

# SÉMINAIRE LELONG.

## ANALYSE

JEAN-LUC VERLEY

### Introduction à la théorie des hyperfonctions

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 7 (1966-1967), exp. n° 5, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SL\\_1966-1967\\_\\_7\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SL_1966-1967__7__A5_0)

© Séminaire Lelong. Analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INTRODUCTION À LA THÉORIE DES HYPERFONCTIONS

par Jean-Luc VERLEY

(d'après HARVEY [2])

On se propose ici de donner quelques propriétés fondamentales des hyperfonctions de M. Sato, en suivant la présentation adoptée dans le chapitre 1 de [2]. Partant d'une définition fonctionnelle, on interprète ces hyperfonctions successivement comme classes de cohomologie relative, puis comme sommes localement finies de fonctionnelles analytiques réelles. Nous nous sommes limités à des indications assez rapides sur les démonstrations.

### 1. Rappels sur la cohomologie relative.

Rappelons rapidement, sans démonstration, quelques notations et résultats sur la cohomologie relative à valeurs dans un faisceau (cf. [1]).

Soient  $X$  un espace topologique, et  $\mathfrak{F}$  un faisceau de groupes abéliens sur  $X$ . Si  $u$  est une section de  $\mathfrak{F}$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $X$ , i. e.  $u \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ , on appelle support de  $u$  l'ensemble des  $x \in U$  tels que le germe de  $u$  en  $x$  ne soit pas nul ; cet ensemble est relativement fermé dans  $U$ . Si  $S$  est un sous-espace fermé de  $X$ , soit  $\Gamma_S(U, \mathfrak{F})$  l'ensemble des sections de  $\mathfrak{F}$  au-dessus de  $U$  dont le support est un fermé de  $S$ .

1.1. DÉFINITION. - On appelle  $p$ -ième groupe de cohomologie relative modulo  $X - S$  et à valeurs dans  $\mathfrak{F}$ , noté  $H_S^p(X, \mathfrak{F})$ , le  $p$ -ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \rightarrow \Gamma_S(U, \mathfrak{F}) \rightarrow \Gamma_S(U, \mathfrak{S}^0) \rightarrow \Gamma_S(U, \mathfrak{S}^1) \rightarrow \dots,$$

où

$$0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{S}^0 \rightarrow \mathfrak{S}^1 \rightarrow \dots$$

est une résolution flasque du faisceau  $\mathfrak{F}$ .

On a alors les résultats suivants :

1.2. PROPOSITION (Théorème d'excision). - Soient  $\mathfrak{F}$  un faisceau sur  $X$ , et  $V$  et  $W$  deux ouverts de  $X$ . Si  $S$  est relativement fermé dans  $V$  et dans  $W$ , on a

$$H_S^p(W, \mathfrak{F}) = H_S^p(V, \mathfrak{F}) .$$

1.3. PROPOSITION (Suite exacte de cohomologie relative). - Soient  $M$  et  $S$  ( $M \subset S$ ) deux sous-ensembles fermés de  $X$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_M^0(X, \mathfrak{F}) \rightarrow H_S^0(X, \mathfrak{F}) \rightarrow H_{S-M}^0(X-M, \mathfrak{F}) \rightarrow H_M^1(X, \mathfrak{F}) \rightarrow \dots$$

Définissons maintenant les cochaines relatives et la cohomologie de Čech relative.

