

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

JACQUES BROS

**Les problèmes de construction d'enveloppes d'holomorphie
en théorie quantique des champs**

Séminaire Lelong. Analyse, tome 4 (1962), exp. n° 8, p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=SL_1962__4__A5_0

© Séminaire Lelong. Analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION D'ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE
EN THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par Jacques BROS

INTRODUCTION. -- Dans l'état actuel de la physique des particules élémentaires, on ne possède aucun modèle calculable de théorie des champs qui permette de prédire convenablement les résultats expérimentaux. Cette situation a conduit certains physiciens ⁽¹⁾ à développer une "théorie axiomatique des champs" où, partant de quelques principes très généraux dans le cadre traditionnel de la mécanique quantique relativiste, on essaie de déduire des relations mathématiques vérifiées par les quantités observables.

Dans ce développement, il s'est avéré que les principales quantités observables (amplitudes de diffusion de particules élémentaires sur une cible) pouvaient chacune être considérées comme la valeur au bord d'une fonction de plusieurs variables complexes F , analytique dans un certain domaine initial $\Omega \subset \mathbb{C}_n$, prescrit par les axiomes de départ.

Le domaine Ω n'étant pas un domaine naturel d'holomorphie, le problème se pose, en l'absence de toute forme explicite de F , de trouver le domaine de prolongement commun à toutes les fonctions F possibles analytiques dans Ω , c'est-à-dire l'enveloppe d'holomorphie $\mathcal{H}(\Omega)$.

Ayant trouvé $\mathcal{H}(\Omega)$, on peut espérer écrire des formules intégrales ⁽²⁾ permettant de représenter toute fonction F analytique dans $\mathcal{H}(\Omega)$ au moyen de ses valeurs au bord en certaines parties de la frontière. L'espoir est de pouvoir ainsi démontrer des relations (appelées "relations de dispersion" par les physiciens) où les fonctions analytiques n'interviennent que par des valeurs au bord représentant des quantités observables.

Nous nous proposons ici, après avoir précisé le type de domaine initial Ω

⁽¹⁾ Pour une revue d'ensemble de la question, voir par exemple [21], 4e partie ; comme articles originaux, voir : [1] (dernier chapitre et appendice), [9], [11] et [12], [23], [24] et [25].

⁽²⁾ Telles que la représentation d'OKA-WEIL : cf. P. IELONG [14].

introduit par la physique, d'exposer sur des exemples les quelques méthodes qui nous ont permis de prolonger $\mathcal{Q}$, ou dans quelques cas très simplifiés d'obtenir $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

1. Le domaine initial $\mathcal{Q}$ donné par la physique.

Notation. - L'espace-temps $(^3)$ est défini par la donnée sur R_4 de la forme bilinéaire

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^{(0)} y^{(0)} - x^{(1)} y^{(1)} - x^{(2)} y^{(2)} - x^{(3)} y^{(3)},$$

où $\vec{x}, \vec{y}$ sont deux quadrivecteurs quelconques.

Le "cône futur" V^+ est l'ensemble $\{\vec{x} : \vec{x} \cdot \vec{x} \equiv \vec{x}^2 > 0 ; x^{(0)} > 0\}$.

Le "cône passé" est $V^- = -V^+$.

Le groupe de Lorentz réel est le groupe des transformations linéaires réelles de l'espace-temps par lesquelles la forme $\vec{x} \cdot \vec{y}$ est invariante. La donnée de la même forme $\vec{x} \cdot \vec{y}$ sur $\mathbb{C}_4$ permet de définir de façon analogue le groupe de Lorentz complexe.

Les grandeurs fondamentales de la théorie sont des distributions tempérées $r_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n}$ agissant sur les fonctions $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{S}_{4n}$ de n quadrivecteurs réels de l'espace-temps, n pouvant prendre toute valeur positive entière. Chaque distribution $r_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n}$ jouit des propriétés suivantes :

i. Son support est un cône convexe C du type

$$C^+ \equiv \{\vec{\xi}_1 \in V^+ ; \dots ; \vec{\xi}_n \in V^+\}$$

ii. Elle est invariante par le groupe de Lorentz réel.

On considère les transformées de Fourier $\tilde{r}_{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n} = \mathcal{F} r_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n}$, $\mathcal{F}$ étant définie par :

$(^3)$ Considéré ici comme espace vectoriel.

$$\mathfrak{S}\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \int \exp(i \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \cdot \vec{\xi}_i) \varphi(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n) d\vec{\xi}_1 \dots d\vec{\xi}_n$$

pour $\varphi \in \mathfrak{S}_{4n}$.

En vertu de théorèmes bien connus ⁽⁴⁾, chaque $\tilde{r}_{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}$ possède alors les

propriétés :

- i. $\tilde{r}_{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}$ est une distribution tempérée, limite d'une fonction $f(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ ($\vec{z}_i = \vec{x}_i + i\vec{y}$) analytique dans le tube

$$\mathcal{C} \equiv \{ \{ \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \} \in \tilde{C} \},$$

où $\tilde{C}$ est le cône dual de C .

- ii. $f(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ est bornée par des polynômes au voisinage de la frontière de $\mathcal{C}$ et à l'infini ⁽⁵⁾.

- iii. $f(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ est invariante par le groupe de Lorentz réel.

Certains physiciens ⁽⁶⁾ ont été conduits, en exploitant simultanément les propriétés (i) et (iii) à étudier l'analyticité dans l'espace des invariants $\vec{z}_i \cdot \vec{z}_j$; pour les plus faibles valeurs de n , cette étude a pu être menée assez loin, mais pour n quelconque, il peut paraître plus simple d'étudier d'abord l'analyticité dans l'espace initial ⁽⁷⁾.

Nous retiendrons donc ici la donnée, pour chaque n , de plusieurs fonctions $f(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ analytiques dans des tubes de base conique dont les intersections deux à deux sont vides. Par exemple :

⁽⁴⁾ Cf. par exemple : L. SCHWARTZ [20], J.-L. LIONS [18].

⁽⁵⁾ Nous laisserons de côté ici ces restrictions de croissance au bord, qui n'ont pas encore été exploitées de façon générale.

⁽⁶⁾ Cf. [10] et [13].

⁽⁷⁾ C'est le point de vue adopté notamment par V. GLASER, dont nous présentons ici un certain nombre de résultats. Un exposé plus complet et détaillé de ces problèmes est actuellement en préparation (en collaboration : J. BROS, H. EPSTEIN et V. GLASER).

f^+ est analytique dans $\mathcal{C}^+ \equiv \{\vec{y}_1 \in V^+, \dots, \vec{y}_n \in V^+\}$

f^- est analytique dans $\mathcal{C}^- \equiv \{\vec{y}_1 \in V^-, \dots, \vec{y}_n \in V^-\}$

f'^- est analytique dans $\mathcal{C}'^- \equiv \{\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_n \in V^+, \vec{y}_2 \in V^-, \dots, \vec{y}_n \in V^-\}$.

