SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JACQUES FRISCH

Platitudes (géométrie analytique)

Séminaire Lelong. Analyse, tome 7 (1966-1967), exp. n° 7, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A7_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PLATITUDES
 (Géométrie analytique)

par Jacques FRISCH

1. - Ces notes constituent le résumé de deux conférences faites au Séminaire. Comme une rédaction détaillée est à paraître aux "Inventiones Mathematicae", d'ici la fin de l'année, on se bornera ici à l'exposé des résultats et aux idées des démonstrations, renvoyant pour les précisions à l'article indiqué.

2. - Voici le problème (posé dans [7], exposé n° 13). Soient $\varphi : Y \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques complexes (non nécessairement réduits), $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur Y . Pour $y \in Y$ et $s = \varphi(y)$, φ définit un homomorphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$, de sorte que $\mathcal{F}_y$ devient un $\mathcal{O}_{S,s}$ -module. On dit que $\mathcal{F}$ est φ -plat (ou S -plat) en y , si le $\mathcal{O}_{S,s}$ -module $\mathcal{F}_y$ est plat. En particulier, on dit que Y est φ -plat (ou S -plat) en y , si $\mathcal{O}_Y$ est φ -plat en y . Il s'agit de prouver l'assertion suivante :

THÉORÈME. - L'ensemble des points $y \in Y$ où $\mathcal{F}$ n'est pas φ -plat est analytique.

3. - Commençons par mettre ce problème sous une forme plus maniable. D'abord, en vertu du critère de platitude ([2], chap. III, § 5, théorème 1) (l'hypothèse "idéalement séparé" étant satisfaite en vertu de [2], chap. III, § 5, prop. 2), pour que $\mathcal{F}$ soit φ -plat en y , il faut et il suffit que

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{F}_y, \underline{\mathbb{C}}) = 0$$

(on rappelle que $\underline{\mathbb{C}}$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{S,s}$).

Ensuite, le problème est local (sur Y). Or, localement, Y se plonge dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$; soit i un plongement (i. e. un isomorphisme de Y sur un sous-espace de U). Alors $\varphi \times i : Y \rightarrow S \times U$ est encore un plongement, et l'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi \times i} & S \times U \\ \varphi \searrow & & \swarrow \pi \\ & S & \end{array}$$

où π est la projection $(s, x) \mapsto s$. En outre, $(\varphi \times i)_* \mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur $S \times U$, nul hors de $(\varphi \times i)(Y)$; et si

$$(s, x) = (\varphi(y), i(y)),$$

on a

$$(\varphi \times i)_* \mathcal{F}(s, x) = \mathcal{F}_y.$$

On peut donc supposer que $Y = S \times U$, et $\varphi = \pi$.

Cela fait, le problème est toujours local (sur $S \times U$ maintenant). On peut donc supposer qu'il existe sur $S \times U$ un début de résolution libre de $\mathcal{F}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0, \\ \mathcal{C} : \mathcal{O}_{S \times U}^p \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{S \times U}^q \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{S \times U}^r. \end{array} \right.$$

Pour $(s, x) \in S \times U$, le $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S, s}}(\mathcal{F}_{(s, x)}, \underline{\mathcal{C}})$ s'identifie à l'homologie du complexe

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x(s) &= \mathcal{C}_{(s, x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{(s, x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}(s, x)} \mathcal{O}_{U, x}; \\ \mathcal{C}_x(s) : \mathcal{O}_{U, x}^p &\xrightarrow{u_x(s)} \mathcal{O}_{U, x}^q \xrightarrow{v_x(s)} \mathcal{O}_{U, x}^r. \end{aligned}$$

Nous voilà ramenés à prouver le théorème sous la forme suivante :

L'ensemble E des points $(s, x) \in S \times U$ tels que le complexe $\mathcal{C}_x(s)$ ne soit pas acyclique est analytique.

