SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

J. DIEUDONNÉ

Algèbres de matrices

Séminaire de Mathématiques (Julia), tome 1 (1933-1934), exp. n° 4, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SMJ_1933-1934__1__A4_0

© École normale supérieure, Paris, 1933-1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de mathématiques implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exemplaire n° 6.
 Institut Henri Poincaré
 Ne peut quitter la
 salle de Travail

SEMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

Première année 1933-1934

Théorie des Groupes et des Algèbres

Une matrice est nulle si tous ses éléments sont nuls.
 Soit deux matrices A et B ayant chacune le même nombre

D. - Algèbres de Matrices

Exposé fait par M. DIEUDONNE, le 15 Janvier 1934

Si λ est un nombre de $\mathcal{F}$, le produit λA est défini par
 $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$ et de même $A \lambda = (\alpha_{ij} \lambda)$

Enfin, soit A et B deux matrices telles que le nombre
 des colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. On
 appelle alors produit AB, la matrice :

$$C = (\gamma_{ik})$$

$$\text{ou } \gamma_{ik} = \sum_j \alpha_{ij} \beta_{jk}$$

Toutes ces définitions s'expliquent d'elles-mêmes quand
 on considère une matrice A comme définissant une substitution
 linéaire

$$u_i = \sum_j \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Une telle substitution peut d'ailleurs elle-même s'écri-
 re :

$$U = AV$$

A. - DEFINITIONS. - ANNEAUX DE MATRICES

1. - Matrices. - Soit $\mathcal{O}$ un anneau ayant un élément unité. Une matrice de cet anneau est un tableau de $m \times n$ éléments de l'anneau :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

Une matrice est nulle si tous ses éléments sont nuls.

Soit deux matrices A et B ayant chacune le même nombre de lignes et de colonnes. On pose :

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

Si λ est un nombre de $\mathcal{O}$, le produit λA est défini par

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij}) \text{ et de même } A \lambda = (\alpha_{ij} \lambda)$$

Enfin, soit A et B deux matrices telles que le nombre des colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. On appelle alors produit AB, la matrice :

$$C = (\gamma_{hk})$$

$$\text{ou } \gamma_{hk} = \sum_i \alpha_{hi} \beta_{ik}$$

Toutes ces définitions s'expliquent d'elles-mêmes quand on considère une matrice A comme définissant une substitution linéaire

$$u_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Une telle substitution peut d'ailleurs elle-même s'écrire :
inversément. On n'a $A = 0$ que si $\alpha_{ij} = 0$ quel que soit

$$u = A v$$

$$\text{ou } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On déduit immédiatement des définitions les règles suivantes :

$$\begin{aligned} A + 0 &= A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ \lambda (A + B) &= \lambda A + \lambda B && \text{lorsque les opérations} \\ (A + B) \lambda &= A \lambda + B \lambda && \text{effectuées ont un sens} \\ A \cdot BC &= AB \cdot C \\ A (B + C) &= AB + AC \\ (B + C) A &= BA + CA \end{aligned}$$

Dans la suite de cette conférence, nous ne considérerons plus que des matrices carrées d'ordre n.

2. - Toutes les matrices carrées d'ordre n dans un anneau $\mathcal{J}$ forment un anneau, l'anneau de matrices complet (ou total) sur $\mathcal{J}$

Cette anneau admet $\mathcal{J}$ comme domaine d'opérateurs à droite et à gauche.

Posons :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} & j & \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \\ - & - & - & 1 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On peut écrire toute matrice sous la forme

$$A = (\alpha_{ij}) = \sum \alpha_{ij} e_{ij} = \sum e_{ij} \alpha_{ij}$$

et inversement. On n'a $A = 0$ que si $\alpha_{ij} = 0$ quelque soit

1, j. Les e_{ij} sont dits éléments de base de l'anneau de matrices par rapport à $\mathcal{V}$.

D'après la règle de multiplication des matrices, on a

$$e_{ij} e_{hk} = 0 \quad \text{si } j \neq h$$

$$e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$$

L'anneau de matrices admet un élément unité, la matrice

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn}$$

3.- Supposons maintenant que $\mathcal{V}$ soit un corps K . On désigne alors l'anneau de matrices d'ordre n sur K par K_n .