En outre, pour chaque n fixé, la physique impose à ces différentes fonctions que leurs valeurs au bord $\tilde{r}_{\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n}$ coïncident deux à deux (au sens des distributions tempérées) dans certaines régions réelles $\mathcal{R}$. Par exemple :

$$\lim_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_i \in V^+ \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}} f^+(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n) = \lim_{\left\{ \begin{array}{l} \vec{y}_i \in V^- \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}} f^-(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$$

dans le domaine réel $\mathcal{R}$ défini par l'ensemble des conditions :

$$\left(\sum_{i \in I} \vec{x}_i \right)^2 < m_I^2 \quad \text{où} \quad I \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad .$$

On peut alors montrer au moyen d'une intégrale de Cauchy que ces différentes fonctions analytiques de $4n$ variables sont en fait prolongeables suivant une même fonction analytique $F(\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n)$ ⁽⁸⁾.

Plus précisément, soient f et f' analytiques respectivement dans les tubes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dont les bases imaginaires pures sont les cônes convexes C et C' d'intersection vide. Deux cas sont possibles :

- Si $C \cap (-C') \neq \emptyset$, la fonction F qui prolonge f et f' est analytique dans un voisinage complexe $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ de la région réelle $\mathcal{R}$ de coïncidence $[\mathcal{V}(\mathcal{R})$ est indépendant de $F]$. Ainsi la distribution tempérée, limite commune de f et f' dans $\mathcal{R}$, est en fait une fonction analytique dans $\mathcal{R}$. Ce cas est celui des tubes $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ donnés par la physique.

⁽⁸⁾ Ce théorème, démontré par certains physiciens, est connu d'eux sous le nom de théorème de l'"edge of the wedge" ; voir par exemple [1] appendice, [7], [5] et [8].

- Si $C \cap (-C') = \emptyset$, il n'y a plus analyticité aux points de R , mais tout couple (f, f') se prolonge encore suivant une fonction F analytique dans $V(R) \cap E(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}')$; $E(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}')$ désigne l'enveloppe convexe de $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ et $V(R)$ est un voisinage complexe de R , indépendant de F . Ce cas est celui des tubes $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}'^-$ donnés par la physique.

Ce théorème de prolongement local au voisinage des points de R étant démontré, le problème se pose de construire l'enveloppe d'holomorphie $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ de domaines $\mathcal{Q}$ du type :

$$\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}'^- \cup V(R) \quad ,$$

ou

$$\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}'^- \cup \{V(R) \cap E(\mathcal{C} \cup \mathcal{C}')\} \quad .$$

Remarque. - La forme explicite de $V(R)$ n'a aucune importance, le rôle de $V(R)$ étant simplement de relier les différents tubes pour définir un domaine $\mathcal{Q}$; on devra toujours pouvoir raisonner avec $V(R)$ arbitrairement petit.

2. Exploitation des automorphismes du domaine $\mathcal{Q}$.

La méthode la plus couramment employée pour prolonger le domaine $\mathcal{Q}$ consiste à le couper par des ensembles analytiques tels que le théorème du disque s'applique; pratiquement, on peut même souvent définir explicitement un prolongement de toute fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ au moyen d'une intégrale de Cauchy.

Cependant, dans l'application de ces méthodes, on est souvent guidé par certaines particularités du domaine $\mathcal{Q}$, telles que l'existence de groupes d'automorphismes dépendant analytiquement de paramètres réels. Nous exploiterons ici systématiquement ces automorphismes par une autre méthode qui est essentiellement celle utilisée par BREMERMAN (9) pour démontrer le théorème du tube convexe.

Rappelons une propriété de continuité des fonctions sous-harmoniques de deux variables réelles (10): si $V(x, y)$ est sous-harmonique au voisinage d'un point M , alors pour toute courbe continue γ d'extrémité M , on a

(9) Cf. H. J. BREMERMAN [4].

(10) Cette propriété, démontrée indépendamment par K. OKA [19], résulte encore du fait qu'un continu n'est effilé en aucun de ses points dans R^n , pour $n = 2$ (Cf. [2] et [3]).

$$(1) \quad \lim_{P \rightarrow M; P \in \gamma} \sup V(P) = V(M) \quad .$$

On en déduit le "théorème de continuité" suivant ⁽⁹⁾, conséquence immédiate de la propriété rappelée.

Soit dans $\mathbb{C}_{n-1}$ un chemin continu $z = z(t)$ ($0 \leq t \leq 1$; $z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$) tracé dans un plan analytique Π à une dimension :

$$z(t) = a + bu(t) \quad ,$$

où $u(t)$ est continue dans $0 \leq t \leq 1$; $a, b \in \mathbb{C}_{n-1}$. On considère dans $\mathbb{C}_n$ un domaine $\mathcal{Q}$ qui, pour $0 < t \leq 1$ contient le disque

$$\{z = z(t) \in \mathbb{C}_{n-1} ; |z_n| < a\} \quad .$$

Alors, si $\mathcal{Q}$ contient de plus le point

$$M\{z = z(0) ; z_n = 0\} \quad ,$$

$\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ contient tout le disque

$$\{z = z(0) ; |z_n| < a\} \quad .$$

Soit en effet

$$\varphi(P) = -\log r(P) \quad ,$$

où $r(P)$ est la distance de P à la frontière de $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$, parallèlement au plan complexe des z_n ($z = 0$). Pour $P \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$, $\varphi(P)$ est une fonction plurisous-harmonique ⁽¹¹⁾ de P , et sa restriction au plan Π est sous-harmonique. Considérons alors dans Π la fonction sous-harmonique

$$\psi(P) = \sup(\varphi(P), -\log a) \quad .$$

⁽¹¹⁾ Cf. [14] et [15].

Sur le chemin $z = z(t)$ ($0 < t \leq 1$) on a

$$\psi(P) = -\log a \quad ,$$

et d'après (1)

$$\psi(M) = -\log a \geq \varphi(M) \quad .$$

D'où

$$r(M) \geq a \quad .$$

Cette propriété s'étend immédiatement au cas où le disque $|z_n| < a$ est remplacé par un domaine quelconque $\Omega(t)$ du plan des z_n ($0 < t \leq 1$). Soit $\Omega(0)$ le domaine limite de $\Omega(t)$; si Ω contient un point M quelconque appartenant à l'ensemble $\{z = z(0); z_n \in \Omega(0)\}$, alors $\mathcal{K}(\Omega)$ contient cet ensemble.

