PAUL DUBREIL

Représentations des systèmes hypercomplexes

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 5, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A5_0>

SEMINAIRE DE MATHEMATIQUES

Première année 1933-1934

Théorie des Groupes et des Algèbres

E.- REPRESENTATION DES SYSTEMES HYPERCOMPLEXES

Exposé fait par M. Paul DUBREIL, le 29 Janvier 1934.

Bibliographie :

Van der Waerden , T.II , prg. I04, I08, I20 à I23.

E.Noether : Hyperkomplexe Grössen und Darstellungtheorie,
Math. Zeit. Bd.30 (1929) ch.III, & IV .

A.- DEFINITIONS- REPRESENTATIONS .

1.- Systèmes hypercomplexes .

Rappel de la définition : P étant un corps commutatif, on appelle système hypercomplexe sur P, un anneau σ qui est un P-module fini, et dont tous les éléments sont permutables avec ceux de P. Tout élément est donc de la forme :

$$a = \rho_1 u_1 + \ldots\ldots + \rho_r u_r$$
$$= u_1 \rho_1 + \ldots\ldots + u_r \rho_r$$

les u_i étant linéairement indépendants. On appelle r le rang du système .

Et on peut écrire :

$$\sigma = u_1 P + u_2 P + \ldots\ldots + u_r P$$

Le système est défini par la connaissance :

de P ;

des éléments de base $u_1 \ldots . u_r$;

de la loi de multiplication des éléments de base :

$$u_i u_k = \sum_{j=1}^{m} c^j_{ik} u_j$$

loi qui doit être associative .

Tout système hypercomplexe satisfait aux conditions maximale et minimale, ce qui permet d'appliquer aux systèmes hypercomplexes la théorie générale des anneaux (telle qu'elle a été exposée par M. de Possel, dans C.).

Exemples

1.- L'anneau de matrices complet sur Γ a rang n^2 ,si n est l'ordre des matrices .

2.- L'anneau de groupe d'un groupe fini G ; les éléments de G sont pris comme éléments de base du système, la loi de multiplication est celle du groupe . La considération des anneaux de groupes permet de faire rentrer la théorie des groupes finis dans celle des systèmes hypercomplexes .

2.- Transformations linéaires .

Soit K un anneau, avec élément unité ε , et soit M un K-module fini à droite de rang m . Désignons par ($x_1 \dots x_m$) une base de M. Tout élément de M est de la forme :

$$y = \sum_{k=1}^{m} x_k \alpha_k \qquad \alpha_k \in K$$

de sorte que, après avoir choisi une base de ce K-module de M, on peut le considérer comme un module de formes linéaires .

Considérons une transformation linéaire C . Elle est définie, quand on connait les formes $Cx_1, \dots Cx_m$, en lesquelles elle transforme $x_1, \dots x_m$:

$$C x_k = \sum_{j=1}^{m} x_k \gamma_{jk} \qquad (1)$$

donc par la matrice d'ordre m ,

$C = (\gamma_{jk})$. (Il est commode de représenter la transformation et la matrice correspondante par la même lettre).

La transformation linéaire considérée transforme y en :

$$C y = \sum_{k=1}^{m} (C x_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \gamma_{ik} \alpha_k = \qquad (1')$$

On a visiblement :

$$C (y + z) = C y + C z$$
$$C . y \alpha = C y . \alpha \qquad (2)$$

La <u>somme</u> de deux transformations linéaires définies par les matrices C et C' est par définition la transformation définie par la matrice C + C' , et on a :

$$(C + C') x_k = C x_k + C' x_k \qquad (3)$$
$$(C + C') y = C y + C' y \qquad (3')$$

Le <u>produit</u> de deux transformations linéaires définies par les matrices C, C' est la transformation définie par la matrice C C' et on a :

$$(C C') x_k = C (C' x_k) \qquad (4)$$
$$(C C') y = C (C' y) \qquad (4')$$

Les relations (2) montrent qu'on peut regarder une matrice C comme un opérateur à <u>gauche</u> sur les éléments de M (qui est déjà K-module à droite) et si on considère toutes les transformations linéaires de M définies par les matrices C d'<u>un anneau</u> de matrices Ω , ~~xxx~~ les relations (3) et (4) montrent que M est un Ω -module (à gauche).

3.- <u>Représentation</u> .- Celà étant, considérons d'abord un anneau quelconque .

