PIERRE LELONG

Exemples d'indicatrices régularisées non continues

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. nº 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A7_0>

EXEMPLES D'INDICATRICES RÉGULARISÉES NON CONTINUES (*)

par Pierre LELONG

Je vais établir que l'indicatrice radiale régularisée, ainsi que l'indicatrice cerclée régularisée, des fonctions entières $f(z_1, \ldots, z_n)$ de type exponentiel ne sont pas, en général, des fonctions continues pour $n > 1$.

L'indicatrice radiale est celle qui a été étudiée dans l'exposé précédent de A. MARTINEAU ; elle est définie par

$\lambda_f(z) = \limsup t^{-1} \log|f(tz)|$, $t > 0$, $t \to +\infty$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$;

sa régularisée $\lambda_f^*(z)$ est une fonction plurisousharmonique. Pour montrer qu'elle n'est pas nécessairement continue, je me servirai de l'indicatrice cerclée, étudiée conjointement avec la précédente, dans le mémoire [3]. On va établir que l'indicatrice cerclée régularisée n'est pas nécessairement une fonction continue. La même assertion en résultera concernant l'indicatrice radiale régularisée $\lambda_f^*(z)$, et ceci résoudra par la négative une conjecture faite à la fin de l'exposé précédent.

1. A une demi-droite définie par

$$z'_k = tz_k , \quad t > 0 , \quad [z = (z_k) \neq 0] ,$$

associons canoniquement le plan complexe $L^1(z)$, défini par

$$z'_k = uz_k , \quad u \text{ complexe} .$$

Considérons, pour une fonction entière $f(z_1, \ldots, z_n) = f(z)$ de type exponentiel, l'indicatrice cerclée

$$L_c(z) = \limsup |u|^{-1} \log|f(z_1 u, \ldots, z_n u)| , \quad |u| \to +\infty ,$$

et sa régularisée supérieure, dite indicatrice cerclée régularisée

$$L_c^*(z) = \limsup L_c(z + z') , \quad \|z'\| \to 0 .$$

(*) Note, rédigée en septembre 1966, en complément à l'exposé d'André MARTINEAU (cf. n° 8 de ce Séminaire).

$L_c^*(z)$ est la plus petite majorante semi-continue supérieurement de $L_c(z)$. Les indicatrices L_c^* ont été caractérisées dans notre mémoire [3] (cf. aussi [2]). Pour qu'une fonction $V(z)$ soit l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière de type exponentiel, il faut et il suffit qu'elle soit plurisousharmonique dans C^n et homogène d'ordre 1, c'est-à-dire vérifie

(1) $$V(uz) = |u|\, V(z) \quad .$$

On a établi (loc. cit.) que (1) entraîne $V(z) \geqslant 0$, et que $U(z) = \log V(z)$ est une fonction plurisousharmonique ; elle vérifie

(2) $$U(uz) = U(z) + \log|u| \quad .$$

Réciproquement, si on se donne une fonction plurisousharmonique vérifiant (2), $V(z) = \exp U(z)$ est l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière de type exponentiel.

2. Etant donné un polynôme $P(z_1, \dots, z_n)$, on peut lui faire correspondre canoniquement un polynôme homogène de $n+1$ variables $\overline{P}(z_0, z_1, \dots, z_n)$, en posant

$$\overline{P}(z_0, z_1, \dots, z_n) = P(z_1 z_0^{-1}, \dots, z_n z_0^{-1}) z_0^m$$

où m = degré P.

Nous allons nous inspirer de ce procédé comme dans [3] pour faire correspondre à une fonction plurisousharmonique donnée dans C^n, soit

$$U(z_1, \dots, z_n) \quad ,$$

appartenant à la classe de croissance minimale (cf. [3]), une fonction plurisousharmonique dans C^{n+1},

$$\overline{U}(z_0, z_1, \dots, z_n) \quad ,$$

vérifiant (2).

PROPOSITION. - Soit $U(z_1, \dots, z_n)$ une fonction plurisousharmonique dans C^n vérifiant

(3) $$\limsup\, (\log\|z\|)^{-1} U(z) = a < \infty \, , \qquad \|z\| \to +\infty \; ;$$

alors la fonction définie, pour $z_0 \neq 0$, par

(4) $$U_1(z_0, z_1, \dots, z_n) = a^{-1}\, U(z_1 z_0^{-1}, \dots, z_n z_0^{-1}) + \log|z_0|$$

<u>se prolonge d'une manière unique en une fonction</u> $\bar{U}(z_0, \ldots, z_n)$ <u>plurisous-harmonique dans</u> C^{n+1} <u>et vérifiant</u> (2).

