SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

FRANÇOIS NORGUET

Problème de Levi

Séminaire Lelong. Analyse, tome 4 (1962), exp. n° 6, p. 1-38
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962__4__A3_0>

PROBLÈME DE LEVI

par François NORGUET

Un mémoire récent [20] et un travail encore inédit [21] de R. NARASIMHAN généralisent les résultats de GRAUERT [9] concernant le problème de Levi, tandis que la méthode de GRAUERT [9] est perfectionnée par ANDREOTTI et GRAUERT dans un travail inédit [1] dont les résultats ont été annoncés par GRAUERT [10] au Colloque de Topologie de Lille, puis exposés au Séminaire Bourbaki [25].

Pour les domaines de $\underset{\sim}{C}^n$, toutes les espèces de convexité introduites dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes coïncident, et les domaines convexes sont les domaines d'holomorphie ; ceci est prouvé dans [5], [26], [17], [3], [22]. Ces notions, étendues aux espaces analytiques complexes, donnent naissance à des problèmes partiellement résolus, que l'on énonce ici dans le cadre de la classification des espaces analytiques complexes non compacts, avant de formuler de manière très générale la méthode d'ANDREOTTI et GRAUERT et d'exposer de façon succincte la démonstration des théorèmes de Narasimhan.

I. La classification des espaces analytiques complexes et le problème de Levi.

Les espaces analytiques complexes considérés sont supposés irréductibles, bien que cette restriction ne soit pas constamment nécessaire. Pour tout espace analytique complexe X , on désigne par $I(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur X .

1. Espaces de Stein (ou holomorphiquement complets).

DÉFINITION 1. - Un espace analytique complexe X , de dimension complexe n , est dit :

i. K-complet si, pour tout $x \in X$, il existe une application holomorphe φ de X dans $\underset{\sim}{C}^n$, non dégénérée au point x (c'est-à-dire telle que le point x

soit isolé dans $\varphi^{-1}(\varphi(x))$) ;

ii. holomorphiquement séparable si, pour tous $x \in X$ et $y \in X$ vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction f holomorphe dans X , vérifiant $f(x) \neq f(y)$;

iii. étalable s'il existe une application holomorphe de X dans $\mathbb{C}^n$, en tout point de X non dégénérée.

THÉORÈME 1. - Pour tout espace analytique complexe X , on a :

$$\begin{array}{ccc}
X \text{ est holomorphiquement séparable} & & \\
\Downarrow & & \\
X \text{ est } K\text{-complet} & \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} & X \text{ est étalable} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{tout sous-ensemble analytique compact de } X \text{ est fini} & & X \text{ est réunion dénombrable de compacts}
\end{array}$$
.

DÉFINITION 2. - Pour tout compact K d'un espace analytique complexe X , on appelle enveloppe holomorphiquement convexe de K dans X l'ensemble des points x de X tels que l'on ait

$$|f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|$$

pour toute fonction f holomorphe dans X . Un espace analytique complexe X est dit holomorphiquement convexe si l'enveloppe holomorphiquement convexe de tout compact de X dans X est compacte.

THÉORÈME 2. - Pour tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe X , on a :

$$\begin{array}{ccc}
X \text{ est holomorphiquement séparable} & \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} & X \text{ est } K\text{-complet} \\
& & \Updownarrow \\
& \text{tout sous-ensemble analytique compact de } X & \text{est fini}
\end{array}$$
.

L'équivalence (1) du théorème 1 est due à GRAUERT [8] ; l'équivalence (2) du théorème 2 a été établie dans un cas particulier par OKA [27], dans le cas général par GRAUERT [8].

DÉFINITION 3. - On appelle espace de Stein (ou espace analytique complexe holomorphiquement complet) tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe vérifiant l'une des trois conditions dont le théorème 2 exprime l'équivalence.

THÉORÈME 3. - Pour tout point x d'un espace de Stein X, il existe un nombre entier positif n, une application holomorphe φ de X dans $\underset{\sim}{C}^n$ et un voisinage U de x tels que la restriction de φ à U soit une application biholomorphe de U sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert G de $\underset{\sim}{C}^n$ (muni de la structure d'espace analytique complexe induite par celle de G).