Soient  $S$  un fermé de  $X$ ,  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  et  $I' \subset I$  tel que  $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in I'}$  soit un recouvrement ouvert de  $X - S$ ; une telle paire  $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$  est appelée un recouvrement relatif de  $(X, X - S)$ . On appelle groupe des  $p$ -cochaines relatives à coefficients dans  $\mathfrak{F}$ , noté  $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F})$ , le sous-groupe du groupe des cochaines  $C^p(\mathcal{U}, \mathfrak{F})$  formé des cochaines  $c = (c_{i_0, \dots, i_p})$  telles que  $c_{i_0, \dots, i_p} = 0$  si tous les indices  $i_k$  appartiennent à  $I'$ . L'opérateur cobord étant défini par

$$(dc)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum (-1)^k c_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}},$$

on appelle  $p$ -ième groupe de cohomologie de Čech relative, noté  $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F})$ , le  $p$ -ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}) \xrightarrow{d} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}) \rightarrow \dots$$

Si le recouvrement  $\mathcal{U}$  est acyclique par rapport à  $\mathfrak{F}$ , i. e. si

$$H^p(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}, \mathfrak{F}) = 0$$

pour tout  $p > 0$  et toutes les intersections finies d'ouverts de  $\mathcal{U}$ , on peut calculer la cohomologie relative avec des recouvrements relatifs, i. e. on a la proposition suivante :

1.4. PROPOSITION (Théorème de Leray). - Si le recouvrement  $\mathcal{U}$  est acyclique par rapport au faisceau  $\mathfrak{F}$ , et si  $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$  est un recouvrement relatif de  $(X, X - S)$ , alors

$$H_S^p(X, \mathfrak{F}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathfrak{F}).$$

## 2. Définition des hyperfonctions.

$V$  étant un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , on désignera par  $A(V)$  l'anneau des fonctions holomorphes dans  $V$ .  $\mathcal{O}$  désignera, dans toute la suite, le faisceau des fonctions holomorphes dans  $\mathbb{C}^n$ .

Rappelons tout d'abord que tout ouvert  $\Omega$  de  $\underline{\mathbb{R}}^n$  a un système fondamental de voisinages dans  $\underline{\mathbb{C}}^n$  formé de domaines d'holomorphic qui coupent  $\underline{\mathbb{R}}^n$  suivant  $\Omega$  (lemme de Grauert).  $\Omega$  étant un ouvert de  $\underline{\mathbb{R}}^n$ , et  $V$  étant un ouvert d'holomorphic de  $\underline{\mathbb{C}}^n$  tel que  $V \cap \underline{\mathbb{R}}^n = \Omega$ , on pose

$$V \not\equiv \Omega = (\underline{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{R}})^n \cap V ,$$

$$\hat{V}_j = [(\underline{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{R}})^{j-1} \times \underline{\mathbb{C}} \times (\underline{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{R}})^{n-j}] \cap V ;$$

ainsi  $V \not\equiv \Omega = \bigcap_{j=1}^n \hat{V}_j$ .

2.1. THÉOREME et DÉFINITION. - Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\underline{\mathbb{R}}^n$ . Alors, si  $V$  est un ouvert d'holomorphic de  $\underline{\mathbb{C}}^n$  coupant  $\underline{\mathbb{R}}^n$  suivant  $\Omega$ , le quotient

$$B(\Omega) = A(V \not\equiv \Omega) / \sum_{j=1}^n A(\hat{V}_j)$$

est isomorphe au groupe de cohomologie relative

$$(1) \quad H^n(V, \Theta) ,$$

et  $B(\Omega)$  est indépendant de  $V$ . Les éléments de  $B(\Omega)$  s'appellent des hyperfonctions sur  $\Omega$ .

Le fait que  $B(\Omega)$  est indépendant de  $V$  résulte de l'isomorphisme avec (1) et du théorème d'excision. Démontrons l'isomorphisme annoncé.