Nous utiliserons ce résultat pour démontrer le théorème suivant.

THÉOREME. - Soit dans $\mathbb{C}_n$ un groupe G de transformations $\mathcal{S}(u)$ définies par les fonctions analytiques $z' = z'(u, z)$ ($z, z' \in \mathbb{C}_n$); u est un paramètre complexe choisi de telle sorte que G soit additif et que $z = z'(0, z)$.

On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}_n$, invariant par le sous-groupe réel de G (u réel), et un sous-domaine $\Delta \subset \Omega$ simplement connexe possédant les propriétés :

i. Pour tout $z \in \Delta$, l'orbite $\omega(z) \equiv \{z' = z'(u, z)\}$ est une variété analytique à une dimension, telle que $\Omega \cap \omega(z)$ contienne les droites : $\text{Im } u = 0$ et $\text{Im } u = 1$.

ii. Il existe un point $z_0 \in \Delta$, tel que $\Omega \cap \omega(z_0)$ contienne la bande $0 \leq \text{Im } u \leq 1$.

Alors, pour tout $z \in \Delta$, $\mathcal{K}(\Omega) \cap \omega(z)$ contient la bande $0 \leq \text{Im } u \leq 1$.

Soit $z \in \Delta$; on peut toujours trouver dans Δ une chaîne finie d'ouverts

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{j=p} \Omega_j$$

tels que $z_0 \in \Omega_0$, $z \in \Omega_p$, $\Omega_j \cap \Omega_{j+1} \neq \emptyset$ et dans chaque Ω_j un système de

coordonnées locales telles que toute orbite $\omega(z)$ ($z \in \Omega_j$) soit parallèle à un plan de coordonnées complexes. Il existe alors dans Ω une ligne brisée γ d'extrémités z et z_0 , composée d'un nombre fini d'arcs et telle que chaque arc soit un segment linéaire réel dans un ouvert Ω_j .

Appelons $\gamma' \subset \gamma$ l'ensemble des points ζ de γ tels que $\mathcal{H}(\mathcal{Q}) \cap \omega(\zeta)$ contienne la bande $0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$. On va montrer que γ' est à la fois ouvert et fermé dans γ ; comme γ' contient au moins z_0 , il en résultera $\gamma' = \gamma$; alors en particulier le point z pris arbitrairement dans Δ vérifiera bien la propriété annoncée. Le fait que Δ soit simplement connexe assure que le prolongement ainsi obtenu n'est pas ramifié au-dessus de $\mathbb{C}_{\sim n}$.

Que γ' soit fermé résulte du théorème de continuité énoncé ci-dessus : soit $\bar{\zeta}$ un point frontière de γ' ; il appartient à un certain ouvert Ω_j dans lequel le théorème s'applique lorsqu'on tend vers $\bar{\zeta}$ sur le segment linéaire de γ' qui le contient; on agrandit ainsi la région d'analyticité autour du point $\bar{\zeta}$ (c'est-à-dire $u = 0$) dans l'orbite $\omega(\bar{\zeta})$. En transportant ce procédé de proche en proche par le groupe des transformations analytiques $\mathcal{S}(u)$ ($0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$), on obtient comme région d'analyticité toute la bande $0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$ dans la variété $\omega(\bar{\zeta})$, d'où : $\bar{\zeta} \in \gamma'$.

Que γ' soit ouvert résulte de l'invariance de $\mathcal{Q}$ par le groupe réel. Soit $\zeta \in \gamma'$; on peut toujours trouver un voisinage $\mathcal{V}(\zeta)$ tel que $\mathcal{S}(u) \mathcal{V}(\zeta) \in \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ pour tout $u = i\rho$; $0 \leq \rho \leq 1$. Utilisons maintenant l'invariance de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ par le groupe réel, laquelle résulte de celle de $\mathcal{Q}$, d'après un théorème de H. Cartan-P. Thullen⁽¹²⁾ : $\mathcal{S}(u) \mathcal{V}(\zeta) \in \mathcal{H}(\mathcal{Q})$ pour tout u tel que $0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$. Donc

$$\mathcal{V}(\zeta) \cap \gamma \subset \gamma' . \quad .$$

Remarque. - Pour prouver ce théorème au moyen du théorème du disque, on est obligé de "courber analytiquement" les orbites $\omega(z)$ de façon que les droites $\operatorname{Im} = 0$, $\operatorname{Im} u = 1$ soient remplacées par le bord d'un disque. D'autre part, si on veut définir directement le prolongement analytique de toute fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ par une intégrale de Cauchy :

$$F[z'(u, z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{u'=-\infty}^{u'=+\infty} \frac{F[z'(u', z)]}{u' - u} du' + \frac{1}{2\pi i} \int_{u'=-i-\infty}^{u'=i-\infty} \frac{F[z'(u', z)]}{u' - u} du',$$

⁽¹²⁾ Cf. H. CARTAN-P. THULLEN [6].

le problème de la convergence de ces intégrales se pose, en particulier : soit une fonction d'une variable u analytique dans $0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$, bornée à distance finie ; peut-on toujours trouver une fonction entière qui la majore en module dans cette bande ?

Application. - Soit $\Omega \subset \mathbb{C}_n$ un domaine du type défini dans I ; par exemple :

$$\Omega = \mathcal{C} \cup (-\mathcal{C}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{L})$$

où $\mathcal{C}$ est un tube $\{\operatorname{Im} z \in \mathcal{C}\}$, ($z = \{z_1, \dots, z_n\}$), $\mathcal{C}$ un cône convexe de $\mathbb{R}_n$ de sommet l'origine 0, $\mathcal{L}$ une demi-droite issue de 0 contenue dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{V}(\mathcal{L})$ un voisinage complexe arbitrairement petit de $\mathcal{L}$, que nous supposons invariant par toute homothétie $z' = \exp(-\pi u)z$, u réel.

Prenons pour $\underline{G}$ le groupe des homothéties complexes $z' = \exp(-\pi u)z$. Ω est manifestement invariant par le sous-groupe réel. De plus :

i. Pour tout $z \in \mathcal{C}$, l'orbite $\omega(z) = \{z' = \exp(-\pi u)z\}$ (u complexe) est une variété analytique régulière dont la section par Ω contient les droites $\operatorname{Im} u = 0$ et $\operatorname{Im} u = 1$.

ii. Pour tout $z = \lambda x \in \mathcal{C}$ tel que $x \in \mathcal{L}$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$, la section $\Omega \cap \omega(z)$ contient la bande $0 \leq \operatorname{Im} u \leq 1$.