DÉFINITION 4. - On dit qu'un espace analytique complexe X vérifie :

i. le théorème A si, pour tout faisceau analytique F cohérent sur X et pour tout $x \in X$, $H^0(X, F)$ engendre F_x (comme module sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point x) ;

ii. le théorème B si l'on a $H^p(X, F) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent F sur X et tout nombre entier $p \geqslant 1$.

THÉORÈME 4 (CARTAN et SERRE [33], n° 18, 19 et 20). - Pour tout espace analytique complexe X, on a :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\text{X est un espace de Stein} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{X vérifie les théorèmes A et B} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \begin{array}{c}\text{on a } H^1(X, I) = 0 \text{ pour tout faisceau } I \text{ d'idéaux de germes} \\ \text{de fonctions holomorphes, cohérent sur } X \text{ et à support discret.}\end{array} \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

2. Espaces holomorphiquement convexes.

THÉORÈME 5 (REMMERT [28], CARTAN [4]). - Pour tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe X, il existe une application holomorphe π de X sur un espace de Stein Y, induisant un isomorphisme des anneaux $I(X)$ et $I(Y)$; X détermine le couple (π, Y) à un biholomorphisme près ; Y est le quotient de X par la relation d'équivalence : x est équivalent à y si et seulement si l'on a $f(x) = f(y)$ pour toute fonction f holomorphe dans X ; les fibres de l'application π sont des sous-ensembles analytiques connexes de X.

COROLLAIRE 1. - Tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe est réunion dénombrable de compacts.

DÉFINITION 5. - Un espace analytique complexe X est dit projectivement complet s'il est holomorphiquement convexe et si, pour tout $x \in X$, il existe une application holomorphe de X dans $\underset{\sim}{P}_n(\underset{\sim}{C})$, non dégénérée au point x.

Remarque 1. - Tout espace analytique complexe compact est holomorphiquement convexe ; tout espace de Stein (resp. tout espace algébrique projectif) est projectivement complet.

THÉORÈME 6 (GRAUERT et REMMERT [12]). - Soit π une application holomorphe et propre d'un espace analytique complexe projectivement complet X sur un espace de Stein Y, et soit F un faisceau analytique cohérent sur X ; pour tout nombre entier $p \geqslant 0$, $H^p(X, F)$ est un module de rang fini sur $I(Y)$, nul, sauf pour un ensemble fini de valeurs de p ; si l'on pose

$$\chi(X, F) = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p \operatorname{rang}_{I(Y)} H^p(X, F) \quad ,$$

il existe un sous-ensemble analytique A de Y, différent de Y, tel que l'on ait

$$\chi(X, F) = \chi(\pi^{-1}(y), F) = \sum_{p \geqslant 0} (-1)^p \dim_{\underset{\sim}{C}} H^p(\pi^{-1}(y), F)$$

pour $y \in Y - A$.

Remarque 2. - Si F est le faisceau des germes de sections holomorphes d'un espace fibré vectoriel holomorphe sur X, et s'il existe un sous-ensemble analytique B de Y, différent de Y, tel que $\pi^{-1}(y)$ soit un espace algébrique projectif pour $y \in Y - B$, $\chi(X, F)$ peut être exprimée par les polynômes de Todd grâce à la formule de Riemann-Roch démontrée par HIRZEBRUCH.

Remarque 3. - Tout espace holomorphiquement convexe X a un plus grand quotient (déterminé à un biholomorphisme près) projectivement complet Y, qui a lui-même un plus grand quotient holomorphiquement complet Z ; les fibres de l'application canonique de Y sur Z sont des espaces algébriques projectifs.

DÉFINITION 6. - Une application φ d'un espace analytique complexe X sur un espace analytique complexe Y est appelée modification propre de Y aux points d'un sous-ensemble analytique A de Y, de codimension $\geqslant 1$, si φ est holomorphe et propre, et si la restriction de φ à $X - \varphi^{-1}(A)$ est une application biholomorphe sur $Y - A$.

DÉFINITION 7. - Nous dirons qu'un espace analytique complexe est de type fini s'il est holomorphiquement convexe et obtenu par modification propre d'un espace de Stein en un nombre fini de points.