Posons  $V_0 = V$ ,  $V_i = (\underline{\mathbb{C}}^{i-1} \times (\underline{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{R}}) \times \underline{\mathbb{C}}^{n-i}) \cap (V - \Omega)$ , et considérons les recouvrements  $\mathcal{U} = \{V_i\}_{i=0, \dots, n}$  et  $\mathcal{U}' = \{V_i\}_{i=1, \dots, n}$ . Puisque tous les ouverts  $V_i$  sont d'holomorphic, il résulte du théorème B de Cartan que le recouvrement  $\mathcal{U}$  est acyclique par rapport au faisceau  $\Theta$  des fonctions holomorphes. D'après le théorème de Leray, il suffit donc de montrer que

$$B(\Omega) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \Theta) .$$

Or, puisque le recouvrement  $\mathcal{U}$  contient seulement  $n + 1$  éléments, on a

$$c^k(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \Theta) = 0 \quad \text{pour } k \geq n + 1 ,$$

et, en particulier, les  $n$ -cochaines relatives sont des  $n$ -cocycles ; par ailleurs,  $c^n(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \Theta)$  s'identifie à  $A(V \not\equiv \Omega)$ , puisqu'il n'y a que  $n + 1$  ouverts dans le recouvrement  $\mathcal{U}$  et que  $V_0 \cap \dots \cap V_n = V \not\equiv \Omega$ . Remarquons maintenant pour terminer que  $d c^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \Theta)$  est isomorphe à  $\sum A(\hat{V}_j)$ , puisque l'on a, par définition,  $c_{1, \dots, n} = 0$ , si  $c \in c^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \Theta)$ , d'où

$$(dc)_{0, \dots, n} = \sum (-1)^j c_{0, \dots, \hat{j}, \dots, n} ,$$

avec  $c_{0, \dots, \hat{j}, \dots, n} \in A(\hat{V}_j)$  , puisque  $\bigcap_{i \neq j} V_i = \hat{V}_j$  .

### 3. Lemme de Martineau et applications.

Rappelons tout d'abord quelques résultats sur la cohomologie de Dolbeault. Désignons par  $\mathcal{E}_{(p,q)}$  le faisceau des  $(p, q)$ -formes différentielles sur  $\mathbb{C}^n$  à coefficients indéfiniment différentiables ; les groupes de cohomologie de Dolbeault d'un ouvert  $U$  , notés  $\mathcal{K}^n(U)$  , sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\dots \longrightarrow \mathcal{E}_{(0,n-1)} \xrightarrow{\bar{d}} \mathcal{E}_{(0,n)} \longrightarrow \dots .$$

Remarquons que, si  $K$  est un compact de  $\mathbb{C}^n$  , alors on a, pour  $n > 1$  , un isomorphisme, que nous désignerons par  $\delta$  , entre le groupe de cohomologie relative  $H_K^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$  et le  $(n-1)$ -ième groupe de Dolbeault  $\mathcal{K}^{n-1}(\mathbb{C}^n - K)$  . En effet, la suite exacte de cohomologie relative s'écrit ici

$$H^{n-1}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H_{\mathbb{C}^n - K}^{n-1}(\mathbb{C}^n - K, \mathcal{O}) \longrightarrow H_K^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) ;$$

les deux groupes extrêmes sont nuls d'après le théorème B, d'où la conclusion, en utilisant le fait que la cohomologie à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes peut se calculer à partir du complexe ci-dessus (isomorphisme de Dolbeault).

Nous admettrons le théorème fondamental suivant :

3.1. THÉORÈME (Lemme de Martineau [4]). - Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $H^p(K, \mathcal{O}) = 0$  pour  $p > 0$  . Alors  $H_K^p(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$  pour  $p \neq n$  et, pour  $n > 1$  ,

$$H_K^n(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \stackrel{\delta}{\cong} \mathcal{K}^{n-1}(\mathbb{C}^n - K) \stackrel{\delta_1^*}{\cong} A^*(K) ,$$

l'isomorphisme  $\delta_1^*$  étant induit par la forme bilinéaire suivante :

Soit  $f \in A(K)$  , et soit  $\psi \in \mathcal{E}_{(0,n-1)}$  telle que  $\bar{d}\psi = 0$  . Alors  $f \in A(U)$  pour un certain ouvert  $U$  contenant  $K$  ; choisissant une fonction  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  à support compact, nulle en dehors de  $U$  et égale à 1 dans un voisinage de  $K$  , on pose

$$(2) \quad \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f \psi \wedge \bar{d}\alpha \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n .$$