Le théorème précédent s'applique donc ; l'enveloppe d'holomorphie $\mathcal{H}(\Omega)$ contient le domaine Ω' représenté paramétriquement par :

$$(2) \quad \Omega' \equiv \{z = s\zeta\}$$

où

$$\begin{cases} \zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \in \mathcal{C} \\ s \text{ est un nombre complexe tel que } \operatorname{Im} s < 0 \end{cases} .$$

On montrera dans la suite que $\mathcal{H}(\Omega) = \Omega'$.

Il est clair que la trace de Ω' sur les réels est le cône $\mathcal{C}$ (pour tout $z \in \mathcal{C}$, $s : \operatorname{Im} s < 0$, on a $\zeta = z/s \in \mathcal{C}$). $\mathcal{C}$ apparaît ainsi comme la région $\mathcal{R}$ naturelle associée au groupe des homothéties de centre 0.

Plus le tube $\mathcal{C}$ est riche en automorphismes, plus nombreuses sont les régions $\mathcal{R}$ pour lesquelles on sait agrandir le domaine Ω : dans le cas général, seule

l'invariance de $\mathcal{C}$ par les translations réelles peut être encore utilisée et donne la solution dans le cas où $\mathcal{R}$ est un cône translaté de $\mathcal{C}$, ce qui est trivial.

Dans le cas physique ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^+$), $\mathcal{C}$ est le produit topologique de n cônes V^+ . Les "inversions"

$$\vec{z}'_i = - \frac{\vec{e}_i + \vec{z}_i}{(\vec{e}_i + \vec{z}_i)^2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

où $\vec{e}_i$ est un quadrivecteur réel dans V^+ , sont des automorphismes des tubes $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$.

On peut alors considérer les groupes transformés du groupe d'homothétie par ces inversions. Ils permettent de traiter le cas où la région $\mathcal{R}$ naturelle est un "double cône" :

$$\gamma \left\{ \begin{array}{l} \vec{z}_i \in V^- \\ \vec{z}_i + \frac{\vec{e}_i}{\vec{e}_i^2} \in V^+ \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n \quad .$$

En fait, de même qu'il suffisait de partir d'une demi-droite $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ pour obtenir tout le cône $\mathcal{C}$ comme région réelle d'analyticité, de même il suffit de prendre pour $\mathcal{R}$ le segment

$$\vec{z}_i = - \rho \frac{\vec{e}_i}{\vec{e}_i^2} \quad (0 \leq \rho \leq 1) , \quad (1 \leq i \leq n) \quad ,$$

pour obtenir tout le "double cône" γ dans l'enveloppe d'holomorphicité.

Un autre groupe d'automorphismes de $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ est le groupe de Lorentz réel qui dépend de six paramètres. Des résultats analogues peuvent encore être obtenus : il existe une région $\mathcal{R}_\Lambda$ contenue dans la région $\mathcal{R}$ donnée par la physique, telle que $\mathcal{O} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathcal{R}_\Lambda)$ se prolonge à $\mathcal{O}' = \bigcup_{\Lambda_C \in \tilde{G}_\Lambda} \Lambda_C \mathcal{O}$, Λ_C étant une

transformation quelconque du groupe de Lorentz complexe $G_{\Lambda}^{(13)}$.

Si on considère la région R tout entière donnée par la physique, il n'existe malheureusement pas d'automorphisme adapté à elle, et on est alors réduit à faire l'union de domaines du type précédent pour tous les "doubles cônes" contenus dans R .

3. Critères de convexité complexe.

Soit Ω' le domaine obtenu en appliquant à Ω une méthode du type précédent ; quels critères permettent de se rendre compte si Ω' est un domaine naturel d'holomorphie, c'est-à-dire si $\Omega' = \mathcal{H}(\Omega)$.

En principe, il suffirait par exemple de constater que le domaine peut être décrit sous la forme $f(x, y) < 0$ où f est une fonction réelle plurisous-harmonique. Ce genre de méthode est parfois applicable lorsqu'on a affaire à des semi-tubes ou mieux à des tubes de base convexe. Si le domaine initial lui-même est un semi-tube défini par :

$$g(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) < y_n < f(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) ,$$

le problème de construction de l'enveloppe d'holomorphie revient à chercher la plus petite (resp. plus grande) fonction plurisous-harmonique (resp. plurisous-harmonique) majorant f (resp. minorant g) ; cette méthode peut quelquefois remplacer avantageusement la méthode des disques ; si on a un tube (f et g ne dépendent que de $y_1, \dots, y_{n-1}$) on a un simple problème d'enveloppe convexe.

Exemple ⁽¹⁴⁾ : dans le cas d'un espace-temps à deux dimensions

$$\begin{cases} u = x^{(0)} + x^{(1)} \\ v = x^{(0)} - x^{(1)} \end{cases} ,$$

⁽¹³⁾ On constate ainsi qu'il n'est pas nécessaire de se restreindre à la classe des fonctions invariantes de Lorentz pour obtenir un domaine d'analyticité invariant par le groupe de Lorentz complexe. Ce résultat a été établi par différentes méthodes, notamment par V. GLASER, R. JOST (non publié) et R. F. STRAETER [22].

⁽¹⁴⁾ Cf. BROS (J.) et GLASER (V.). - L'enveloppe d'holomorphie de deux polycercles (à paraître).

on se donne

$$\mathcal{Q} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathcal{R})$$

où

$$\mathcal{C}^+ = \{ \operatorname{Im} u_i > 0, \operatorname{Im} v_i > 0; 1 \leq i \leq n \}$$

$$\mathcal{C}^- = - \mathcal{C}^+$$

$$\mathcal{R} = \{ u_i, v_i \text{ réels} : 0 < u_i < 1, 0 < v_i < 1; 1 \leq i \leq n \} \quad .$$

Dans les variables $\log \frac{u_i - 1}{u_i}, \log \frac{v_i - 1}{v_i}$, $\mathcal{Q}$ est un tube (pour un voisinage $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ convenablement choisi).

Un critère équivalent de convexité complexe du domaine $\mathcal{Q}'$ est l'existence, pour tout point M de la frontière de $\mathcal{Q}'$, d'un ensemble analytique $\mathcal{A}(M)$ de dimension $n - 1$, passant par M et tel que dans un certain voisinage $\mathcal{V}(M)$:

$$\mathcal{Q}' \cap \mathcal{A}(M) \cap \mathcal{V}(M) = \emptyset \quad .$$

Le domaine $\mathcal{Q}'$ obtenu dans la section précédente (cf. 2, équation (2)) nous offre précisément un exemple de domaine naturel tel qu'en chaque point de la frontière passe un plan analytique à coefficients réels (de dimension $n - 1$), ne traversant pas $\mathcal{Q}'$. Ce domaine a une représentation géométrique très simple.