4. - Étant donné un espace analytique complexe X , on dit qu'une partie P de X est constructible, si c'est un élément de la plus petite famille de parties de X stable par réunion finie, intersection finie et passage au complémentaire, et contenant les sous-ensembles analytiques de X . (Remarquer que, contrairement au cas de la géométrie algébrique, si Y est un sous-ensemble analytique de X , et P une partie constructible de $X \setminus Y$, P n'a aucune raison d'être constructible dans X .) Voici un exemple :

LEMME. - Soient X un espace analytique complexe, E, F, G, H quatre espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$, u et v deux morphismes de X dans $L(E, F)$ et $L(G, H)$ respectivement, π une application linéaire de G sur F .

L'ensemble des $x \in X$ tels que

$$\dim \text{Im } u(x) = \dim \pi(\text{Ker } v(x))$$

est constructible.

Une partie constructible P de X peut toujours se mettre sous la forme

$$P = \bigcup_{i \in I} (A_i \setminus B_i),$$

où $(A_i, B_i)_{i \in I}$ est une famille finie de couples de sous-ensembles analytiques de X . La notion de partie localement constructible de X va de soi. Son intérêt réside dans le lemme (trivial) suivant :

LEMME. - Les sous-ensembles analytiques d'un espace analytique X sont les parties localement constructibles et fermées.

5. - Pour prouver le théorème, nous montrerons que l'ensemble E qui nous intéresse est localement constructible et fermé. Le fait que E soit fermé est facile à voir (modulo la thèse de DOUADY [3] qui, elle, n'est pas facile à lire), voici comment :

Soit $(s_0, x_0) \in S \times U$, et soit $K \subset U$ un polycylindre $\mathfrak{F}(s_0)$ -privilegié contenant x_0 à son intérieur ($\mathfrak{F}(s_0)$ est le faisceau sur U dont la fibre en $x \in U$ est

$$\mathfrak{F}(s_0, x) \otimes_{\mathcal{O}_{S, s_0}} \widehat{\mathcal{X}} = \mathfrak{F}(s_0, x) \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U(s_0, x)}} \mathcal{O}_{U, x} = \text{Coker } v_x(s_0)).$$

$\mathcal{C}$ définit un complexe de fibrés analytiques banachiques triviaux de base S :

$$B(K, \mathcal{C}) : B(K, \mathcal{O}_{S \times U}^p) \longrightarrow B(K, \mathcal{O}_{S \times U}^q) \longrightarrow B(K, \mathcal{O}_{S \times U}^r).$$

Si $\mathcal{C}_{x_0}(s_0)$ est acyclique, on peut choisir K assez petit pour que $B(K, \mathcal{C})$ soit une suite exacte directe en s_0 , donc au-dessus d'un voisinage Ω de s_0 dans S (loc. cit., "platitude et privilège"). Pour $s \in \Omega$, $B(K, \mathcal{C})$ est donc exacte directe en s , et par suite $\mathcal{C}(s)$ est une suite exacte de faisceaux au-dessus de $\overset{\circ}{K}$ (loc. cit., § 8, "lemme préliminaire"). Ainsi, $\mathfrak{F}$ est S -plat en tout point de $\Omega \times \overset{\circ}{K}$, et E est bien fermé.

6. - Il faut montrer maintenant que E est localement constructible. Pour

$x \in U$, soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{U,x}$. On pose, pour tout entier α ,

$$[\mathcal{O}_{U,x}]_{\alpha} = \mathcal{O}_{U,x} / \mathfrak{m}_x^{\alpha+1};$$

on a alors des projections canoniques :

$$\mathcal{O}_{U,x} \xrightarrow{\pi_{\alpha+\beta}} [\mathcal{O}_{U,x}]_{\alpha+\beta} \xrightarrow{\pi_{\alpha}} [\mathcal{O}_{U,x}]_{\alpha}.$$

Si ψ est un homomorphisme $\mathcal{O}_{U,x}^p \rightarrow \mathcal{O}_{U,x}^q$, on en déduit un homomorphisme

$$[\mathcal{O}_{U,x}^p]_{\alpha} \rightarrow [\mathcal{O}_{U,x}^q]_{\alpha}$$

noté $[\psi]_{\alpha}$.