Définition : On appelle représentation de degré m de dans K , toute homomorphie (d'anneau)

$\sigma \sim \Omega$ $\quad c \to C$ (c étant représenté par C)

c'est à dire $\quad c + c' \to C + C'$

$\quad cc' \to CC'$

faisant correspondre à σ un anneau de matrices Ω d'ordre m dont les éléments appartiennent à K . Si l'homomorphie est un isomorphisme, la représentation est dite fidèle .

4.- Module de représentation. - Etant donné une représentation de degré m, considérons un module M, K-module de rang m à droite, et les transformations linéaires sur ce module correspondant aux matrices C de l'anneau Ω : M est un Ω-module à gauche , mais en raison de l'homomorphisme entre σ et Ω nous pouvons aussi définir les éléments c de σ comme opérateurs à gauche sur les éléments de M, en posant :

$$c\, y = C\, y$$

et remplacer dans les relations (2) , (3) et (4) les lettres C, C' par les lettres c, c' correspondantes : M est donc aussi un σ-module à gauche .

Définition. - Un tel module M, K-module à droite de rang fini n,

$$M = x_1 K + \ldots\ldots + x_n K$$

et σ -module à gauche, s'appelle module de représentation de σ par rapport à K . (notion introduite par Krull, Théorie und Anw. der verallg. Abelsch. Gruppen , Sitzungsb. Heidelb. Akad. 1926).

D'après ce qui précède , la connaissance d'une représentation de degré m de $\mathcal{O}$ dans K, permet de définir un module de représentation de $\mathcal{O}$ dans K, module de rang m par rapport à K.

Inversement, si l'on se donne un module de représentation, et si on en précise la base, on en déduit une représentation .

Soit $M = x_1 K + \ldots\ldots + x_n K$, un module de représentation de base ($x_1, \ldots\ldots x_n$), M étant un $\mathcal{O}$-module à gauche, on a, pour c dans $\mathcal{O}$:

$$\underline{c\, x_k = \sum_i x_i \gamma_{ik}} \qquad \gamma_{ik} \in K$$

et les formules (2), (3), (4) avec des lettres c sont valables . Si donc, on fait correspondre à l'élément c de $\mathcal{O}$ la matrice

$$\underline{C = (\gamma_{ik})}$$

d'ordre n, il y a homomorphisme entre $\mathcal{O}$ et l'anneau Ω des matrices C . On a donc bien une représentation de $\mathcal{O}$.

Remarque :

A une représentation correspond un module de représentation bien déterminé, tandis qu'à un module de représentation correspondent une infinité de représentations, dépendant du choix de la base du module .

Un changement de base de M est une transformation linéaire , définie par une matrice P :

$$(\xi_1 \ldots\ldots \xi_n) = (x_1 \ldots\ldots x_n) P$$

Ce changement debase remplace la représentation $c \to C$ par la représentation $c \to P^{-1} C P$ qui est dite <u>équivalente</u> à la première . Il en est de même si on passe de M à un module isomorphe M', lesbases étant quelconques .

On appelle <u>classe de représentations</u> l'ensemble des représentations équivalentes à une représentation donnée .

A des modules de représentation isomorphes, correspond une <u>classe de représentations et inversement</u> .

B.- REDUCTION D'UNE REPRESENTATION

5.- <u>Définition</u> :

Une <u>représentation d'un anneau σ est dite réductible si le module de représentation correspondant M admet un sous-module permis N (N, K-module à droite , et σ -module à gauche), irréductible dans le cas contraire (c'est-à-dire, si M est simple)</u>.

Dire que la représentation est réductible, revient à dire que les transformations linéaires correspondantes laissent invariant un sous-espace linéaire , différent de M et de zéro .

6.- <u>Représentations réductibles</u>. - Nous allons supposer

maintenant que K est un corps (ce qui permet notamment d'affirmer que tout K-module fini admet une base minima).
(Voir l'exposé de M.Chevalley, B. et Van der Waerden, Bd.II prg.IO5)

Si M admet un sous-module(permis)

$$N = x_1 K + \dots + x_n K$$

on peut toujours prendre pour M une base comprenant $x_1 \dots x_n$ et $m-n=\ell$ autres éléments $y_1 \dots y_\ell$

$$M = x_1 K + \dots + x_n K + y_1 K + \dots + y_\ell K$$

Comme N est Γ-module , les x sont transformés en éléments de N par les transformations linéaires de la représentation :

$$x'_k = \sum x_i \gamma_{ik}$$

$$y'_k = \sum x_i \alpha_{ik} + \sum y_i \beta_{ik} \qquad (6)$$

Posons $R = (\gamma_{ik})$, $S = (\alpha_{ik})$, $T = (\beta_{ik})$

R et T sont deux matrices carrées d'ordres respectifs n et ℓ
S est une matrice rectangulaire .

