

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JEAN-LUC VERLEY

Représentations intégrales de Fantappié-Leray

Séminaire Lelong. Analyse, tome 6 (1965-1966), exp. n° 4, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SL_1965-1966__6__A4_0

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE FANTAPPIÉ-LERAY

par Jean-Luc VERLEY

(d'après André MARTINEAU [3] et [4])

La matière de cet exposé est contenue dans [4] (pages 43 à 60). Nous nous contenterons de donner ici un bref résumé, sans démonstration.

1. Notations.

E étant un espace vectoriel de dimension finie, on définit l'espace projectif associé $P(E)$, quotient de $(\mathbb{C} \times E)^*$ par le groupe des homothéties ; $P(E)$ est une variété analytique complexe, de dimension complexe $2n$, dont E est une sous-variété ouverte. On notera

$$(\zeta_0, Z), \quad \zeta_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad Z \in E \quad (\text{resp.} \quad (\xi_0, \xi), \quad \xi_0 \in \mathbb{C}, \quad \xi \in E') ,$$

les coordonnées homogènes d'un point de $P(E)$ (resp. de $P(E')$).

L'équation d'un hyperplan $\bar{\xi}$ de $P(E)$ est une équation homogène de la forme

$$(1) \quad \xi_0 \zeta_0 + \langle Z, \xi \rangle = 0, \quad \xi \in E' ;$$

lui associant le point $P(E')$ de coordonnées homogènes (ξ_0, ξ) et vice versa, on peut identifier $P(E')$ à l'ensemble des hyperplans de $P(E)$ et vice versa. On obtient ainsi une notion de dualité, bien connue pour $E = \mathbb{C}^n$.

Pour $A \subset P(E)$, on désignera par $\mathbb{C}^* A$ l'ensemble (identifié à un sous-ensemble de $P(E')$) des hyperplans de E ne rencontrant pas A .

2. Représentations du type de Leray.

Identifions E à $\mathbb{C}^n$ par le choix d'un système de coordonnées.

Considérons, sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ respectivement, les deux formes différentielles

$$\omega(Z) = dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_n ,$$

$$\omega'(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \omega'(\xi) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \xi_k d\xi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\xi_k} \wedge \dots \wedge d\xi_n .$$

Si $g(Z, \xi)$ est une fonction holomorphe de $(Z, \xi) \in U \times \Omega$, U ouvert de $\mathbb{C}^n$ et Ω cône ouvert de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$, holomorphe de degré $-n$ en ξ , alors

$$g(Z, \xi) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z)$$

définit une forme différentielle holomorphe π dans l'ouvert $U \times \omega(\Omega) \subset E \times P(E')$ (ω est ici l'application canonique $E' \times \mathbb{C} \rightarrow P(E')$).

K désignera dans la suite un compact convexe de E dont le bord est une variété régulière (de dimension réelle $2n - 1$). Pour tout point $Z \in \partial K$, ∂K admet un hyperplan réel tangent, et il existe un seul hyperplan complexe passant par Z et contenu dans cet hyperplan réel ; nous le désignerons par $\xi(Z) \in P(E')$. Nous désignerons enfin par $\Sigma(\partial K)$ la sous-variété réelle de dimension $2n - 1$ de $E \times P(E')$, image de la variété ∂K par l'application $Z \mapsto (Z, \xi(Z))$ et orientée par transport de l'orientation de ∂K (*). Remarquons que $\Sigma(\partial K)$ est une sous-variété de la quadrique $\mathcal{Q}$, d'équation

$$\xi \cdot Z = \xi_0 + \xi_1 Z_1 + \dots + \xi_n Z_n = 0,$$

qui est une sous-variété complexe de dimension complexe $2n - 2$ de $E \times P(E')$.

Nous considérerons dans la suite des représentations intégrales du type

$$(2) \quad \int_{\Sigma(\partial K)} g(Z, \xi) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) = \int_{\Sigma(\partial K)} \pi$$

où $g(Z, \xi) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z)$ est holomorphe dans $U \times \mathbb{C}^* K_1$ (U ouvert convexe et K_1 compact convexe, $K_1 \subset K \subset U$).

Remarquons que si deux compacts convexes K et K' ont un point intérieur commun, alors les deux intégrales relatives à K et K' sont égales car $\Sigma(\partial K)$ et $\Sigma(\partial K')$ sont homotopes dans $\mathcal{Q}$, et la forme π est fermée sur $\mathcal{Q}$ (car holomorphe et de degré maximum).