CRITÈRE local d'acyclicité. - Soient $\mathcal{C} : \mathcal{O}_{S \times U}^p \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{S \times U}^q \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{S \times U}^r$ un complexe sur $S \times U$, (s, x) un point de $S \times U$. Il existe un voisinage $\Omega \times V$ de (s, x) et deux entiers α et β tels que, pour tout

$$(s', x') \in \Omega \times V,$$

les deux conditions suivantes soient équivalentes :

- (i) Le complexe $\mathcal{C}_{x'}(s')$ est acyclique ;
- (ii) $\text{Im}[u_{x'}(s')]_{\alpha} = \pi_{\alpha}^{\alpha+\beta} (\text{Ker}[v_{x'}(s')]_{\alpha+\beta})$.

(Noter qu'on oublie maintenant que $\mathcal{C}$ est une résolution de $\mathfrak{F}$.) Ce critère, joint au premier lemme du § 4, prouve que l'ensemble E est localement constructible. Il ne reste donc plus qu'à prouver ce critère.

On voit, par un argument facile, qu'il suffit de le prouver sur les parallèles à S . Plus précisément, il suffit de prouver qu'il existe un voisinage Ω de s dans S et deux entiers α et β tels que, pour tout $s' \in \Omega$, il y ait équivalence entre :

- (i) $\mathcal{C}_x(s')$ est acyclique,
- (ii) $\text{Im}[u_x(s')]_{\alpha} = \pi_{\alpha}^{\alpha+\beta} (\text{Ker}[v_x(s')]_{\alpha+\beta})$.

7. - LEMME. - Soient $v : \mathcal{O}_{S \times U}^q \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U}^r$ un morphisme de faisceaux, et (s, x) un point de $S \times U$. Il existe un voisinage Ω de s dans S et deux entiers λ_0 et μ_0 tels que :

(1) Pour tout $s' \in \Omega$ et tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\mathbb{R}_x(\mathbb{R}_x^\lambda \mathcal{O}_{U,x}^r \cap \text{Im } v_x(s')) = \mathbb{R}_x^{\lambda+1} \mathcal{O}_{U,x}^r \cap \text{Im } v_x(s'),$$

(2) Pour tout $s' \in \Omega$ et tout $\mu \geq \mu_0$,

$$\mathbb{R}_x(\mathbb{R}_x^\mu \mathcal{O}_{U,x}^d \cap \text{Ker } v_x(s')) = \mathbb{R}_x^{\mu+1} \mathcal{O}_{U,x}^d \cap \text{Ker } v_x(s').$$

On reconnaît le lemme d'Artin-Rees, mais pour un $\mathcal{O}_{U,x}$ -module ($\text{Im } v_x(s')$ dans (1) et $\text{Ker } v_x(s')$ dans (2)) dépendant d'un paramètre. Esquissons la démonstration du critère d'acyclicité (sur les parallèles à S) modulo le lemme. Prenons pour Ω celui du lemme, et pour α le μ_0 du lemme. On a, pour tout $s' \in \Omega$,

$$\mathbb{R}_x^{\alpha+1} \mathcal{O}_{U,x}^d \cap \text{Ker } v_x(s') \subset \mathbb{R}_x^\alpha \text{Ker } v_x(s').$$

Le lemme de Nakayama montre alors que tout sous- $\mathcal{O}_{U,x}$ -module M de $\mathcal{O}_{U,x}^d$ tel que

$$M \subset \text{Ker } v_x(s') \subset M + \mathbb{R}_x^{\alpha+1} \mathcal{O}_{U,x}^d$$

est, en fait, égal à $\text{Ker } v_x(s')$. Appliquant cela à $M = \text{Im } u_x(s')$, on obtient déjà que, pour tout $s' \in \Omega$, la condition (i) du critère équivaut à

$$(iii) \quad \text{Im}[u_x(s')]_{\mathcal{O}_x} = \pi_{\mathcal{O}_x}(\text{Ker } v_x(s')).$$

Il reste à prouver que (iii) $\Leftrightarrow$ (ii), ce qui revient à trouver un β tel que pour tout $s' \in \Omega$,

$$\pi_{\mathcal{O}_x}(\text{Ker } v_x(s')) = \pi_{\mathcal{O}_x}^{\alpha+\beta}(\text{Ker}[v_x(s')]_{\mathcal{O}_x^{\alpha+\beta}}).$$

On utilise pour cela la partie (1) du lemme. Les détails sont laissés au soin du lecteur scrupuleux, s'il s'en trouve.