Nous voyons que les matrices C de la représentation ont la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & S \\ O & T \end{pmatrix} \qquad (7)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau de matrices dans K soit réductible, est que : au moyen d'une transformation convenable $C' = P^{-1} C P$ (correspondant au choix d'une base convenable pour M) toutes les matrices de l'anneau puissent être mises sous la forme (7) .

Les relations (6) peuvent encore s'écrire :

$$(x'_1 \ldots\ldots x'_n) = (x_1 \ldots\ldots x_n)\, R$$
$$(y'_1 \ldots\ldots y'_\ell) = (y_1 \ldots\ldots y_\ell)\, T \quad (\text{module } N) \qquad (6')$$

D'où il résulte que , non seulement N , mais le module-facteur M/N , peuvent être regardés comme modules de représentation, et que les représentations correspondantes sont fournies par les matrices R et T .

Celà étant, considérons une série de composition du module M :

$M = M_\lambda$, $M_{\lambda-1}$, ..., $M_0 = (0)$ (M_i sous-modules permis)

Puis, prenons $N = M_{\lambda-1}$. De même , dans $M_{\lambda-1}$ considérons le sous-module $M_{\lambda-2}$ qui est maximum , etc ...... En choisissant convenablement les bases (de manière que la base d'un module comprenne celle du suivant) on voit que les matrices de la représentation correspondant à M , prennent la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \ldots\ldots & R_{1\lambda} \\ 0 & R_{22} \ldots\ldots & R_{2\lambda} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Les matrices R_{ii} de la diagonale correspondent aux facteurs de composition M_i / M_{i-1} . Ceux-ci étant simples, les représentations correspondantes sont irréductibles . On dit qu'on a opéré la réduction de la représentation correspondant au module M . Il résulte du théorème de Jordan-Hölder sur les séries de composition que les parties irréductibles R_{ii} sont déterminées à l'ordre et à l'équivalence près .

7.- Décomposition d'une représentation

Il y a un cas où les matrices C prennent une forme encore plus simple . Il peut se faire que dans (6) tous les α_{ik} soient nuls : alors le sous-module :

$$N_1 = y_1 K + \dots\dots\dots + y_\rho K$$

est lui-même sous-module permis, et $M = N \oplus N_1$ (somme directe) . Les matrices S sont alors nulles et C prend la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R & o \\ o & T \end{pmatrix} \qquad (9)$$

On dit que la représentation $c \to C$ se décompose en $c \to R$, $c \to T$.

8.- Représentation complètement réductible .

Supposons le module de représentation M complètement réductible, c'est-à-dire somme directe de doubles-modules ~~modules permis~~ simples .

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots\dots \oplus N_\lambda$$

On en déduit la série de composition

$$M = M_\lambda \,, \quad M_{\lambda-1} = N_1 \oplus \dots \oplus N_{\lambda-1} \,,$$

$$M_1 = N_1 \qquad M_o = (o)$$

(Voir exposé A sur la théorie des groupes).

et les matrices (8) prennent la forme :

$$C = \begin{pmatrix} R_{11} & o & \dots & o \\ o & R_{22} & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & R_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \qquad (IO)$$

où les R_{ii} définissent des représentations irréductibles ; plusieurs R_{ii} peuvent d'ailleurs être identiques . La représentation $c \to C$ est dite alors complètement réductible

9.- Cas d'un système hypercomplexe .