La démonstration (cf. [3]) se résume en ceci : $\bar{U}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ est définie par (4) et plurisousharmonique au voisinage de tout point

$$z' = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in C^{n+1}$$

pour lequel $z_0 \neq 0$. D'après un énoncé établi dans [1], une fonction plurisousharmonique dans $D - E$, bornée supérieurement sur $D - E$ au voisinage de tout point de E, où $E \subset D$ est un sous-ensemble analytique d'une variété analytique complexe D, se prolonge "par continuité" de $D - E$ à D ; le prolongement est obtenu, d'une manière unique, en définissant sa valeur en $x \in E$ comme la limite supérieure des valeurs prises en des points $x^{(i)} \to x$, $x^{(i)} \in D - E$ (en fait, l'énoncé est vrai sous l'hypothèse plus générale que E est localement de capacité nulle pour la structure réelle sous-jacente). Il suffit donc ici d'établir que U_1, défini par (4), est borné supérieurement au voisinage d'un point quelconque du sous-ensemble analytique $z_0 = 0$. Soit

$$M(r) = \sup U(z) \qquad \text{pour } \|z\| = r .$$

$M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$; alors (3) entraîne, par des arguments de convexité,

$$M(r) \leqslant a \log r + M(1) ,$$

c'est-à-dire l'existence d'une constante finie b telle que

$$U(z_1, \ldots, z_n) \leqslant a \log\|z\| + b .$$

Considérons alors $U_1(z_0, z_1, \ldots, z_n)$; en notant encore

$$\|z\| = r , \quad z = (z_1, \ldots, z_n) ,$$

on a, d'après (4),

$$U_1(z_0, z_1, \ldots, z_n) \leqslant a^{-1}[a \log \frac{r}{|z_0|} + b] + \log|z_0| = \log r + ba^{-1}$$

qui montre que U_1, définie sur $\Omega = C^{n+1} - \{z_0 = 0\}$, est bornée supérieurement sur $K \cap \Omega$, K étant un compact quelconque de C^{n+1} ; l'énoncé précédent est alors établi.

3. Une conséquence de la construction précédente est le théorème suivant.

THÉORÈME. - Il existe une correspondance canonique biunivoque entre la classe des fonctions plurisousharmoniques de C^n qui vérifient la majoration (3) et l'ensemble des indicatrices cerclées régularisées des fonctions entières de type exponentiel dans C^{n+1}.

En effet, la construction précédente définit

$$U(z_1 , \dots , z_n) \to \overline{U}(z_0 , z_1 , \dots , z_n) ,$$

et $V = e^{\overline{U}}$ est alors l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière f d'après le résultat rappelé plus haut.

4. Il est facile de former pour $n = 1$ une fonction plurisousharmonique $U(z)$, vérifiant (3), qui ne soit pas continue. En effet, il suffit de considérer un potentiel $U^{\mu}(z) = \mu_a \star \log|a - z|$, μ étant une mesure positive à support dans $|a| \leqslant 1$; il est bien connu que cette construction peut être faite de manière que $U^{\mu}(z)$ ait une discontinuité à l'origine. Alors $U(z) = U^{\mu}(z)$ vérifie

$$U(z) \leqslant \|\mu\| \log[|z| + 1] \leqslant \|\mu\| \log\|z\| + \|\mu\| \log 2 ,$$

et la fonction

$$U_2(z_0 , z_1) = \|\mu\|^{-1} U(z_1 z_0^{-1})$$

se prolonge en conséquence dans C^2 en une fonction plurisousharmonique

$$\overline{U}(z_1 , z_2) ;$$

la fonction

$$V(z_0 , z_1) = \exp \overline{U}(z_0 , z_1)$$

est alors l'indicatrice cerclée régularisée d'une fonction entière $f(z_0 , z_1)$ de type exponentiel. Par construction, elle est discontinue en tout point de la variété W définie par $z_1 = 0$, $z_0 \neq 0$.

L'indicatrice radiale régularisée $\lambda_f^*(z_0 , z_1)$ n'est pas une fonction continue. En effet, s'il en était ainsi, la fonction

$$V(z_0 , z_1) = \sup_\theta \lambda_f^*(z_0 e^{i\theta} , z_1 e^{i\theta}) , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi ,$$

serait continue, ce qui n'est pas.

Le contre-exemple vaut évidemment pour n quelconque, f pouvant être considéré comme une fonction entière de type exponentiel d'un nombre quelconque de variables z_0, z_1, ..., z_n, qui ne dépend que des deux premières d'entre elles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LELONG (Pierre). - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 263-303.

[2] LELONG (Pierre). - Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1063-1066.

[3] LELONG (Pierre). - Fonctions entières de type exponentiel dans C^n, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, n° 2.