Représentons dans $\mathbb{R}_n$ tout point complexe $z \in \mathbb{C}_n$ par un vecteur lié réel $v(z)$ d'origine $\operatorname{Re} z$, équipollent à $\operatorname{Im} z$; le support de $v(z)$ n'est autre que la droite réelle passant par z (et $\bar{z}$). Le domaine $\mathcal{Q}'$ peut alors être décrit comme l'ensemble des points z tels que :

$$\text{Si } \operatorname{Im} z = 0, \quad z \in \mathcal{Q}$$

$$\text{Si } \operatorname{Im} z \neq 0, \text{ le support de } v(z) \text{ coupe le cône } \mathcal{C} \quad .$$

Démonstration.

$$\mathcal{Q}' \equiv \{ z = s\zeta \} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \operatorname{Im} \zeta \in \mathcal{C} \\ \operatorname{Im} s < 0 \end{cases} \quad .$$

Pour tout ζ , z appartient au plan réel à deux dimensions défini par l'origine O et le vecteur lié $v(\zeta)$; comme $\text{Im } \zeta \in C$, ce plan coupe le cône convexe C suivant deux demi-droites réelles que l'on prend comme axes Oz_1 , Oz_2 . La trace de $\mathcal{O}'$ dans un tel plan est

$$\begin{cases} z_1 = s\zeta_1 & \text{Im } \zeta_1 > 0 \\ z_2 = s\zeta_2 & \text{Im } \zeta_2 > 0 \end{cases} \quad \text{Im } s < 0 \quad .$$

Il est clair que si z est réel, alors $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, soit $z \in C$. Si z n'est pas réel, le segment joignant z_1 à z_2 dans le plan complexe ne coupe pas l'axe réel négatif ; donc on ne peut avoir $az_1 + bz_2 + c = 0$, avec a, b, c réels et de même signe ; la droite réelle, support de $v(z)$, contenant le point z coupe donc nécessairement le cône C . La réciproque est immédiate.

La frontière de $\mathcal{O}'$ est constituée de tous les points (réels ou complexes) des droites réelles tangentes à C . Or par un tel point on peut toujours mener un plan d'appui réel au cône C ; c'est un ensemble analytique de dimension $n - 1$ qui ne traverse pas $\mathcal{O}'$. Ainsi

$$\mathcal{O}' = \mathcal{K}(\mathcal{O}) \quad .$$

Extension au cas où $\mathcal{R}$ est une union de cônes translatés de C , soit :

$$\mathcal{R} = \bigcup_a C(a)$$

$$\text{où } C(a) = \{z \in a + C\}$$

$$a \in \Lambda \subset \mathbb{R}_n \quad (\Lambda \text{ est un domaine quelconque}) \quad .$$

On montre d'abord aisément par le théorème du tube que la région réelle d'analyticité après prolongement est l'enveloppe convexe $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$. (En effet, chaque domaine élémentaire $\mathcal{O}'(a)$ contient le tube de base réelle $C(a)$.)

Les points d'analyticité z non réels sont tels que le support de $v(z)$ coupe $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. A cause de la convexité de $\mathcal{E}(\mathcal{R})$, ce domaine est encore une enveloppe de plans réels ; on a bien obtenu $\mathcal{K}(\mathcal{O})$.

Dans le cas des tubes "physiques" $\mathcal{C}^+ = \{\vec{y}_1 \in V^+, \dots, \vec{y}_n \in V^+\}$ et $\mathcal{C}^- = -\mathcal{C}^+$, on obtient par inversion l'enveloppe d'holomorphie pour une région $\mathcal{R}$, union de "doubles cônes" ayant un sommet commun. On a alors la "convexité" de la région d'analyticité réelle (prolongement de $\mathcal{R}$) par rapport à des surfaces "inverses" de plans :

$$(3) \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\vec{a}_i - \vec{z}_i}{\vec{z}_i^2} + b = 0, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{a}_i \in V^+ \\ b > 0 \end{cases} .$$

Dans le cas de régions $\mathcal{R}$ plus générales comme celle donnée par la physique, on ne sait pas si l'union des domaines relatifs à tous les doubles cônes contenus dans $\mathcal{R}$ donne l'enveloppe d'holomorphie ⁽¹⁵⁾. Là encore le problème est de trouver, si possible, une famille appropriée d'ensembles analytiques de dimension $n-1$, la famille (3) ne convenant plus dès que $n \geq 2$.

4. Application de théorèmes globaux de décomposition.

Supposons que $\mathcal{O}$ soit de la forme $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. Alors on a

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O}_2) .$$

Si toutefois on trouve

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) = \mathcal{H}(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O}_2)$$

par une méthode quelconque de continuité, il semble qu'une raison plus profonde de cette particularité doive exister. Un cas simple où cette propriété a lieu est celui où $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ est un domaine d'holomorphie ; en effet, on sait que le problème de Cousin généralisé est alors résoluble, c'est-à-dire : toute fonction F analytique dans $\mathcal{O}$ est décomposable suivant $F = F_1 - F_2$, où F_1 et F_2 sont respectivement analytiques dans $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$.

⁽¹⁵⁾ Sauf dans le cas d'une seule variable d'espace-temps : $\mathcal{C}^+ = \{y_1 \in V^+\}$; l'union donne bien $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ dans ce cas.

Exemple dans G_2 (cf. figure 1). - Soient les tubes :

$$\mathcal{C} = \{y_2 < 0 ; \varepsilon_1 y_1 + y_2 > 0\}$$

$$\mathcal{C}' = \{y_1 < 0 ; y_1 + \varepsilon_2 y_2 > 0\}$$

où $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$, et $\mathcal{R}$ un domaine réel dont $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ est un voisinage complexe.

Le domaine initial est :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \cup (\mathcal{V}(\mathcal{R}) \cap \tilde{\mathcal{C}})$$

où $\tilde{\mathcal{C}}$ est le tube $\{\varepsilon_1 y_1 + y_2 > 0 ; y_1 + \varepsilon_2 y_2 > 0\}$, enveloppe convexe de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Alors si $\mathcal{R}$ est une région naturelle pour le problème des tubes

$$\mathcal{C}^+ = \{y_1 > 0, y_2 < 0\} \text{ et } \mathcal{C}^- = -\mathcal{C}^+,$$

on a

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \mathcal{K}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathcal{R})) \cap \tilde{\mathcal{C}}.$$

On peut traiter des cas beaucoup plus généraux en s'inspirant d'une démonstration donnée par MALGRANGE de l'énoncé suivant ⁽¹⁶⁾ :

Soient deux fonctions : l'une $f_1(z_1, z_2)$, C_∞ en (z_1, z_2) pour x_2 réel, $y_1 \geq 0$, analytique en z_1 pour $y_1 > 0$; l'autre $f_2(x_1, z_2)$, C_∞ en (x_1, z_2) pour x_1 réel, $y_2 \geq 0$, analytique en z_2 pour $y_2 > 0$.