Premons maintenant comme anneau $\mathfrak{o}$ un système hypercomplexe sur P , P étant un corps commutatif :

$$\mathfrak{o} = u_1 P + u_2 P + \dots + u_r P$$

Alors on considère pour la représentation un anneau K (en-général un corps) dont le centre contient P et on exige que l'homomorphisme d'anneau

$$\mathfrak{o} \sim \bar{\mathfrak{o}}$$

soit aussi homomorphisme vis à vis des opérateurs ρ de P en d'autres termes, que si :

$$c \to C$$

on ait aussi

$$c\rho \to C\rho \qquad (11)$$

quel que soit $\rho \in P$. Par conséquent, la représentation est entièrement définie dès qu'on connait les matrices $U_1 \dots U_r$ représentant les éléments de base $u_1 \dots u_r$ du système hypercomplexe .

Pour le module de représentation M, dans lequel on a (puisqu'il s'agit d'un module double :

$$c\, m.\rho = c.\, m\rho,$$

(11) entraine :

$$c\rho.m = c\, m\, .\, \rho \qquad (11')$$

IO.- Cas particuliers

Le plus simple est : $K = \rho$

On passe de ce cas à celui de K commutatif quelconque en considérant K comme une extension de ρ, c'est à dire en introduisant le système σ_K . Si dans la représentation de σ dans K, $u_1 \ldots\ldots u_r$ sont représentées par des matrices $\mathcal{U}_1 \ldots\ldots \mathcal{U}_r$ on peut représenter un élément $\sum \varkappa_i u_i$ ($\varkappa_i \in K$) de σ_K par la matrice $\sum \varkappa_i \mathcal{U}_i$, ce qui définit une représentation de σ_K : donc, inversement, toute représentation de σ dans un corps commutatif K s'obtient à partir d'une représentation de σ_K.

Une autre hypothèse restreignant le problème est celle de l'existence d'une unité e dans σ. On peut alors supposer que cette unité est opérateur unité pour le module de représentation M : $e\, m = m$. Il n'en est pas forcément ainsi car on pourrait poser par exemple : $c\, m = o$ quel que soit c dans σ . Mais on montre que tout module de représentation M est somme directe de deux modules de représentation

$$M = M_1 \oplus M_o \qquad (\, m = em + (\, m - em\,)$$

où M_1 admet l'unité e de σ comme opérateur unité et où M_o

est annulé par σ (c'est à dire $c\, m_o = 0$ quels que soient $c \in \sigma$ et $m_o \in M_o$).

11.- Représentation régulière .

Pour $K = \rho$, σ est lui-même module de représentation (σ-module à gauche, ρ-module à droite) . La représentation correspondante s'appelle la représentation régulière Les sous-modules (doubles) ne sont autres que les idéaux à gauche ,(les modules de représentation, irréductibles, sont les idéaux à gauche simples), et la forme réduite de la représentation est donnée par une série de composition des idéaux à gauche . La représentation régulière est complètement réductiblé, si l'anneau σ l'est lui-même (à gauche).

C.- THEOREMES FONDAMENTAUX

(Van der Waerden Bd.II, p.I2I).

I2.- Rappel de résultats connus (Voir l'exposé I.C de M. de Possel, Grandeurs Idempotentes)

On a considéré différentes conditions générales auxquelles un anneau est susceptible de satisfaire et étudié la manière dont ces conditions dépendent les unes des autres . Ces conditions sont :

1- Condition maximale pour idéaux à gauche (T.K.S.)

2- Condition minimale pour idéaux à gauche (V.K.S.)

3- Absence de radical . (c'est-àedire (o) seul idéal nilpotent)

(Quand les conditions 2 et 3 sont vérifiées, on dit l'anneau semi-simple).

4- Existence d'une unité.

5- Réductibilité complète à gauche (anneau somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche simples).

Alors, le théorème fondamental s'énonce :

$$2 + 3 \rightleftarrows 4 + 5$$

Pour les systèmes hypercomplexes, il faut se rappeler que (en raison de l'existence d'une base) 1 et 2 sont toujours remplies . Donc le théorème fondamental devient :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma \text{ sans radical} \\ (\text{donc semi-simple})\end{array}\right\} \text{ entraine } \left\{\begin{array}{l}\text{existence d'une unité} \\ \text{et réductibilité complète.}\end{array}\right.$$

et réciproquement .

Rappelons enfin, qu'à partir d'un anneau σ possédant un radical τ on peut déduire un anneau ne possédant plus de radical : l'anneau des classes de restes σ / τ.