THÉORÈME 7 (NARASIMHAN [21]). - Soit X un espace analytique complexe de type fini, et soit A le sous-ensemble analytique compact maximal de dimension > 0 de X ; pour tout nombre entier $p \geqslant 1$ et tout faisceau analytique cohérent F sur X, on a $\dim_{\mathbb{C}} H^p(X, F) < +\infty$ et l'application $H^p(X, F) \to H^p(X, A)$ induite par l'inclusion de A dans X est bijective. Réciproquement, si l'on a $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, I) < +\infty$ pour tout faisceau I d'idéaux de germes de fonctions holomorphes, cohérent sur un espace analytique complexe X et à support discret, cet espace est de type fini (éventuellement compact).

La démonstration de la première partie de ce théorème utilise en particulier la finitude de $\dim_{\mathbb{C}} H^p(X, F)$ pour tout nombre entier $p \geqslant 0$ et tout faisceau analytique cohérent sur un espace analytique complexe compact X.

3. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions pseudoconvexes.

DÉFINITION 8. - Une fonction à valeurs réelles φ, définie sur un espace analytique complexe X, est dite indéfiniment (resp. n fois) différentiable si, pour tout $x \in X$, existent un nombre entier n, une application biholomorphe τ d'un voisinage U de x sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert D de $\mathbb{C}^n$, et une fonction ψ indéfiniment (resp. n fois) différentiable dans D, tels que l'on ait $\varphi | U = \psi \circ \tau$.

DÉFINITION 9. - Une fonction φ, définie sur un espace analytique X, est dite plurisousharmonique (en abrégé : psh) si :

i. les valeurs de φ sont des nombres réels ou $-\infty$, mais φ n'est pas constamment égale à $-\infty$;

ii. φ est semi-continue supérieurement ;

iii. pour toute application holomorphe τ d'un domaine D de $\underset{\sim}{C}^1$ dans X, $\varphi \circ \tau$ est une fonction sousharmonique dans D ou la constante $-\infty$.

DÉFINITION 10. - Une fonction φ, définie sur un espace analytique complexe X, est dite <u>fortement plurisousharmonique</u> si, pour toute fonction ρ à valeurs réelles indéfiniment différentiable et à support compact dans X, il existe un nombre réel $h > 0$ tel que la fonction $\varphi + \varepsilon\rho$ soit plurisousharmonique pour $-h < \varepsilon < + h$.

DÉFINITION 11. - Une fonction φ, définie sur un espace analytique complexe X de dimension complexe n, sera dite <u>q-plurisousharmonique</u> (resp. <u>fortement q-plurisousharmonique</u>) si, pour tout $x \in X$, il existe une application biholomorphe τ d'un domaine D de $\underset{\sim}{C}^{n-q+1}$ dans X, telle que l'on ait $x \in \tau(D)$ et que $\varphi \circ \tau$ soit plurisousharmonique (resp. fortement plurisousharmonique) dans D.

<u>Remarque</u> 4. - La notion de fonction q-plurisousharmonique sur un espace analytique complexe de dimension complexe n est définie pour $1 \leqslant q \leqslant n + 1$; les fonctions 1-plurisousharmoniques sont les fonctions plurisousharmoniques ; toute fonction est $(n + 1)$-plurisousharmonique ; pour $1 \leqslant q \leqslant n$, toute fonction q-plurisousharmonique est aussi $(q + 1)$-plurisousharmonique ; pour $q > n + 1$, nous conviendrons de dire que toute fonction est q-plurisousharmonique ; ces remarques restent valables pour les fonctions fortement q-plurisousharmoniques.

<u>Remarque</u> 5. - Soit φ une fonction q-psh (resp. fortement q-psh) sur un espace analytique complexe X, et soit τ une application biholomorphe d'un espace analytique complexe Y sur un sous-ensemble analytique de X ; alors $\varphi \circ \tau$ est une fonction q-psh (resp. fortement q-psh) dans Y.

<u>Remarque</u> 6. - Une fonction q-psh φ, admettant un maximum relatif en un point d'un espace analytique complexe X de dimension $n \geqslant q$, est constante dans X ; une fonction fortement q-psh sur X ne peut donc avoir de maximum relatif dans X.