Pour tout (x_1, x_2) réel, on suppose que $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$. Alors, il existe une fonction $F(z_1, z_2)$, C_∞ pour $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ analytique pour $\{y_1 > 0, y_2 > 0\}$ qui prolonge f_1 et f_2 .

L'outil fondamental de la démonstration est le théorème de décomposition, valable pour des fonctions à valeurs dans un espace de Fréchet. Si $f(x)$ est C_∞ sur la droite réelle, on peut toujours trouver deux fonctions $f^+(z)$ et $f^-(z)$,

⁽¹⁶⁾ C'est un raffinement du théorème du tube.

respectivement C_∞ pour $y \geq 0$ et $y \leq 0$, et analytiques pour $y > 0$ et $y < 0$, et telles que leurs valeurs au bord vérifient

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad .$$

Nous esquisserons la démonstration (faite par H. EPSTEIN) dans le cas où $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$ seulement sur un carré $R = \{|x_1| < 1, |x_2| < 1\}$; on va voir que f_1 et f_2 sont alors les valeurs au bord d'une fonction $F(z_1, z_2)$ analytique dans ⁽¹⁷⁾

$$\mathcal{K}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(R)) \cap \{y_1 > 0; y_2 > 0\} \quad .$$

où :

$$\mathcal{C}^+ = \{y_1 > 0; y_2 < 0\}$$

$$\mathcal{C}^- = \{y_1 < 0; y_2 > 0\} \quad .$$

En vertu du théorème de décomposition cité précédemment, il existe deux fonctions $g^+(z_1, z_2)$ analytique dans $\{y_1 > 0; y_2 > 0\}$ et $g^-(z_1, z_2)$ analytique dans $\{y_1 > 0; y_2 < 0\}$, C_∞ au bord telles que

$$f_1(z_1, z_2) = g^+(z_1, z_2) - g^-(z_1, z_2) \quad .$$

Considérons alors $g^-(x_1, z_2)$; comme

$$g^-(x_1, x_2) = g^+ - f_2(x_1, x_2) \quad \text{pour } \{|x_1| < 1, |x_2| < 1\},$$

elle se prolonge suivant

$$\widetilde{g}^-(x_1, z_2) = g^+ - f_2, \quad \text{pour } |x_1| < 1, y_2 > 0 \quad .$$

⁽¹⁷⁾ C'est un raffinement de l'exemple ci-dessus, obtenu lorsque ε_1 et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Maintenant, on peut toujours prolonger

$$\tilde{g}^-(x_1, z_2) \text{ à } \{x_1 \text{ réel quelconque ; } y_2 \in \mathbb{C}\} \quad ,$$

$\mathbb{C}$ étant le plan complexe privé des coupures $|x_2| > 1$ (c'est le prolongement C_∞ d'une fonction C_∞ de x_1 à valeurs dans un Fréchet, hors de l'intervalle $|x_1| < 1$).

Décomposons de même

$$\tilde{g}^-(x_1, z_2) = h^+(x_1, z_2) - h^-(x_1, z_2)$$

où

$$h^+(z_1, z_2) \text{ est analytique dans } \{y_1 > 0 ; y_2 \in \mathbb{C}\} \quad ,$$

$$h^-(z_1, z_2) \text{ est analytique dans } \{y_1 < 0 ; y_2 \in \mathbb{C}\} \quad ,$$

(elles sont C_∞ au bord).

Comme $\tilde{g}^-(x_1, z_2)$ est, pour $|x_1| < 1$, la valeur au bord de $g^-(z_1, z_2)$, $h^-(z_1, z_2)$ est prolongeable suivant $\tilde{h}^-(z_1, z_2) = h^+ + g^-$ dans $\{y_1 > 0, y_2 < 0\}$.

En particulier, $\tilde{h}^-(z_1, z_2)$ est analytique dans

$$\{y_1 > 0, y_2 < 0\} \cup \{y_1 < 0, y_2 > 0\}$$

et ses valeurs au bord dans ces deux tubes coïncident pour $\{|x_1| < 1 ; |x_2| < 1\}$. Donc $\tilde{h}^-(z_1, z_2)$ est prolongeable dans $\mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathcal{R}))$. Par suite la fonction $(g^+ - h^+ + \tilde{h}^-)(z_1, z_2)$ qui prolonge f_1 et f_2 est bien analytique dans

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathcal{R})) \cap \{y_1 > 0 ; y_2 > 0\} \quad .$$

Cette démonstration se généralise au cas de n variables et permet ainsi de traiter des cas où le domaine $\mathcal{Q}$ comprend deux tubes non opposés.

Exemple. - $\mathcal{Q} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}'^- \cup \mathbb{W}(\mathcal{R})$ où

$$\mathcal{C}^+ \equiv \{\vec{y}_1 \in V^+, \dots, \vec{y}_n \in V^+\}$$

$$\mathcal{C}'^- \equiv \{\vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_n \in V^+, \vec{y}_2 \in V^-, \dots, \vec{y}_n \in V^-\} \quad .$$

$\mathcal{R}$ est une région réelle invariante par les translations ⁽¹⁸⁾ parallèles à $\vec{Ox}_1$, et sa base dans les variables $(\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ est un double cône

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_i \in \{\vec{e}_i + V^+\} \cap \{\vec{e}_i' + V^-\} ; \quad 2 \leq i \leq n \\ \text{où } \vec{e}_i' - \vec{e}_i \in V^+ \end{array} \right\} \quad .$$

$\mathbb{W}(\mathcal{R})$ est l'intersection d'un voisinage complexe $\mathbb{V}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ avec l'enveloppe convexe $\mathcal{E}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}'^-)$.

On peut alors montrer par application du théorème précédent que :

$$\mathbb{K}(\mathcal{Q}) = \mathbb{K}[\mathcal{C} \cup (-\mathcal{C}) \cup \mathbb{V}(\mathcal{R})] \cap \mathcal{E}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}'^-)$$

où $\mathcal{C}$ représente le tube $\{\vec{y}_2 \in V^+, \dots, \vec{y}_n \in V^+\}$.

5. Utilisation de variables surabondantes.

Nous n'avons pu jusqu'à présent obtenir de résultats simples par ce genre de méthode, et nous nous contenterons donc de poser quelques questions.