Soit donc σ un système hypercomplexe, semi-simple :

$$\sigma = u_1 \rho + \ldots\ldots + u_r \rho$$

Utilisons les deux propriétés caractéristiques : <u>existence de l'unité e</u> , et

$$\sigma = \ell_1 + \ldots\ldots + \ell_s \qquad (12)$$

Considérons une représentation dans ρ, le module de représentation M admettant l'unité e de σ comme opérateur unité .

I3. - **Théorème I . - M est complètement réductible et les modules simples dont M est la somme directe sont isomorphes aux idéaux à gauche simples de σ : $\ell_1 \ldots \ell_s$.**

Démonstration: a) On montre d'abord que M est un module fini par rapport à σ en utilisant l'existence de l'unité e de σ . En effet, M est par définition, module fini par rapport à ρ :

$$M = m_1\rho + \ldots + m_s\rho$$

or d'après (11') :

$$m_k = e\,m_k \cdot \rho = e\,\rho \cdot m_k = \omega\, m_k$$ où ω élément de σ

Donc, $m_k\,\rho \subset m_k$

et par suite $M = (\,\sigma m_1 \ldots\ldots \sigma m_s)$

b) Tenons compte maintenant de (12) , il vient :

$$M = (\,\ldots\ldots \ell_i m_k \ldots\ldots) \qquad (13)$$

On vérifie sans peine qu'un σ-module $\ell_i m_k$ est :

ou bien nul,

ou bien isomorphe à ℓ_i et par conséquent simple

(En effet, si l'on fait correspondre à x de ℓ_i , xm_k dans $\ell_i m_k$, cette correspondance est un homomorphisme . L'ensemble des éléments de ℓ_i auxquels correspond 0 dans $\ell_i m_k$ est un idéal à gauche, donc (o) ou ℓ_i puisque ℓ_i est simple Dans le premier cas, $\ell_i m_k \simeq \ell_i$, dans le deuxième cas, $\ell_i m_k = 0$).

Chacun des modules $l_i m_k$ étant simple a, avec la somme de ceux qui le précèdent, seulement zéro en commun, ou y est contenu entièrement. Donc, si on supprime ceux qui sont contenus dans la somme des précédents, M est la somme directe de ceux qui restent. C.Q.F.D.

Remarque :

Le théorème précédent est valable pour un anneau σ semi-simple et un σ-module fini M.

I4.-Application du théorème.

On peut obtenir les idéaux à gauche simples $l_1 \ldots\ldots l_s$ dont σ est la somme directe en décomposant d'abord σ en idéaux bilatères :

$$\sigma = \mathfrak{a}_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{a}_\lambda \qquad (1)$$

puis chaque anneau simple $\mathfrak{a}_\mu$ en idéaux à gauche simples. Les l_i contenus dans un $\mathfrak{a}_\mu$ sont annulés par tout autre $\mathfrak{a}$ (relations d'orthogonalité). Tous les idéaux à gauche simples d'une même $\mathfrak{a}$ sont isomorphes (isomorphisme avec opérateurs les opérateurs étant les éléments de σ puisque tout idéal à gauche dans $\mathfrak{a}$ est idéal à gauche dans σ); deux idéaux à gauche simples provenant de $\mathfrak{a}_\mu$ différents, ne sont pas isomorphes.

Celà étant, soit l_i un des idéaux à gauche simples provenant de $\mathfrak{a}_\mu$, tous les $\mathfrak{a}$ à l'exception de $\mathfrak{a}_\mu$, sont représentés par zéro dans la représentation irréductible définie par l_i. De plus, l'anneau simple $\mathfrak{A}_\mu$ ne possède qu'une représentation irréductible. (à l'équivalence près). Et cette représentation est fidèle, car $\mathfrak{A}_\mu$ est idéal bilatère simple (l'ensemble des éléments de $\mathfrak{A}_\mu$ représentés par la matrice O est un idéal bilatère, donc O).

Nous construirons dans un instant, explicitement, cette représentation irréductible d'un système simple .

Etudions, auparavant, le cas d'un système avec radical.

I5.- Théorème II

Si $\mathfrak{o}$ est un système hypercomplexe avec radical $\mathfrak{r}$ tout $\mathfrak{o}$-module de représentation simple M (qui n'est pas annulé par $\mathfrak{o}$) est isomorphe à un idéal à gauche simple de l'anneau sans radical $\mathfrak{o}/\mathfrak{r}$.