3. Intégrale de Cauchy-Fantappiè-Leray.

THÉORÈME 1 (cf. [1]). - Soient K un convexe compact, et f holomorphe dans un voisinage ouvert de K . Alors, pour tout $u \in \overset{\circ}{K}$, on a

(*) $\overset{\circ}{K}$ est orienté par la condition

$$\frac{1}{(2i)^n} \int_{\overset{\circ}{K}} dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_n \wedge \overline{dZ_1} \wedge \dots \wedge \overline{dZ_n} \geq 0,$$

et ∂K est muni de l'orientation donnée par la formule de Stokes.

$$(3) \quad f(u) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(K)} \frac{f(Z)}{(\xi_0 + \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n)^n} \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) ,$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) .$$

COROLLAIRE. - Tout compact convexe K possède la propriété de Runge, i. e. les polynômes sont denses dans l'espace vectoriel $H(K)$ des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K (muni de la topologie

$$H(K) = \varinjlim_{\substack{\Omega \supset K \\ \Omega \text{ ouvert}}} H(\Omega) .$$

4. Indicatrice projective (FANTAPPIÉ).

Nous désignerons par $H'(K)$ l'espace vectoriel des fonctionnelles analytiques portables par K (cf. [2] ou [5]). Remarquons que, pour $\xi \in E'$, la fonction $Z \mapsto \frac{\xi_0}{\xi_0 + \langle Z, \xi \rangle}$ ne dépend que de l'hyperplan $\bar{\xi}$ défini par (ξ_0, ξ) et est holomorphe dans un voisinage de tout compact ne rencontrant pas l'hyperplan précédent.

DÉFINITION. - Soit $T \in H'(K)$; on appelle indicatrice projective de T la fonction

$$\varphi_T : \xi \mapsto (T(Z \mapsto \frac{\xi_0}{\xi_0 + \langle Z, \xi \rangle}))$$

définie sur $\mathbb{C}^*K$.

Désignant par $H_0(\mathbb{C}^*K)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^*K$ et nulles à l'infini (i. e. pour $\xi_0 = 0$), on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - L'application $T \rightarrow \varphi_T$ est un isomorphisme de $H'(K)$ sur $H_0(\mathbb{C}^*K)$, la fonctionnelle analytique $T \in H'(K)$ qui correspond à $\varphi \in H_0(\mathbb{C}^*K)$ étant définie, pour $f \in H(K)$, par

$$(4) \quad T(f) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Sigma(K')} f_\omega(Z) \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi_0^{n-1}} \left(\frac{1}{\xi_0} \varphi(\xi) \right) \omega'(\xi) \wedge \omega(Z) .$$

Ici f_ω est un représentant de f holomorphe dans l'ouvert $\omega \supset K$, et K' un compact convexe tel que $\overset{\circ}{K} \subset K' \subset \omega$.

Remarquons que cette intégrale est bien du type (2).

5. Théorème de l'indicatrice.

Rappelons en quelques mots la définition de la transformation de Fourier-Borel (cf. [2] ou [3]) : A toute fonctionnelle analytique T sur E on associe la fonction entière de type exponentiel

$$(5) \quad \mathfrak{F}T(u) = T(Z \mapsto \exp\langle Z, u \rangle), \quad u \in E',$$

appelée transformée de Fourier-Borel de T . Si T est portable par un convexe compact K , de fonction d'appui $h_K(u) = \sup_{Z \in K} \operatorname{Re}\langle Z, u \rangle$, alors on a, $\forall \varepsilon > 0$, une majoration du type :

$$(6) \quad |F(u)| \leq K(\varepsilon) \exp(h_K(u) + \varepsilon \|u\|) ;$$

ici $\|u\|$ est une norme complexe quelconque sur E . La réciproque de ce résultat constitue le théorème suivant.

THÉOREME 3 (Théorème de l'indicatrice). - Si F est une fonction entière définie sur E' qui satisfait à une majoration du type

$$(6) \quad |F(u)| \leq K(\varepsilon) \exp(h_K(u) + \varepsilon \|u\|), \quad \forall \varepsilon > 0$$

($h_K(u)$ fonction d'appui d'un convexe compact K), il existe une fonctionnelle analytique T portable par K telle que $\mathfrak{F}T = F$.

Désignons par $\mathcal{E}_K$ l'espace vectoriel des fonctions entières sur E' qui satisfont à (6). D'après le théorème 2, il suffit de construire une bijection $F \mapsto \mathcal{L}_F$ de $\mathcal{E}_K$ sur $H_0(\mathbb{C}^*K)$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{F}T = F \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{L}_T = \mathcal{L}_F & \end{array}$$

Nous renvoyons à [3] ou [4] pour la construction de la transformée de Laplace projective $\mathcal{L}_F$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.
- [2] MARTINEAU (André). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel, J. Anal. math., Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

- [3] MARTINEAU (André). - Fonctions entières de plusieurs variables complexes, Université de Montpellier, Notes manuscrites photocopiées.
 - [4] MARTINEAU (André). - Equations différentielles d'ordre infini, Séminaire Leray: Equations aux dérivées partielles, 5e année, 1965/66 (à paraître).
 - [5] VERLEY (Jean-Luc). - Fonctionnelles analytiques sur les variétés de Stein, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 4e année, 1964/65, n° 6, 17 p. (Math. Semin., 1).
-