Théorème I

K_n est un anneau simple, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'autres idéaux bilatères que (0) et K_n lui-même

En effet, si $\mathcal{A}$ est un tel idéal, et a un élément $\neq 0$ de $\mathcal{A}$, soit :

$$a = \sum_{ij} \alpha_{ij} e_{ij}$$

soit $\alpha_{\lambda\mu} \neq 0$, $\mathcal{A}$ contient aussi :

$$\alpha_{\lambda\mu}^{-1} e_{\mu\lambda} a e_{\lambda\mu} = e_{\lambda\lambda}$$

quelque soient λ et μ , donc $\mathcal{A} = K$.

Montrons que K_n peut être décomposé en une somme directe d'idéaux à gauche minima. Il est facile d'avoir ici une telle décomposition

$$I_1 = (e_{11} \ e_{21} \ \dots \ e_{n1}) \text{ est un tel idéal}$$

en effet,

$$e_{kk} e_{i1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ e_{k1} & \text{si } k = i \end{cases} \quad \text{donc } e_{kk} e_{i1} \in \mathcal{L}_1$$

par suite aussi :

$$x \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_1 \quad \text{quelque soit } x \in K_n$$

D'autre part, $\mathcal{L}_1$ est minimum, car si $a \subset \mathcal{L}_1$ et $a \neq 0$

$$\text{soit } a = \sum_i \alpha_i e_{i1}$$

et si $\alpha_\lambda \neq 0$, $\mathcal{L}_1$ contient aussi

$$\alpha_\lambda^{-1} e_{\lambda 1} a = e_{\lambda 1} \quad \text{quel que soit } \lambda$$

Donc tout élément a de $\mathcal{L}_1$ engendre tout l'idéal, ce qui montre que $\mathcal{L}_1$ est minimum. Même raisonnement pour

$$\mathcal{L}_k = (e_{1k} \ e_{2k} \ \dots \ e_{nk})$$

d'où il suit que :

$$K_n = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$$

somme directe de n idéaux à gauche.

B. - Théorème fondamental de Macclagan-Wedderburn

4. - L'intérêt des anneaux de matrices réside dans le théorème fondamental de Macclagan-Wedderburn : Toute algèbre simple est isomorphe à un anneau de matrices sur un corps.

(Rappel de la définition d'une algèbre simple : anneau sans radical satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche, et n'ayant pas d'autre idéal bilatère que 0 et l'anneau lui-même).

La démonstration que nous allons donner, due à Artin, et non publiée, se fait en deux étapes.

5.- Première partie de la démonstration

Définition : Un anneau σ avec élément unité est dit posséder un système d'unités matricielles e_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) si les e_{ij} sont dans σ et satisfont aux conditions

$$(I) \begin{cases} e_{ij} e_{kl} = 0 & \text{si } j \neq k \\ e_{ij} e_{jk} = e_{ik} \\ 1 = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn} \end{cases}$$

Théorème. - Si un anneau possède un système d'unités matricielles e_{ij} il est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients dans le sous-anneau $\mathcal{K}$ de σ composé des éléments de σ permutables avec tous les e_{ij} .

Formons les éléments de $\mathcal{K}$. Soit $x \in \sigma$. Posons :

$$y(x) = \sum_i e_{i1} x e_{i1}$$

On a $y e_{jk} = e_{j1} x e_{1k} = e_{jk} y$

Donc $y \in \mathcal{K}$. Inversement si $y \in \mathcal{K}$ on a

$$\sum_i e_{i1} y e_{i1} = \sum_i e_{ii} y = y$$

Ceci posé, à $x \in \sigma$ faisons correspondre la matrice à coefficients dans $\mathcal{K}$

$$\bar{x} = (a_{ij})$$

où $a_{ij} = y(e_{i1} x e_{j1})$

On a $\overline{x + x'} = \bar{x} + \bar{x}'$

D'autre part,

$$y(e_{i1} x e_{j1}) = \sum_{\lambda} e_{\lambda i} x e_{j\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } y(e_{i1} x x' e_{j1}) &= \sum_{\lambda} e_{\lambda i} x x' e_{j\lambda} = \sum_{\lambda \mu} e_{\lambda i} x e_{\mu\lambda} e_{\mu\lambda} x' e_{j\lambda} \\ &= \sum_{\mu} y(e_{i1} x e_{i1}) y(e_{\mu\lambda} x' e_{j1}) \end{aligned}$$

et par suite $\overline{\overline{x} \overline{x'}} = \overline{x \cdot x'}$

Inversement, soit $M = (a_{ij})$ une matrice de l'anneau des matrices sur $\mathbb{K}$. Il existe un seul élément x de $\mathcal{V}$ tel que $\overline{x} = M$. En effet, si on écrit l'équation

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda i} \cdot x \cdot e_{j \lambda} = a_{ij}$$

on en tire

$$a_{ij} e_{ij} = e_{ii} x e_{jj}$$

$$\sum_j a_{ij} e_{ij} = \sum_j e_{ii} x e_{jj} = x$$

Donc $x \rightarrow \overline{x}$ est une isomorphie.