<u>Remarque</u> 7. - Pour qu'une fonction φ à valeurs réelles, deux fois différentiable dans un domaine D de $\underset{\sim}{C}^n$, soit q-psh (resp. fortement q-psh), il faut et il suffit que la forme

$$L(\varphi) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\, dz_i\, d\bar{z}_j$$

admette en chaque point de D au moins $n - q + 1$ valeurs propres ≥ 0 (resp. > 0).

Remarque 8. - Si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq k}$ est une famille finie de fonctions psh (resp. fortement psh) sur un espace analytique complexe X , $\varphi = \sup_{1\leq i\leq k} \varphi_i$ est psh (resp. fortement psh) dans X .

DÉFINITION 12. - Une fonction φ , définie sur un espace analytique complexe, est dite pluriharmonique si φ et $-\varphi$ sont plurisousharmoniques.

Remarque 9. - Pour qu'une fonction φ soit pluriharmonique dans un domaine simplement connexe D de $\underset{\sim}{C}^n$, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe dans D . Pour qu'une fonction φ , deux fois différentiable dans un domaine D de $\underset{\sim}{C}^n$, soit pluriharmonique, il faut et il suffit que l'on ait $L(\varphi) = 0$ en tout point de D .

DÉFINITION 13. - Une fonction φ , définie sur un espace analytique X , est dite q-pseudoconvexe (resp. fortement q-pseudoconvexe) si, pour tout $x \in X$, il existe un nombre entier n , une application biholomorphe τ d'un voisinage U de x sur un sous-ensemble analytique d'un domaine D de $\underset{\sim}{C}^n$, et une fonction ψ , q-plurisousharmonique (resp. fortement q-plurisousharmonique) dans D , tels que l'on ait $\varphi|U = \psi \circ \tau$. Lorsqu'on dira qu'une fonction q-pseudoconvexe est indéfiniment (resp. r fois) différentiable, cela signifiera que τ et ψ peuvent être choisis de telle sorte que ψ soit indéfiniment (resp. r fois) différentiable dans D . Mais la convention analogue n'est jamais faite pour les fonctions continues : une fonction q-pseudoconvexe continue peut être induite localement par des fonctions q-plurisousharmoniques non continues. Une fonction 1-pseudoconvexe (resp. fortement 1-pseudoconvexe) est appelée pseudoconvexe (resp. fortement pseudoconvexe).

Remarque 10. - Cette définition est justifiée par la remarque 5 et par la propriété suivante : Si U est un voisinage de x dans X , et si τ est une application biholomorphe de U sur un sous-ensemble analytique d'un domaine D de $\underset{\sim}{C}^n$, alors pour tout germe φ_x de fonction q-pseudoconvexe (resp. fortement q-pseudoconvexe) dans X au point x , il existe un germe $\psi_{\tau(x)}$ de fonction q-plurisousharmonique (resp. fortement q-plurisousharmonique) dans $\underset{\sim}{C}^n$ au point $\tau(x)$, tel que l'on ait $\varphi_x = \psi_{\tau(x)} \circ \tau$.

Remarque 11. - La remarque 8 reste valable pour les fonctions pseudoconvexes (resp. fortement pseudoconvexes).

PROPOSITION 1. - Pour tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe X , il existe une fonction pseudoconvexe φ sur X , telle que l'ensemble $X_\alpha = \{x \in X \; ; \; \varphi(x) < \alpha\}$ soit vide ou relativement compact pour tout $\alpha \in \underset{\sim}{R}$. Si X est un espace de Stein, la fonction φ peut être choisie analytique-réelle et fortement pseudoconvexe.

Ce résultat a été établi par DOCQUIER et GRAUERT [6] pour les variétés, et par NARASIMHAN [20] pour les espaces. La démonstration utilise le corollaire 1.

4. Espaces pseudoconvexes. Problème de Levi.

DÉFINITION 14. - On appelle disque analytique dans un espace analytique complexe X l'image D d'une application holomorphe φ de $\{z \; ; \; z \in \underset{\sim}{C} \, , \; |z| \leq 1\}$ dans X ; on appelle bord de D , et on désigne par bD , l'image de la restriction de φ à $\{z \; ; \; z \in \underset{\sim}{C} \, , \; |z| = 1\}$.