Remarquons que, d'après le lemme de Grauert et le théorème B de Cartan, le lemme de Martineau s'applique en particulier aux compacts  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

3.2. COROLLAIRE. - Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , alors on a

$$H_{\Omega}^p(\mathbb{C}^n - \partial\Omega, \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p \neq n .$$

Pour  $p \neq n$ , la nullité du groupe de cohomologie résulte de la suite exacte de cohomologie pour les sous-ensembles fermés  $\partial\Omega$  et  $\bar{\Omega}$  de  $\mathbb{C}^n$ , en appliquant le lemme de Martineau (pour  $p \neq n - 1$ ), et en utilisant le fait que l'application de  $A'(\partial\Omega)$  dans  $A'(\bar{\Omega})$  est injective (pour  $p = n - 1$ ).

3.3. THÉORÈME. - Le préfaisceau  $\mathcal{B}$  sur  $\mathbb{R}^n$  défini par  $\mathcal{B}(\Omega) = B(\Omega)$  est un faisceau sur  $\mathbb{R}^n$ .

Ce théorème résulte de 3.2 et du lemme d'algèbre pure suivant :

LEMME. - Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur un espace  $X$ , et soit  $M$  un fermé de  $X$ . Soit  $\mathcal{G}_M^p$  le faisceau déterminé par le préfaisceau  $\{H_{U \cap M}^p(U, \mathcal{F})\}$ . Alors, si

$$\mathcal{G}_M^p = 0 \quad \text{pour } p \neq n ,$$

on a

$$H_{U \cap M}^p(U, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{pour } p < n ,$$

$$H_{U \cap M}^p(U, \mathcal{F}) \cong H^{p-n}(U, \mathcal{G}_M^p) \quad \text{pour } p \geq n .$$

En particulier, pour  $p = n$ , le préfaisceau  $\{H_{U \cap M}^n(U, \mathcal{F})\}$  est un faisceau.

On applique ici ce lemme avec  $X = \mathbb{C}^n - \partial\Omega$ ,  $M = \Omega$ , et  $\mathcal{F} = \mathcal{O}$ , d'où le théorème pour  $p = n$ , puisque  $\mathcal{G}_M^n$  a pour fibre 0 en tout point  $x \notin M$ . Le lemme entraîne aussi que, pour un ouvert quelconque  $\Omega'$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$(3) \quad H_{\Omega'}^p(\mathbb{C}^n - \partial\Omega', \mathcal{O}) = 0 \quad \text{pour } p < n .$$

3.4. THÉORÈME. - Le faisceau  $\mathcal{B}$  est un faisceau flasque.

Si  $V \cap \mathbb{R}^n = \Omega$ , on veut montrer que, pour toute fonction  $F \in A(V \neq \Omega)$ , il existe une fonction équivalente définie globalement, i. e. des fonctions  $F_j \in A(\hat{V}_j)$  telles que  $F - \sum F_j$  se prolonge à  $\mathbb{C}^n \neq \mathbb{R}^n$ ; cela signifie exactement que

$$\frac{A(V \neq \Omega)}{A(\hat{V}_j) + A(\underline{\mathbb{C}}^n \neq \underline{\mathbb{R}}^n)} = 0 .$$

Pour cela, en posant  $U_0 = V$ ,  $U_j = \underline{\mathbb{C}}^{j-1} \times (\underline{\mathbb{C}} - \underline{\mathbb{R}}) \times \underline{\mathbb{C}}^{n-j}$  et  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=0}^n$ , on vérifie que ce groupe est égal à  $H^n(\mathcal{U}, \theta)$ . Puisque le recouvrement  $\mathcal{U}$  est acyclique par rapport au faisceau  $\theta$  (théorème B de Cartan), ce groupe est égal, d'après le théorème de Leray classique, à  $H^n(U, \theta)$  pour  $U = \bigcup_{j=0}^n U_j$ , et ce groupe est nul d'après un théorème de Malgrange [3].

