t \geq \lambda_2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = 1 & \text{pour } \lambda_1 < t < \lambda_2 \end{cases}$$

En particulier, si on convient que $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} V(\lambda) = 0$ et que $V(\lambda)$ est continue à gauche, on a

$$(9') \quad V(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, h_n^{*}(-t)\, dt$$

avec
$$\begin{cases} 0 \leq h_n(t) \leq 1 \\ h_n(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq \lambda \\ \lim\limits_{n \to \infty} h_n(t) = 1 \quad \text{pour } t < \lambda . \end{cases}$$

Théorème de STONE

Voici le plan de la démonstration :

1°- on vérifie que $(U_t f, f) = p(t)$ est bien de type positif quel que soit f ; il lui correspond une fonction $V(\lambda ; f)$ définie, à partir de $p(t)$, par la relation (9), qui s'écrit ici

$$V(\lambda ; f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, f)\, h_n^{*}(-t)\, dt$$

2°- on pose plus généralement :

$$(10) \quad V(\lambda ; f,g) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U_t f, g)\, h_n^{*}(-t)\, dt \ ;$$

c'est une fonctionnelle bilinéaire bornée; elle est donc de la forme

$$(E_\lambda f, g)$$

E_λ étant un opérateur linéaire borné ; et on a

$$(11) \qquad (U_t f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d\,V(\lambda\,; f, g)$$

pour <u>presque toutes</u> les valeurs de t .(On peut faire en sorte que les valeurs exceptionnelles de t ne dépendent pas de f et g, parce que l'espace de Hilbert est séparable).

3°- Il reste alors à montrer que :

α) L'opérateur E_λ est hermitien

β) La relation (11) a lieu pour <u>toutes</u> les valeurs de t sans exception

γ) On a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = 1$

δ) On a $E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2} E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$

<u>Remarque</u> : les conditions α), γ), δ) expriment que les E_λ sont des opérateurs de projection et forment un spectre; la continuité à gauche et la propriété

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$$

résultent de la définition de $V(\lambda\,; f)$.

<u>Indications sur le développement</u>

I°- <u>$(U_t f, f)$ est de type positif</u>

En effet, on posant

$$(U_t f ; f) = p(t)$$

on a, en vertu de la propriété de <u>groupe</u>

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\rho_\mu \bar{\rho}_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \rho_\mu U_{t_\mu} f, \ \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu U_{t_\nu} f \right) \geq 0$$

2°- <u>Propriétés de $V(\lambda ; f,g)$</u>

On a $V(\lambda ; f,f) = V(\lambda ; f)$,

et

$$V(\lambda ; f+\mu g) = V(\lambda ; f) + \mu V(\lambda ; g,f) + \bar{\mu} V(\lambda ; f,g) + \mu\bar{\mu} V(\lambda ; g)$$

Or on a presque partout (Cf. 2ème partie du théorème de Bochner)

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d\, V(\lambda ; f) \ ;$$

en remplaçant f par $f+\mu g$ et égalant les coefficients de $\bar{\mu}$ on obtient la relation (11).

On montre que $V(\lambda ; f,g)$ est une fonctionnelle bornée en faisant voir que

$$|V(\lambda ; f,g)|^2 \leq (f,f) \, . \, (g,g) \ ;$$

pour cela, il suffit de vérifier

$$V(\lambda ; f) \leq (f,f)$$

ce qui résulte de

$$V(\lambda) \leq p(0) \, .$$

(On a vu en effet plus haut que $|A(h)| \leq p(0)$ si $|h(t)| \leq 1$)

3°- <u>Propriétés α , β , γ , δ .</u>

α) En permutant f et g dans (IO), on voit que E est hermitien.

α) et δ) résultent d'une propriété générale : <u>l'opérateur</u>

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} k(\lambda)\, d\, E_\lambda$$

où $k(\lambda)$ désigne une fonction (réelle ou complexe) du type h, <u>a une propriété multiplicative</u> : <u>si</u> $k = k_1\, k_2$, <u>alors</u> $K = K_1\, K_2$ (conséquence du fait que les U_t forment un <u>groupe</u>.)

On obtient β) en prenant

$$k(\lambda) = e^{i\lambda t}$$

les opérateurs correspondants

$$(12) \qquad Q_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, d\, E_\lambda$$

forment donc un groupe, et comme $Q_t = U_t$ presque partout, on a $Q_t = U_t$ pour <u>toutes les valeurs de t</u>.

γ) On a $Q_o = U_o = 1$; d'où d'après (12)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\, E_\lambda$$

c'est à dire $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = 1$

δ) En prenant $k_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_1 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_1 \end{cases}$

$$k_2(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \lambda < \lambda_2 \\ 0 & \text{pour } \lambda > \lambda_2 \end{cases}$$

on trouve

$$K_1 = E_{\lambda_1} \qquad K_2 = E_{\lambda_2}$$

d'où $E_{\lambda_2}\, E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1}\, E_{\lambda_2} = E_{\lambda_1}$ si $\lambda_1 \leq \lambda_2$