6.- Deuxième partie de la démonstration

Soit maintenant $\mathcal{Y}$ une algèbre simple. Nous allons former un système d'unités matricielles dans $\mathcal{Y}$. D'après le 1er théorème de MacLagen-Wedderburn, elle se décompose en une somme directe de n idéaux à gauche minima

$$\mathcal{Y} = \sum_i \mathcal{Y} e_i$$

avec $e_i e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ e_i & \text{si } i = j \end{cases}$

$$1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

Nous poserons

$$\mathcal{Y}_{ij} = e_i \mathcal{Y} e_j$$

C'est un module de $\mathcal{Y}$. (C'est même un sous-anneau, mais si $i \neq j$ le produit de deux nombres quelconques est 0)

Nous aurons à envisager des produits de modules. Il est clair, de façon générale, que si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Z}$ sont deux modu-

les d'un anneau $\mathcal{J}$. Les sommes de produits $\sum \alpha \beta, \alpha \in \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{J}, \beta \in \mathcal{J} \mathcal{J}$ définissent un nouveau module qu'on désigne par $\mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{J}$. Ce produit est associatif et distributif.

a) Etude de $\mathcal{J} e$. D'une façon plus générale, soit $\mathcal{J}$ un anneau, e un idempotent de $\mathcal{J}$ et considérons le module $e \mathcal{J} e$ qui est évidemment un sous-anneau de $\mathcal{J}$, et n'est pas nul puisqu'il contient $e^2 = e \neq 0$. e est d'ailleurs unité de $e \mathcal{J} e$.

Soit $\mathcal{M}$ un idéal à gauche de $e \mathcal{J} e$. On a

$$\mathcal{M} = e \mathcal{M} = \mathcal{M} e$$

d'où $\mathcal{J} \mathcal{M} = \mathcal{J} e \mathcal{M}$

et $e \mathcal{J} \mathcal{M} = e \mathcal{J} e \mathcal{M} = \mathcal{M}$

la correspondance $\mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{J} \mathcal{M}$ est donc biunivoque. Donc,

si $\mathcal{J}$ satisfait à la condition du minimum (ou du maximum)

pour les idéaux à gauche, il en est de même de $e \mathcal{J} e$.

De plus $\mathcal{J} \mathcal{M}^2 = \mathcal{J} \mathcal{M} \cdot e \mathcal{J} \mathcal{M} = \mathcal{J} \mathcal{M} \cdot \mathcal{J} \mathcal{M} = (\mathcal{J} \mathcal{M})^2$

donc, si $\mathcal{J}$ est un semi-simple, $e \mathcal{J} e$ est aussi semi-simple.

Supposons maintenant que $\mathcal{J} e$ soit idéal à gauche minimum

On a $\mathcal{J} \mathcal{M} = \mathcal{J} \mathcal{M} e \subset \mathcal{J} e$

Donc $\mathcal{J} \mathcal{M} = 0$ ou $\mathcal{M} = e \mathcal{J} \mathcal{M} = 0$, ou $\mathcal{J} \mathcal{M} = \mathcal{J} e$ ou $\mathcal{M} = e \mathcal{J} e$

Donc les seuls idéaux à gauche de $e \mathcal{J} e$ sont 0 et $e \mathcal{J} e$

Par suite, $e \mathcal{J} e$ est un corps, car si on considère un élément

a de $e \mathcal{J} e$, l'idéal à gauche engendré par a est $\neq 0$, donc

est identique à $e \mathcal{J} e$. Par suite, il existe un b tel que

$$ba = e$$

$$b \in e \mathcal{J} e$$

Autrement dit, il existe un inverse à gauche et une unité donc $e \mathcal{Y} e$ est bien un corps $\mathcal{K}$.

B) Construction des e_{ij}

Supposons maintenant $\mathcal{Y}$ simple.