Soit $\mathcal{Q}$ le domaine initial défini dans une variété analytique complexe $\mathcal{V}$ à n dimensions, et supposons que l'on plonge analytiquement $\mathcal{V}$ dans un espace $\mathbb{C}_{\tilde{m}}$; $m > n$. On peut considérer $\mathcal{Q}$ soit comme la projection sur $\mathcal{V}$, soit comme l'intersection avec $\mathcal{V}$ d'un domaine $\Delta \subset \mathbb{C}_{\tilde{m}}$. Supposons que l'on sache construire $\mathbb{K}(\Delta)$; peut-on dans certains cas en tirer des renseignements intéressants sur $\mathbb{K}(\mathcal{Q})$?

⁽¹⁸⁾ Cette invariance est effectivement réalisée pour la région $\mathcal{R}$ donnée par la physique : en considérant celle-ci comme union de doubles cônes, on peut donc en principe calculer un agrandissement du domaine.

En ce qui concerne la projection sur $\mathcal{V}$ (parallèlement à des coordonnées analytiques), on ignore si la pseudo-convexité (locale) est conservée par projection, en dehors du cas trivial où le "contour apparent" est tracé sur une variété analytique. S'il y a conservation de la pseudo-convexité, cette méthode pourrait alors présenter de l'intérêt pour le calcul de $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$.

Considérons par exemple le problème qui nous occupe : Soient p tubes

$$\mathcal{C}_j = \{ \text{Im } z \in C_j \} \subset \mathbb{C}_n$$

où C_j est un cône convexe ($1 \leq j \leq p$), et soit $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ un voisinage complexe d'une région réelle $\mathcal{R}$. Construire

$$\mathcal{H}\left(\bigcup_{j=1}^{j=p} \mathcal{C}_j \cup \mathcal{V}(\mathcal{R})\right) \quad .$$

Considérons alors p fonctions $f_j(z)$ ($1 \leq j \leq p$) respectivement analytiques dans les tubes $\mathcal{C}_j$ et telles que leurs valeurs au bord coïncident dans $\mathcal{R}$.

Prenons sur la frontière de chaque tube $\mathcal{C}_j$ un système surabondant de vecteurs $\vec{e}_j^{(r)}$. On a ainsi (de façon non unique)

$$z = \sum_{j(r)} z_j^{(r)} \vec{e}_j^{(r)} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}_n \quad .$$

Chaque fonction $f_j(z)$ définit alors une fonction $g_j(z_1^{(r)} \dots z_n^{(r)})$ analytique en particulier dans

$$\{ \text{Im } z_j^{(r)} > 0, \quad \text{Im } z_{j'}^{(r)} = 0; \quad j' \neq j \} \quad .$$

De plus les bords de ces fonctions g_j coïncident sur une région réelle $\mathcal{R}'$ dont la projection dans l'espace initial est $\mathcal{R}$. On a alors un problème que l'on sait résoudre dans ces variables auxiliaires (du moins pour certaines régions $\mathcal{R}'$) ; il est du type étudié dans la section 4. Si on augmente indéfiniment le nombre des $\vec{e}_j^{(r)}$ de façon à approcher les tubes $\mathcal{C}_j$ arbitrairement près, peut-on en déduire des informations sur l'enveloppe d'holomorphie cherchée ?

En ce qui concerne la deuxième possibilité, considérer $\mathcal{Q}$ comme l'intersection avec $\mathcal{V}$ d'un domaine $\Delta \subset \mathbb{C}_m$, aucune application n'a été faite jusqu'à présent.

Le seul théorème que l'on connaisse à ce sujet est celui-ci, dû à H. CARTAN :

Si Δ est un domaine d'holomorphie dans $\mathbb{C}_m$ coupé par une variété analytique à $m-1$ dimensions $\mathcal{V}$ suivant $\mathcal{Q}$, alors toute fonction analytique dans $\mathcal{Q}$ est prolongeable dans Δ .

Seule une extension de ce théorème à des cas où Δ n'est pas un domaine d'holomorphie pourrait être utile, de notre point de vue.

FIGURES

Les domaines sont représentés par leurs traces dans les parties imaginaires, lorsque la partie réelle M est fixée. Les figures (a) et (c) correspondent au cas où $M \in \mathbb{R}$; la trace de $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ est alors un voisinage $\mathcal{V}(M)$. Les courbes δ représentent la frontière du domaine naturel $\mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathbb{R}))$.

On définit le domaine $\mathcal{Q}_1$ comme la partie hachurée dans les figures (a) et (b) :

$$(a) \quad M \in \mathbb{R} \quad ;$$

$$(b) \quad M \notin \mathbb{R} \quad .$$

De même $\mathcal{Q}_2$ est défini par la partie hachurée dans les figures (c) et (d) :

$$(c) \quad M \in \mathbb{R} \quad ;$$

$$(d) \quad M \notin \mathbb{R} \quad .$$

Il est clair que :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 = \mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathbb{R})) \\ \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} \end{array} \right.$$