8. - Il faut à présent prouver le lemme du § 7. Ce paragraphe et les deux suivants sont consacrés à des préliminaires.

THÉORÈME. - Soient X un espace analytique complexe, x un point de X , $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X . Il existe un système fondamental de voisinages K de x qui sont compacts, de Stein (i. e. les théorèmes A et B sont vrais sur K), $\mathfrak{F}$ -privilegiés (i. e. $\Gamma(K, \mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{F}_x$ est injective), et noethériens (i. e. tels que l'anneau $\Gamma(K, \mathcal{O}_X)$ soit noethérien).

(Pour l'existence de voisinages $\mathfrak{F}$ -privilegiés, voir [6] ou [7] ; pour celle de voisinages noethériens, voir [4].) Ce théorème permet d'étendre aux faisceaux analytiques cohérents certains théorèmes d'algèbre, comme on va le voir.

9. - Rappelons le théorème d'Artin-Rees :

Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A , F un A -module de type fini, E un sous-module de F . Il existe un entier λ_0 tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$

$$I(I^\lambda F \cap E) = I^{\lambda+1} F \cap E .$$

Voici son analogue pour les faisceaux analytiques cohérents :

LEMME. - Soient X un espace analytique complexe, $\mathfrak{F}$ un faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$, $\mathfrak{E}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, $\mathfrak{E}$ un sous- $\mathcal{O}_X$ -module cohérent de $\mathfrak{F}$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage K de x et un entier λ_0 tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on ait au-dessus de K :

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^\lambda \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}) = \mathfrak{F}^{\lambda+1} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E} .$$

Démonstration. - Soit K un voisinage de x compact, noethérien et de Stein. On applique le théorème d'Artin-Rees à

$$A, I, E, F = \Gamma(K; \mathcal{O}_X, \mathfrak{F}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}) .$$

En posant $\mathfrak{E}_\lambda = (\mathfrak{F}^{\lambda+1} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}) / \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^\lambda \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E})$, on obtient $\Gamma(K, \mathfrak{E}_\lambda) = 0$. On conclut grâce au théorème A.

10. - Le lemme algébrique que voici se trouve dans [5] (lemme 6.9.2) :

Soient A un anneau intègre noethérien, B une A -algèbre de type fini, G un B -module de type fini. Il existe $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f -module libre.

La proposition analytique qui s'en déduit s'énonce ainsi :

THÉORÈME de platitude générique. - Soient S un espace analytique complexe réduit, U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, (s, x) un point de $S \times U$, $\mathfrak{F}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{S \times U}$ défini par le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$, $\mathfrak{E}$ un $\mathcal{O}_{S \times U}$ -module cohérent.

(i) Il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S et un sous-ensemble analytique strict T de Ω tels que, pour tout $s' \in \Omega \setminus T$ et tout entier $k \geq 0$, le faisceau $\mathfrak{E} / \mathfrak{F}^{k+1} \mathfrak{E}$ soit S -libre en (s', x) ;

(ii) Si tous les faisceaux $\mathfrak{F} / \mathfrak{F}^{k+1} \mathfrak{F}$ sont S -libres en (s', x) , $\mathfrak{F}$ est S -plat en ce point.