On a $\mathcal{Y}_{ij} \mathcal{Y}_{jk} = e_i \mathcal{Y} e_j \mathcal{Y} e_k$

Mais $\mathcal{Y} e_j \mathcal{Y}$ est idéal bilatère dans $\mathcal{Y}$, et différent de 0

puisque'il contient $e_j^3 = e_j \neq 0$ donc est $\equiv \mathcal{Y}$

$$\mathcal{Y}_{ij} \mathcal{Y}_{jk} = \mathcal{Y}_{ik} \quad \mathcal{Y}_{ij} \mathcal{Y}_{kl} = e_i \mathcal{Y} e_j e_k \mathcal{Y} e_l = 0$$

On a $\mathcal{Y}_{ii} \neq 0$ ($j \neq k$)

Donc, $\mathcal{Y}_{ij} \mathcal{Y}_{ji} = \mathcal{Y}_{ii} \neq 0$ par suite

et par suite $\mathcal{Y}_{ij} \neq 0$ quels que soient i et j .

Posons, $e_{i1} = e_{i1}$, choisissons dans $\mathcal{Y}_{i1}$ ($i=2, \dots, n$) un élément $e_{i1} \neq 0$. On a

un corps $\mathcal{K}$ à l'anneau des matrices d'ordre n sur $\mathcal{K}$ des nombres de $\mathcal{Y}$ permutable

ou les $e_{i1} = e_i \mathcal{Y} e_1$ facile de voir que $\mathcal{K}$ est iso-

Donc, $e_i e_{i1} = e_i \mathcal{Y} e_1 = e_{i1}$ effet, si

$$\mathcal{Y} e_i e_{i1} = \mathcal{Y} e_{i1} \neq 0$$

De plus, $\mathcal{Y} e_{i1} = \mathcal{Y} e_i \mathcal{Y} e_1 \subset \mathcal{Y} e_1$

et $\mathcal{Y} e_{i1}$ est idéal à gauche dans $\mathcal{Y} e_1$, donc

D'autre part, $\mathcal{Y} e_{i1} = \mathcal{Y} e_1$ en recevant

$$\mathcal{Y} e_{i1} e_{i1} = \mathcal{Y} e_1, \quad e_i \mathcal{Y} e_i \cdot e_{i1} = e_i \mathcal{Y} e_1 = \mathcal{Y}_{i1}$$

$$\mathcal{Y}_{ii} e_{i1} = \mathcal{Y}_{i1}$$

Il existe donc dans $\mathcal{Y}_{ii}$ un e_{ii} tel que :

$$e_{ii} e_{i1} = e_{i1}$$

bien isomorphe entre $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}$, ce qui démontre complètement

Posons $e_{ij} = e_{ii} e_{ij}$

On a $e_{ij} \in \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Y}_{ij} = \mathfrak{Y}_{ij}$

Puis

(j ≠ k) $e_{ij} e_{kl} \in \mathfrak{Y}_{ij} \mathfrak{Y}_{kl} = 0$

$e_{ij} e_{jk} = e_{ii} e_{ij} e_{jk} e_{kk} = e_{ii} e_{ik}$

Mais $e_{ij} e_{ii} = e_i \alpha e_{ii} = e_{ii}$

Donc $e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$

Par suite

$e_{ii}^2 = e_{ii}$

et comme $e_{ii} \in \mathfrak{Y}_{ii}$, le seul idempotent du corps $\mathfrak{Y}_{ii}$ est e_{ii} donc $e_{ii} = e_i$ et par suite

autrement dit, $1 = e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn}$

Les conditions (I) sont toutes vérifiées . D'après le théorème d'Artin, $\mathfrak{Y}$ est isomorphe à l'anneau des matrices d'ordre n sur le sous-anneau $\mathfrak{K}$ des nombres de $\mathfrak{Y}$ permutable avec les e_{ij} . Ici il est facile de voir que $\mathfrak{K}$ est isomorphe à $\mathfrak{Y}_{11}$, donc est un corps . En effet, si

$y \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{Y}$ est le de $y \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{Y}$ part à P de $\mathfrak{Y}$, les b_i forment une P-basse . $\bar{y} = e_{11} y e_{11} \in \mathfrak{Y}_{11}$

et à yy' correspond $\bar{y} \bar{y}'$, à $y + y'$, $\bar{y} + \bar{y}'$

D'autre part, on a pour tout $\bar{y} \in \mathfrak{Y}_{11}$, en résolvant

$\bar{y} = e_{11} y e_{11}$

On en tire $\sum e_{ii} \bar{y} e_{ii} = \sum e_{ii} y e_{ii} = \sum e_{ii} y = y$

et la valeur obtenue de y est bien dans $\mathfrak{K}$. Donc il y a

bien isomorphie entre $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, ce qui démontre complètement le deuxième théorème de Wedderburn. Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{K}$ est contenu dans $\mathcal{K}'$ d'après la définition de $\mathcal{K}'$.