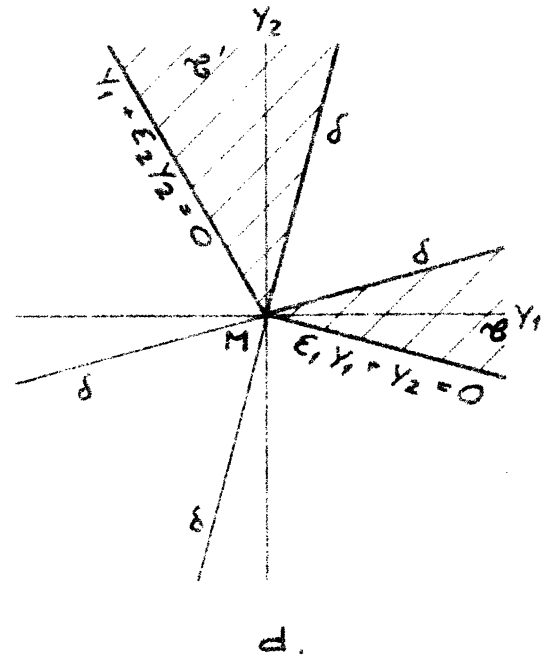
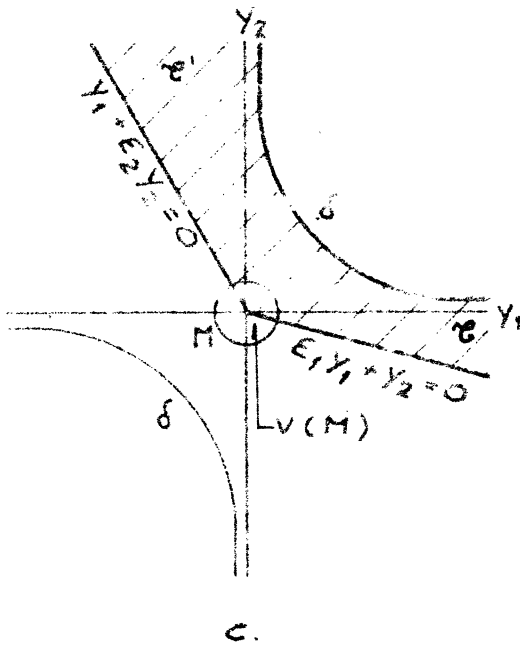
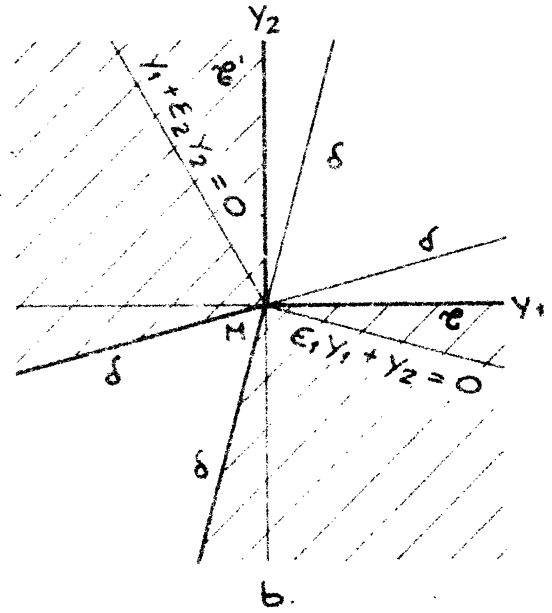
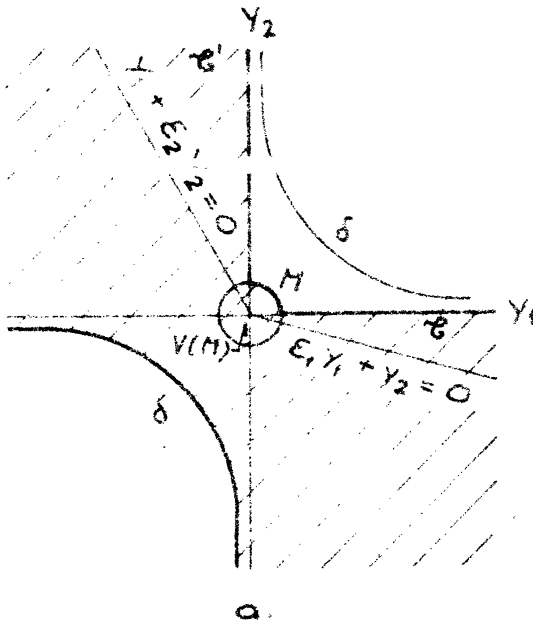
$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{H}(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathbb{R})) \\ \mathcal{H}(\mathcal{Q}_2) = \mathcal{Q}_2 \end{array} \right. \quad .$$

D'où

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2) = \mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathbb{R})) \cap \mathcal{Q}_2 \quad ;$$

soit

$$\mathcal{H}(\mathcal{Q}) = \mathcal{H}(\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{V}(\mathbb{R})) \cap \tilde{\mathcal{C}} \quad .$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOGOLJUBOV (N. N.) and SHIRKOV (D. V.). - Introduction to the theory of quantized fields. - New York, London, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Monographs in Physics and Astronomy, 3).
- [2] BRELOT (Marcel). - Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, J. Math. pures et appl., t. 19, 1940, p. 319-337.
- [3] BRELOT (Marcel). - Sur les ensembles effilés, Bull. Sc. math., 2e série, t. 68, 1944, 1re partie, p. 12-36.
- [4] BREMERMAN (Hans J.). - Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen, Schrift. Math. Inst. Univ. Münster, 1951, n° 5, 92 p.
- [5] BREMERMAN (H. J.), DEHME (R.) and TAYLOR (J. G.). - Proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys. Rev., t. 109, 1958, p. 2178-2190.
- [6] CARTAN (H.) und THULIEN (P.). - Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen : Regularitäts und Konvergenzbereiche, Math. Annalen, t. 106, 1932, p. 617-647.
- [7] DYSON (Freeman J.). - Connection between local commutativity and regularity of Wightman functions, Phys. Rev., t. 110, 1958, p. 579-581.
- [8] EPSTEIN (H.). - Generalization of the "edge of the wedge" theorem, J. math. Phys., t. 1, 1960, p. 524-531.
- [9] GLASER (V.), IEHMANN (H.) and ZIMMERMANN (W.). - Field operators and retarded functions, Nuovo Cimento, t. 6, 1957, p. 1122-1128.
- [10] HALL (D.) and WIGHTMAN (A. S.). - A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., t. 31, 1957, n° 5.
- [11] IEHMANN (H.), SYMANZIK (K.) und ZIMMERMANN (W.). - Zur Formulierung quantisierten Feldtheorien, Nuovo Cimento, t. 1, 1955, p. 205-225.
- [12] IEHMANN (H.), SYMANZIK (K.) and ZIMMERMANN (W.). - On the formulation of quantized field theories, Nuovo Cimento, t. 6, 1957, p. 319-335.
- [13] KÄLLEN (G.) and WIGHTMAN (A. S.). - The analytic properties of the vacuum expectation value of a product of three scalar local fields, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., t. 1, 1958, n° 6, 58 p.
- [14] LELONG (Pierre). - Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. Cours professé à Saclay en 1960 (multigraphié).
- [15] LELONG (Pierre). - Les fonctions plurisous-harmoniques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 62, 1945, p. 301-338.
- [16] LELONG (Pierre). - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisous-harmoniques, J. Math. pures et appl., t. 36, 1957, p. 263-303.
- [17] LELONG (Pierre). - Fonctions plurisous-harmoniques et fonctions analytiques réelles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 515-562.
- [18] LIONS (Jean-Louis). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math., t. 2, 1952/53, p. 369-380.
- [19] OKA (K.). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, II : Domaines d'holomorphie, J. Sc. Hiroshima Univ., Series A, t. 7, 1937, p. 115-130.

- [20] SCHWARTZ (Laurent). - Transformations de Laplace des distributions, Comm. Sém. math. Univ. Lund, Tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz, 1952, p. 196-206.
 - [21] SCHWEBER (Silvan S.). - An introduction to relativistic quantum field theory. - Evanston (Ill.), Elmsford (N. Y.), Row, Peterson and Co, 1961.
 - [22] STREATER (R. F.). - Analytic properties of products of field operators (à paraître).
 - [23] WIGHTMAN (A. S.). - Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev., t. 101, 1956, p. 860-866.
 - [24] WIGHTMAN (A. S.). - Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs (Conférences faites à la Sorbonne en 1957).
 - [25] WIGHTMAN (A. S.). - Quelques problèmes mathématiques de la théorie quantique relativiste, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs [75. 1957. Lille] ; p. 1-36. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1959.
-