Démonstration. - La partie (ii) est laissée au soin du lecteur : c'est peu ou prou un exercice de BOURBAKI. Pour (i), on peut supposer le germe de S en s irréductible, de sorte que l'anneau $\mathcal{O}_{S,s}$ est noethérien intègre. Soit K un voisinage de s compact, de Stein, noethérien et $\mathcal{O}_S$ -privilegié.

$$A = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$$

est un anneau intègre noethérien. Soit

$$B = \Gamma(K \times \{x\}, \text{gr}_{\mathfrak{F}} \mathcal{O}_{S \times U}) ;$$

c'est une A -algèbre de type fini (alors que $\Gamma(K \times \{x\}, \mathcal{O}_{S \times U})$ n'en serait pas une). Enfin,

$$G = \Gamma(K \times \{x\}, \text{gr}_{\mathfrak{F}} \mathfrak{F})$$

est un B -module de type fini. Il existe alors $f \neq 0$ dans A tel que G_f soit un A_f -module libre ;

$$T = \{s \in \overset{\circ}{K} ; f(s) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique strict de $\overset{\circ}{K}$ (car S est réduit). On voit, en utilisant le théorème B, que, pour tout $s' \in \overset{\circ}{K} \setminus T$, $(\text{gr}_{\mathfrak{F}} \mathfrak{F})_{(s', x)}$ est $\mathcal{O}_{S, s'}$ -libre, ce qui équivaut à la conclusion de (i). On peut aussi prouver (i) sans utiliser le lemme algébrique de [5], mais c'est bien plus pénible.

11. - Voici maintenant l'idée de la démonstration du lemme du § 7. Il est clair que l'on peut supposer S réduit.

Partie (1) : Triviale si $\dim S_s = 0$ (c'est Artin-Rees tout cru). On raisonne par récurrence sur $\dim S_s$. Soit $\mathfrak{F}$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{S \times U}$ défini par le sous-espace $S \times \{x\}$ de $S \times U$. D'après le § 9, il existe un voisinage ouvert Ω_1 de s dans S et un entier λ_1 tels que, pour tout $\lambda \geq \lambda_1$, on ait au-dessus de $\Omega_1 \times \{x\}$:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^\lambda \mathcal{O}_{S \times U}^r \cap \text{Im } v) = \mathfrak{F}^{\lambda+1} \mathcal{O}_{S \times U}^r \cap \text{Im } v .$$

Intuitivement, pour obtenir (1), il s'agit de découper cela en tranches verticales ce qui, mathématiquement, revient à appliquer le foncteur $\bigotimes_{S \times U(s', x)} \mathcal{O}_{U, x}$.

HYPOLEMME. - Soit $s' \in S$. Supposons que $(\mathcal{O}_{S \times U}^r / (\mathfrak{F}^\lambda \mathcal{O}_{S \times U}^r + \text{Im } v))_{(s', x)}$ soit $\mathcal{O}_{S, s}$ -libre pour tout entier λ . Alors, pour tout λ ,

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{M}_x^\lambda \mathcal{O}_{U, x}^r \cap \text{Im } \mathcal{O}_x(s')) = \text{image canonique de } \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^\lambda \mathcal{O}_{S \times U}^r \cap \text{Im } v)_{(s', x)} \text{ dans } \mathcal{O}_{U, x}^r,$$

$$\mathfrak{M}_x^{\lambda+1} \mathcal{O}_{U, x}^r \cap \text{Im } v_x(s') = \text{image canonique de } (\mathfrak{F}^{\lambda+1} \mathcal{O}_{S \times U}^r \cap \text{Im } v)_{(s', x)} \text{ dans } \mathcal{O}_{U, x}^r.$$

Cela résulte de [1] (chap. 1, § 2, prop. 6 et lemme 7). Ainsi, (1) est valable pour tout $s' \in S$ où l'hypothèse de l'hypolemme est vérifiée. Mais, d'après le théorème de platitude générique, appliqué au faisceau $\mathcal{O}_{S \times U}^r / \text{Im } v$, c'est le cas pour tout $s' \in \Omega'_1 \setminus T_1$, où Ω'_1 est un voisinage ouvert de s contenu dans Ω_1 , et T_1 un sous-ensemble analytique strict de Ω'_1 . Il reste donc à prouver (1) sur T_1 ; mais cela résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à l'image canonique de $(\text{Im } v \bigotimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} \mathcal{O}_{T \times U})|_{T \times U}$ dans $\mathcal{O}_{T \times U}^r$; (1) est établi.