#### 4. Hyperfonctions et distributions.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\underline{\mathbb{R}}^n$ ; une hyperfonction sur  $\Omega$  est une section du faisceau  $\mathcal{B}$  au-dessus de  $\Omega$ , et par suite on peut parler de son support (cf. § 1). Si  $K$  est un compact de  $\Omega$ , on désignera par  $B_K(\Omega)$  l'espace des hyperfonctions sur  $\Omega$  dont le support est contenu dans  $K$  (i. e. le noyau de l'application de restriction  $B(\Omega) \rightarrow B(\Omega - K)$ ), et par  $B_*(\Omega)$  l'espace des hyperfonctions sur  $\Omega$  à support compact;  $V$  désignera un ouvert d'holomorphic coupant  $\underline{\mathbb{R}}^n$  suivant  $\Omega$ .

4.1. THÉORÈME. - Avec les notations ci-dessus, on a

$$B_K(\Omega) \cong H_K^n(V, \theta) \quad \underline{\text{et}} \quad B_K(\underline{\mathbb{R}}^n) \cong A'(K) .$$

D'après 1.3, on a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\Omega-K}^{n-1}(V-K, \theta) & \rightarrow & H_K^n(V, \theta) & \rightarrow & H_{\Omega}^n(V, \theta) & \rightarrow & H_{\Omega-K}^n(V-K, \theta) \\ & & & & \uparrow \parallel & & \uparrow \parallel \\ & & & & B(\Omega) & & B(\Omega-K) \end{array} .$$

D'après (3), le premier de ces groupes est nul, d'où le premier isomorphisme. Le second résulte de 3.1, qui précise de plus l'isomorphisme.

Puisque  $A'(\underline{\mathbb{R}}^n) = \bigcup_{K \subset \underline{\mathbb{R}}^n} A'(K)$ , le théorème 4.1 entraîne, en particulier, que l'isomorphisme  $\delta_1^*$  défini dans 3.1 induit un isomorphisme de  $B_*(\underline{\mathbb{R}}^n)$  sur  $A'(\underline{\mathbb{R}}^n)$ . Par ailleurs, puisque le faisceau  $\mathcal{B}$  est flasque, toute hyperfonction apparaît comme une somme localement finie d'hyperfonctions à support compact qui s'interprètent comme des fonctionnelles analytiques d'après ce qui précède. Ces deux résultats permettent d'injecter les distributions sur  $\Omega$  dans les hyperfonctions sur  $\Omega$ , avec conservation des supports.

4.2. THÉORÈME. - L'espace  $\mathcal{O}'(\Omega)$  des distributions sur  $\Omega$  s'identifie à un sous-espace de l'espace  $B(\Omega)$  des hyperfonctions, le support de  $u$  considéré comme une distribution étant égal au support de  $u$  considéré comme une hyperfonction.

On utilise le lemme suivant :

L'application naturelle de l'espace des distributions à support compact sur  $\mathbb{R}^n$  dans l'espace  $A'(\mathbb{R}^n)$  des fonctionnelles analytiques réelles est une injection qui préserve les supports.

En utilisant une partition de l'unité, on écrit la distribution  $u$  comme une somme localement finie  $\sum u_i$  de distributions à supports compacts. D'après les remarques ci-dessus et le lemme, on peut considérer chaque  $u_i$  comme une hyperfonction sans changer son support, de telle sorte que  $\sum u_i$  reste une somme localement finie d'hyperfonctions ; par suite, cette somme définit une hyperfonction sur  $\Omega$  dont le support est égal au support de  $u$  considéré comme une distribution.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).
- [2] HARVEY (R.). - Hyperfunctions and partial differential equations. - Stanford, Stanford University.
- [3] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955/56, p. 271-355 (Thèse Sc. Math. Paris, 1955).
- [4] MARTINEAU (André). - Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 214, 13 p.