Démonstration : (Voir Van der Waerden , Bd.II, p.I8I)

$$\mathfrak{r} M \subset M \quad , \quad \text{donc} \quad = (o) \quad \text{ou } M$$

Si on avait $\quad M = \mathfrak{r} M$

On en déduirait $\quad M = \mathfrak{r}M = \mathfrak{r}^2 M = \ldots\ldots = (o)$

($\mathfrak{r}$ nilpotent)

Impossible .

Donc : $\quad \mathfrak{r}\, M = O$

et par suite , tous les éléments de $\mathfrak{o}$ appartenant à une même classe par rapport à $\mathfrak{r}$ donnent, multipliés par un élément de M, le même produit . On peut donc regarder M comme

σ/τ -module . σ/τ étant sans radical, possède une unité et est complètement réductibme ; il suffit maintenant d'appliquer le théorème I .

On peut encore exprimer le théorème II de la manière suivante :

Toutes les représentations irréductibles de σ sont contenues dans la représentation régulière de σ/τ (puisque, précisément les modules de représentations irréductibles sont les idéaux à gauche simples).

16.- Construction d'une représentation irréductible d'un système simple .

Les théories précédentes ont montré l'intérêt de ces représentations .

On sait que le système simple σ est isomorphe à un anneau completde matrices dans un corps Λ :

$$\sigma = c_{11}\Lambda + c_{12}\Lambda + \ldots\ldots + c_{nn}\Lambda$$

(ce qui est une représentation de σ)

et qu'un idéal simple à gauche l_i est donné par :

$$l_i = c_{1i}\Lambda + c_{2i}\Lambda + \ldots\ldots + c_{ni}\Lambda$$

Nous prendrons :

$$l = l_1 = c_{11}\Lambda + c_{21}\Lambda + \ldots\ldots + c_{n1}\Lambda$$

On considère la représentation de σ dans son corps fondamental P , qui est contenu dans Λ : le degré de Λ par rapport à P est fini, car le rang de σ est égal à n^2x degré de Λ. Si ce degré est d et si :

$$\Lambda = \lambda_1 P + \ldots + \lambda_d P$$

on a,

$$\sigma = c_{11}\lambda_1 P + \ldots + c_{11}\lambda_d P + \ldots + c_{nn}\lambda_1 P + \ldots + c_{nn}\lambda_d P$$

Considérons d'abord le cas $\Lambda = P$: qui se produira notamment si P est algébriquement fermé. Alors les matrices de la représentation définie par ℓ s'obtiennent immédiatement (voir prg.2)

Soit $a = \sum_{ik=1}^{n} c_{ik}\alpha_{ik}$ un élément de σ.

On a

$$a\, c_{k1} = \sum_{i=1}^{n} c_{i1}\alpha_{ik} \quad \text{donc} \quad a \to (\alpha_{ik})$$

Et par suite, la représentation irréductible cherchée est constituée par l'anneau complet de matrices auquel σ est isomorphe : c'est naturel puisqu'on sait qu'à l'équivalence près il n'y a qu'une représentation irréductible .

Supposons maintenant Λ surcorps de P :

$$\Lambda = \lambda_1 P + \ldots + \lambda_d P$$

Λ a la forme d'un système hypercomplexe sur P . Cherchons d'abord sa représentation régulière . Soit :

$$\beta\lambda_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \beta_{ij} \qquad \beta \to B = (\beta_{ij})$$

Celà étant, cherchons la représentation dans P définie par ℓ . On a :

$$\ell = c_{11}\Lambda + c_{21}\Lambda + \ldots + c_{n1}\Lambda$$

$$= (c_{11}\lambda_1 P + \ldots + c_{11}\lambda_d P) + \ldots + (c_{n1}\lambda_1 P + \ldots + c_{n1}\lambda_d P)$$

Cherchons d'abord la représentation d'un élément de σ de la forme βc_{ik}. Pour cela, on le multiplie par les éléments de base

$$c_{11}\lambda_1, \ \ldots c_{11}\lambda_d, \ \ldots c_{n1}\lambda_1, \ \ldots\ldots, \ c_{n1}\lambda_d$$

de ℓ_1, qui se répartissent en groupes de α éléments. On trouve zéro, sauf pour le kème groupe. Pour ce groupe, on a :

$$\beta\, c_{ik} \cdot c_{k1} \lambda_j = \beta\, c_{i1} \lambda_j = c_{i1} \sum_{i'=1}^{\alpha} \lambda_{i'} \beta_{i'j} = \sum_{i'=1}^{\alpha} c_{i1} \lambda_{i'} \beta_{i'j}$$

où seuls les éléments de base du ième groupe ont des coefficients différents de zéro, ces coefficients étant d'ailleurs les $\beta_{i'j}$. On peut alors, en groupant les lignes et les colonnes, par α, écrire la matrice correspondant à βc_{ik} sous la forme :

$$\beta c_{ik} \to \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} 1 & & k & & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & B & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \\ i \\ \\ n \end{array} \end{array}$$