Partie (2) : On commence par établir, en utilisant le théorème de platitude générique, l'hypolemme suivant :

HYPOLEMME. - Il existe un voisinage Ω de s dans S et une famille finie $(f_i)_{i \in I}$ de sections de $\mathcal{O}_{S \times U}^q$ au-dessus de $\Omega \times \{x\}$, tels que, pour tout $s \in \Omega$, ceux des $f_{i, x}(s)$ qui sont dans $\text{Ker } v_x(s)$ engendrent $\text{Ker } v_x(s)$ comme $\mathcal{O}_{U, x}$ -module.

Notons, pour toute partie σ de I , $\mathfrak{F}_\sigma$ le faisceau engendré par les f_i , $i \in \sigma$; les $\mathfrak{F}_\sigma$ sont des images, auxquelles on peut appliquer (1). Comme l'ensemble des parties de I est fini, (2) est établi.

Cela achève la preuve du théorème énoncé dans le § 2.

12. - Il faut noter qu'il n'y a en général aucune raison pour que l'ensemble analytique Z des points de non φ -platitude de $\mathfrak{F}$ soit un sous-ensemble strict de Y (exemple : $Y =$ droite simple, $S =$ droite double), ni pour que $\varphi(Z)$ soit "petit" dans S . C'est cependant le cas si S est réduit. Plus précisément, $\varphi(Z)$ est dans ce cas une partie négligeable de S , ce qui signifie que

$$\varphi(Z) \cap S_{\text{rég}}$$

($S_{\text{rég}}$ = ensemble des points réguliers de S) est une réunion dénombrable de sous-variétés localement fermées d'intérieur vide de $S_{\text{rég}}$ (cela implique que $\varphi(Z)$ est maigre dans S). En particulier, si S est réduit et φ propre, $\varphi(Z)$ est

un sous-ensemble analytique strict de S .

13. - Remarquons pour terminer qu'il ne s'introduit pas sur Z de structure naturelle d'espace analytique non nécessairement réduit (d'ailleurs, c'est aussi le cas en géométrie algébrique). Peut-être en verra-t-on une motivation dans le théorème ci-dessous, concernant les morphismes propres (vrai aussi en géométrie algébrique), et qui, en un certain sens, exprime pour chaque point de S de combien il s'en faut pour que $\mathfrak{F}$ soit S -plat au-dessus de s :

THÉORÈME. - Soient $\varphi : Y \rightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent. Il existe un espace $\tilde{S}$ au-dessus de S tel que :

(i) $\mathfrak{F}(\tilde{S})$ soit $\tilde{S}$ -plat,

(ii) $\tilde{S}$ soit universel pour cette propriété (i. e. pour tout espace T au-dessus de S tel que $\mathfrak{F}(T)$ soit T -plat, $T \rightarrow S$ se factorise de façon unique à travers $\tilde{S}$).

De plus, $\tilde{S}$ est une somme disjointe localement finie de sous-espaces localement fermés de S , dont les ensembles sous-jacents forment une partition de S .

(Si T est un espace au-dessus de S , $\mathfrak{F}(T)$ désigne le faisceau sur $T \times_S Y$, image réciproque de $\mathfrak{F}$.) La démonstration paraîtra ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1 : Modules plats, Chap. 2 : Localisation. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).
- [2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 3 : Graduations, filtrations et topologies, Chap. 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).
- [3] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 1-95 (Thèse Sc. math. Paris, 1965).
- [4] FRISCH (Jacques). - Fonctions analytiques sur un ensemble semi-analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 2974-2976.
- [5] GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique, IV : Etude locale des schémas et des morphismes de schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 28).

- [6] HERVÉ (Michel). - Several complex variables. Local theory. - London, Oxford University Press, 1963 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 1).
- [7] Séminaire Cartan, 13e année, 1960/61 : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.
-