En résumé, la recherche de la structure des algèbres semi-simples est ramenée, grâce aux deux théorèmes de Wedderburn, à celles des corps gauches.

C.- SYSTEMES HYPERCOMPLEXES

7.- Définition. - Soit P un corps commutatif. On appelle système hypercomplexe sur P un anneau $\mathcal{J}$ qui est un P -module et dont les éléments sont permutables avec ceux de P ; autrement dit,

$$\mathcal{J} = b_1 P + b_2 P + \dots + b_n P$$

tout élément de $\mathcal{J}$ ayant la forme

$$a = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_n a_n$$

avec $a_i \in P$ et les b_i étant linéairement indépendants par rapport à P ($a_i = 0$ si $a_i = 0$ quel que soit i)

n est le degré par rapport à P de $\mathcal{J}$, les b_i formant une P -base. Tout système de n formes indépendantes en b_i est une autre P -base de $\mathcal{J}$. La loi de multiplication des b_i est donnée par celle de tous les nombres de $\mathcal{J}$. Elle doit seulement satisfaire à la condition d'associativité

$$(b_\alpha b_\beta) b_\gamma = b_\alpha (b_\beta b_\gamma)$$

8.- Produit de deux systèmes hypercomplexes

Soient
$$\mathcal{J}_1 = b_1 P + b_2 P + \dots + b_m P$$

$$\mathcal{J}_2 = c_1 P + c_2 P + \dots + c_n P$$

deux systèmes hypercomplexes sur P . commutatif de $\mathcal{K}$) contenu

On appelle $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} e_{\lambda\mu}$

leur produit . $\mathcal{C}'$ est un système hypercomplexe ayant pour base les $b_{\lambda\mu}$ et où les b_{λ} sont échangeables avec les e_{μ}

$$b_{\lambda} e_{\mu} b_{\nu} e_{\rho} = (b_{\lambda} b_{\nu}) \cdot (e_{\mu} e_{\rho}) = (e_{\mu} e_{\rho}) \cdot (b_{\lambda} b_{\nu})$$

Tout élément du produit $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ s'écrit

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} b_{\lambda} e_{\mu} = \sum_{\mu} b'_{\mu} e_{\mu} = \sum_{\lambda} b_{\lambda} e'_{\lambda}$$

En part $b'_{\mu} \in \mathcal{J}_1$ et $e'_{\lambda} \in \mathcal{J}_2$ et inversement . Donc, $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ est indépendant des P -bases choisies . On a

$$\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 \times \mathcal{J}_1 \quad (\mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2) \times \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_3 \oplus \mathcal{J}_2 \times \mathcal{J}_3$$

$$\mathcal{J}_1 \times (\mathcal{J}_2 \times \mathcal{J}_3) = (\mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2) \times \mathcal{J}_3$$

Comme cas particuliers de systèmes hypercomplexes, figurent les surcorps finis (commutatif ou non) de P ?

Si A est un tel surcorps on a

$$(1) \mathcal{J}_1 \times A = b_1 \Lambda + b_2 \Lambda + \dots + b_m \Lambda = \Lambda b_1 + \Lambda b_2 + \dots + \Lambda b_m$$

au lieu de $\mathcal{J} \times \Lambda$ on écrit aussi $\mathcal{J}_{\Lambda}$. La définition (1) s'applique encore lorsque Λ est un corps infini . On désigne encore l'anneau obtenu par $\mathcal{J}_{\Lambda}$ ou $\mathcal{J} \times \Lambda$ (ce qui n'est plus un système hypercomplexe sur P) .