Soit maintenant $a = \sum_{ik=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ik}$ un élément de $\mathcal{J}$. Désignons par A_{ik} la matrice d'ordre α représentant dans ρ l'élément α_{ik} de Λ. On obtient immédiatement la représentation :

$$a \to \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

I7.- Application. Théorème de Burnside :

Un système S de matrices d'ordre n, ~~absolument irréductible S~~, et contenant, en même temps que deux matrices, leur et de plus absolument irreductible

produit (c'est à dire, restent irréductible dans toute extension algébrique du corps commutatif K auquel sont supposés appartenir les coefficients des matrices) contient exactement n^2 matrices linéairement indépendantes .

Démonstration (Voir Van der Waerden , Bd .II , p.I83)

On passe à l'extension algébriquement fermée Ω de K : le système S reste irréductible . Aux matrices A_i de S on ajoute les combinaisons linéaires $\Sigma A_i \omega_i$ ($\omega_i \in \Omega$) , ce qui donne un système S', extension de S . Ce système a un rang fini par rapport à Ω puisqu'il n'y a pas plus de n^2 matrices linéairement indépendantes dans S' : c'est donc un système hypercomplexe, qui est une représentation irréductible de lui-même . Mais , d'après les théorèmes fondamentaux une telle représentation est représentation d'un système sans radical et même d'un système simple . Donc, puisqu'on est dans un corps algébriquement fermé, elle contient n^2 matrices linéairement indépendantes .

I8.- Représentation du centre

(Van der Waerden, Bd.II, p.I22)

Les résultats sont les suivants :

Les matrices constituant la représentation du centre $\mathfrak{Z}$ de σ sont permutables avec toutes les matrices représentant des éléments quelconques de σ . Si le corps fondamental P est algébriquement fermé, et la représentation irréductible, le centre est représenté par des matrices permutables avec toutes les matrices de l'anneau complet, donc par les matrices de la forme λE_n (E_n matrice unité d'ordre n) De même, dans un corps quelconque, pour des représentations absolument irréductibles.

On en déduit, immédiatement, que si σ est commutatif, toute représentation absolument irréductible est du premier degré.

On sait que si σ, non commutatif, est semi-simple, donc somme de systèmes simples

$$\sigma = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$$

son centre $\mathfrak{Z}$ est somme directe d'autant de corps :

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \dots + \mathfrak{Z}_s$$

$\mathfrak{Z}_i$ étant le centre de α_i (exposé C de Possel) . Le nombre de représentations irréductibles de σ non équivalentes est égal à s De même pour $\mathfrak{Z}$. Donc, un système hypercomplexe et son centre possèdent le même nombre de représentations irréductibles distinctes .

I91- Traces . (Van der Waerden, Bd.II, par.I23)

Par définition, la trace de a dans la représentation D est égale à la trace de la matrice A représentant a .

Si $A = (\alpha_{ik})$, $Sp_D(a) = \Sigma \alpha_{ii}$

Dans des représentations équivalentes, les traces d'un même élément sont identiques .

Les traces sont des fonctions linéaires :

$$S(a+b) = S(a) + S(b) \qquad S(a\lambda) = S(a).\lambda$$

La trace dans une représentation réductible est somme des traces dans les représentations irréductibles correspondantes .

20.- Caractères .

On appelle caractères, les traces dans les représentations absolument irréductibles (ou irréductibles dans un corps algébriquement fermé Ω) . Dans la ν ème représentation irréductible $\mathfrak{D}_\nu$, on désigne le caractère par $\chi_\nu(a)$

Théorème : - Une représentation complètement réductible d'un système hypercomplexe σ dans un corps Ω de caractéristique nulle, est déterminée, à une équivalence près, par les traces des matrices correspondantes .