Un système hypercomplexe ou un produit de tels systèmes satisfait toujours aux conditions maximale et minimale

9.- Systèmes semblables

Soit $\mathcal{Y}$ un système simple $\mathcal{K}$ le corps formé des éléments de $\mathcal{Y}$ permutable avec les e_{ij} et P le corps premier contenu

(ou plus généralement un sous-corps commutatif de $\mathcal{K}$) contenu dans $\mathcal{K}$, on peut écrire

$$\mathcal{Y} = \mathcal{K} \times \mathcal{P}_n$$

Tous les systèmes simples pour lesquels les corps $\mathcal{K}$ correspondants sont isomorphes, sont dits semblables ; si $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Y}'$ sont deux tels systèmes, on écrit

$$\mathcal{Y} \sim \mathcal{Y}'$$

En particulier on a

$$\mathcal{Y} \sim \mathcal{K}$$

La notion de produit de systèmes hypercomplexes permet d'établir dans quelle mesure la structure d'un système simple $\mathcal{Y}$ dépend de celle du corps correspondant $\mathcal{K}$, en étudiant la manière dont se modifie $\mathcal{Y}$ quand on remplace $\mathcal{K}$ par un surcorps Σ de $\mathcal{K}$, autrement dit, quand on fait le produit $\mathcal{Y} \times \Sigma$

On est donc amené à étudier les produits de systèmes simples. On obtient les résultats suivants :

10.- a) Produit de deux corps commutatifs $\mathcal{Y}$ et Σ sur $\mathcal{P}$ ($\mathcal{Y}$ fini)

Si $\mathcal{Y}$ est de plus séparable (ses éléments racines d'équations irréductibles dans $\mathcal{P}$ et sans racines multiples) soit

(^{élément}) un polynôme primitif de $\mathcal{Y}$ [$\mathcal{Y} = \mathcal{P} + \mathcal{P}^{\theta} + \dots + \mathcal{P}^{\theta^{n-1}}$]

$\varphi(z)$ le polynôme irréductible de $\mathcal{P}[z]$ dont θ est une racine. Si $\varphi(z)$ se décompose dans $\Sigma[z]$ en r polynômes irréductibles $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, $\mathcal{Y} \times \Sigma$ est la somme directe des r surcorps de Σ engendrés par les racines de ces polynômes

Si $\mathcal{Y}$ n'était pas séparable, $\mathcal{Y} \times \Sigma$ pourrait avoir un radical.

II. - b) Produit d'un corps non commutatif $\mathcal{D}$ de degré fini par rapport à P , par un corps commutatif Σ .

On suppose que le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{D}$ est un surcorps séparable de P .

Le centre de $\mathcal{D} \times \Sigma$ n'est autre que $\mathcal{Z} \times \Sigma$. En effet, supposons d'abord Σ fini par rapport à P . Alors :

$$\Sigma = \sigma_1 P + \dots + \sigma_n P \quad \sigma_i \text{ P-base de } \Sigma$$

et $\mathcal{D} \times \Sigma = \sigma_1 \mathcal{D} + \dots + \sigma_n \mathcal{D}$

Soit a un élément du centre de $\mathcal{D} \times \Sigma$

$$a = \sigma_1 u_1 + \dots + \sigma_n u_n \quad u_i \in \mathcal{D}$$

a doit être commutatif avec tous les éléments de $\mathcal{D} \times \Sigma$ en particulier avec tous les éléments de $\mathcal{D}$. Si $v \in \mathcal{D}$ est quelconque, on doit avoir

$$\sigma_1 u_1 v + \dots + \sigma_n u_n v = \sigma_1 v u_1 + \dots + \sigma_n v u_n$$

d'où $u_i v = v u_i$ quels que soient i et v

donc $u_i \in \mathcal{Z}$, $a \in \mathcal{Z} \times \Sigma$. Inversement, si a est un nombre quelconque de $\mathcal{Z} \times \Sigma$, soit

$$\Sigma \times \mathcal{Z} = z_1 \mathcal{Z} + \dots + z_r \mathcal{Z} \quad z_i \text{ P-base de } \Sigma$$

$$a = z_1 \sigma_1 + \dots + z_r \sigma_r$$

alors si $v = \sigma'_1 u_1 + \dots + \sigma'_q u_q$ u_q P-base de $\mathcal{D}$ est un nombre quelconque de $\mathcal{D} \times \Sigma$, on a évidemment

$$a v = \sum \sigma_i \sigma'_j z_i u_j = \sum \sigma'_j \sigma_i z_i u_j = v a$$

Si maintenant, Σ est infini algébrique par rapport à P soit a un élément du centre de $\mathcal{D} \times \Sigma$. On peut écrire

$$a = u_1 \sigma_1 + \dots + u_r \sigma_r \quad u_i \text{ P-base de } \mathcal{D}$$

Mais $\sigma_1 \dots \sigma_r$ engendrent un corps fini algébrique sur P , soit

($P \subseteq \Sigma', \subseteq \Sigma$) . Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ une P -base de Σ' . On peut

écrire

$$a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (v_i \in \mathcal{Y})$$

et on montre comme ci-dessus que

$$a \in \mathcal{Z} \times \Sigma', \quad a \in \mathcal{Z} \times \Sigma$$

et inversement, la démonstration ci-dessus établit que

tout nombre de $\mathcal{Z} \times \Sigma$ fait partie du centre .

On montre ensuite (voir Van der Waerden, Bd II p.175)

que tout idéal bilatère de $\mathcal{Y} \times \Sigma$ est engendré par un idéal

bilatère de $\mathcal{Z} \times \Sigma$, c'est à dire que si $\mathcal{U}$ est idéal bilatère

de $\mathcal{Y} \times \Sigma$ il existe q nombres $l_1, l_2, \dots, l_q$ de $\mathcal{Z} \times \Sigma$ tels

que $\mathcal{U} = (l_1, l_2, \dots, l_q)$

(Tout nombre de $\mathcal{U}$ est de la forme $l_1 \delta_1 + \dots + l_q \delta_q \quad \delta_i \in \mathcal{Y}$)

Si un idéal bilatère est simple dans $\mathcal{Y} \times \Sigma$ l'idéal cor-

respondant de $\mathcal{Z} \times \Sigma$ est aussi simple et inversement .

Cela étant, $\mathcal{Z} \times \Sigma$ n'a pas de radical , sans quoi le ra-

dical, idéal bilatère, serait engendré par un idéal bilatère

nilpotent de $\Sigma \times \mathcal{Z}$ ce qui est impossible d'après a)

Donc, $\mathcal{Y} \times \Sigma$ est semi-simple . D'après a) son centre $\mathcal{Z} \times \Sigma$

se décompose en une somme directe de r ($r \leq n = \text{degré de } \mathcal{Z}$

sur P) corps commutatifs sur Σ . Donc $\mathcal{Y} \times \Sigma$ se décompose

en une somme directe de r algèbres simples. En particulier

si $\mathcal{Z} = P$, $r = 1$, $\mathcal{Y} \times \Sigma$ est une algèbre simple isomorphe

à un anneau complet de matrices dans un corps $\mathcal{K}$, Σ de degré

fini sur Σ .

13.- Si on prend, en particulier, pour Σ le corps Ω algébriquement fermé sur P , $\mathcal{K}$ est un corps (gauche) de degré fini sur Ω : mais un tel corps est nécessairement $\equiv \Omega$. Car si x est un de ses éléments, on a

$$\text{En effet, } x = a_1 a_1 + \dots + a_n a_n \quad a_i \in \Omega$$

x satisfait à une équation de degré $p + 1$ à coefficients dans Ω .

$f(x) \equiv \alpha_0 x^{p+1} + \alpha_1 x^p + \dots + \alpha_p x = 0$ α_i non tous nuls
 Mais $f(x)$ se décompose en facteurs linéaires dans $\Omega[x]$
 et comme $\mathcal{K}$ n'a pas de diviseurs de 0, x s'annule un de ces facteurs, donc est dans Ω .

Donc $\mathcal{K} \times \Omega$ est une algèbre de matrices d'ordre m à coefficients dans Ω . Son degré sur Ω est donc un carré m^2 .
 Comme c'est aussi le degré de $\mathcal{K}$ sur Σ on voit qu'un corps gauche a toujours un degré carré parfait par rapport à son centre. m est l'indice du corps.

12.- c) Produit de deux corps gauches finis $\mathcal{K}$ et Σ de centres $\bar{\Sigma}$ et $\bar{\Sigma}'$ ($\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}'$ séparables)

On voit comme ci-dessus que $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}'$ est le centre de $\mathcal{K} \times \Sigma$.
 D'autre part, on montre aussi que tout idéal bilatère de $\mathcal{K} \times \Sigma$ est engendré par un idéal bilatère de $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}'$. Donc $\mathcal{K} \times \Sigma$ est somme directe d'algèbres simples en nombre égal au nombre de corps dont la somme directe forme $\bar{\Sigma} \times \bar{\Sigma}'$

13.- d) Produit de deux algèbres simples

On a $\mathcal{R} = \mathcal{K} \times P_r$ et $\Sigma = \mathcal{K}' \times P_s$ par extension algébrique

d'où $\mathcal{R} \times \Sigma = \mathcal{K} \times \mathcal{K}' \times P_r \times P_s$

On a $P_r \times P_s = P_{rs}$

En effet, P_r est engendré par les r^2 quantités c_{ij} , P_s par les s^2 quantités c'_{kl} donc P_{rs} par les $r^2 s^2$ quantités

$$c_{ij,kl} = c_{ik} c'_{jl}$$

avec $c_{ij,kl} c_{mnpq} = c_{ik} c'_{jl} c_{mp} c'_{nq}$
 $= c_{ik} c_{mp} c'_{jl} c'_{nq}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \text{ ou } l \neq n \\ c_{ip} c'_{jq} = c_{ij,pq} & \text{si } k = m \\ & l = n \end{cases}$$

Soit α le numéro d'une paire ij , allant de 1 à rs
 β celui de la paire kl et posons $c_{ij,kl} = c_{\alpha\beta}$

On a $c_{\alpha\beta} c_{\gamma\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \gamma \\ c_{\alpha\delta} & \text{si } \beta = \gamma \end{cases}$

Donc les $c_{\alpha\beta}$ sont un système d'unités matricielles.

$P_r \times P_s$ est donc isomorphe à P_{rs}

Si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont finis sur P , on a (d'après c)

$$\mathcal{K} \times \mathcal{K}' = \mathcal{K}'_{r_1} \oplus \mathcal{K}''_{r_2} \oplus \dots$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \mathcal{R} \times \Sigma &= (\mathcal{K}'_{r_1} \oplus \mathcal{K}''_{r_2} \oplus \dots) \times P_{rs} \\ &= \mathcal{K}'_{r_1 r_s} \oplus \mathcal{K}''_{r_2 r_s} \oplus \dots \end{aligned}$$

En particulier supposons que $P = \Sigma$ centre de $\mathcal{K}$, et de plus
 que ($s = 1$) $\Sigma = \mathcal{K}'$ soit un corps algébrique commutatif (fini
 ou infini) sur Σ . Alors, d'après b)

$$\mathcal{K} \times \Sigma = \mathcal{K}'_{r_1} \quad \mathcal{K}' \supset \Sigma$$

$$\gamma \times \Sigma = K'_{r', r'}$$

donc une algèbre simple γ reste simple par extension algébrique Σ du centre Σ . Le corps associé $\mathcal{K}$ devient une algèbre simple, anneau complet de matrices d'ordre r' dans un corps $\mathcal{K}' \supset \Sigma$ et γ devient un anneau complet de matrices d'ordre $r r'$ dans le même corps. On voit en particulier que toutes les algèbres semblables se comportent de la même manière lorsqu'on fait le produit par un corps Σ .

On peut continuer en prenant une extension T de Σ (qui est le nouveau centre) $\mathcal{K}'$ devient un anneau de matrices d'ordre r'' dans $\mathcal{K}'' \supset T$, $\gamma \times T$ devient un anneau de matrices d'ordre $rr'r''$ dans le même corps.

Lorsqu'en continuant ainsi, on arrive à Ω , corps algébriquement fermé, $\gamma \times \Omega$ devient un anneau de matrices d'ordre mr dans Ω (m indice de $\mathcal{K}$ sur Σ)

En général, il existe un corps $T \subset \Omega$ pour lequel $\mathcal{K} \times T$ est un anneau de matrices dans T lui-même

$$\mathcal{K} \times T = \mathcal{M}_n(T) \quad (T \text{ pris comme corps de base})$$

alors si U est un surcorps de T , on a

$$\mathcal{K} \times U = \mathcal{K} \times T \times U = \mathcal{M}_n(T) \times U = \mathcal{M}_n(U)$$

C'est encore un anneau de matrices de même ordre dans U , en particulier si $U = \Omega$ on voit que $n = m$. T est dit corps de décomposition de $\mathcal{K}$ (et de γ et en général de toutes les algèbres semblables à $\mathcal{K}$). Ils jouent un grand rôle dans l'étude des corps gauches.

Exemplaire n° 4
Institut Henri Poincaré
45, rue des Saussaies, Paris

RECTIFICATIONS

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES

1.- La démonstration donnée au paragraphe 4, indiquée comme inédite, se trouve à quelques détails près, dans un mémoire d'Artén publié dans les "Abhandlungen" du séminaire de Hambourg (1926) .

2.- Pour se conformer à la terminologie adoptée dans les conférences suivantes, remplacer partout le mot degré par rang lorsqu'il s'agit d'un système hypercomplexe ou d'un corps non commutatif .

Exposé fait par M. Paul DUBOIS, le 20 Janvier 1934