DÉFINITION 15. - Un espace analytique complexe X est dit pseudoconvexe si, pour toute suite $(D_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ de disques analytiques dans X vérifiant

$$\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} bD_n \subset\subset X \quad ,$$

on a aussi

$$\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} D_n \subset\subset X \quad .$$

Remarque 12. - Si φ est une application holomorphe, en tout point non dégénérée, d'un espace analytique complexe X dans un espace de Stein Y , on peut définir les points-frontières de X par rapport à φ (cf. [11]), et munir la réunion $\overline{X}$ de X et de l'ensemble de ses points-frontières d'une topologie naturelle ; alors, X est dit <u>localement pseudoconvexe</u> par rapport à φ si, pour tout point-frontière x de X, il existe un voisinage U de x dans $\overline{X}$, tel que $U \cap X$ soit pseudoconvexe.

THÉORÈME 8. - <u>Tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe est pseudoconvexe.</u>

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de la proposition 1.

<u>Problème de Levi.</u> - <u>Tout espace analytique complexe pseudoconvexe (resp. localement pseudoconvexe) est-il holomorphiquement convexe</u> ?

La considération de certains "espaces plats" montre que <u>la réponse à cette question est négative.</u>

DÉFINITION 16. - Un ouvert relativement compact Y d'un espace analytique complexe X sera dit <u>plat</u> au point x de sa frontière s'il existe un voisinage U de x dans X et une fonction φ pluriharmonique dans U tels que l'on ait

$$Y \cap U = \{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) < 0\} \qquad ;$$

Y sera dit <u>plat</u> s'il l'est en tout point de sa frontière. Un espace analytique complexe sera dit <u>plat</u> s'il contient un ouvert relativement compact et plat.

PROPOSITION 2. - <u>Il existe des espaces analytiques complexes plats non compacts pseudoconvexes n'admettant que les constantes comme fonctions holomorphes, et par conséquent non holomorphiquement convexes.</u>

De tels espaces ont été construits par GRAUERT (travaux non publiés).

Vu la proposition 2, nous scinderons le problème de Levi en deux problèmes partiels :

<u>Premier problème de Levi partiel.</u> - <u>Classification des espaces analytiques complexes plats.</u>

Ce problème n'a encore été l'objet d'aucune publication.

<u>Second problème de Levi partiel.</u> - <u>Tout espace analytique complexe pseudoconvexe (resp. localement pseudoconvexe) et non plat est-il holomorphiquement convexe</u> ?

Ce problème n'étant que partiellement résolu, nous énoncerons un "Problème de Levi usuel" qui contient les problèmes actuellement résolus.

DÉFINITION 17. - On dira qu'un ouvert relativement compact d'un espace analytique complexe est <u>fortement pseudoconvexe</u> (resp. <u>localement fortement pseudoconvexe</u>) s'il est pseudoconvexe (resp. localement pseudoconvexe) et s'il n'est plat en aucun point de sa frontière.

DÉFINITION 18. - Si D est un ouvert d'un espace topologique X , on appellera <u>extension</u> de D à X toute famille $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ d'ouverts de X tels que l'on ait

$$D = D_0 , \qquad D_\alpha \subset\subset D_\beta \text{ pour } \alpha < \beta ,$$

$$D_1 = X , \qquad \bigcup_{\beta\in[0,\alpha[} D_\beta = D_\alpha \text{ pour } \alpha \in]0 , 1]$$

et

$$\bigcap_{\beta\in]\alpha,1]} D_\beta = \overline{D}_\alpha \text{ pour } \alpha \in [0 , 1[.$$

DÉFINITION 19. - Nous dirons qu'un espace analytique complexe X est <u>fortement pseudoconvexe</u> s'il existe un ouvert D de X et une extension $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ de D à X tels que D_α soit fortement pseudoconvexe pour $\alpha \in [0 , 1[$.

<u>Problème de Levi usuel</u>.

i. <u>Tout ouvert relativement compact et fortement pseudoconvexe (resp. localement fortement pseudoconvexe) d'un espace analytique complexe est-il holomorphiquement convexe</u> ?

ii. <u>Tout espace analytique complexe fortement pseudoconvexe est-il holomorphiquement convexe</u> ?

La solution de ce problème, dans les cas où elle est connue, résulte des théorèmes I et II ci-dessous, établis sous cette forme par **NARASIMHAN** [21], après avoir été démontrés pour des variétés analytiques et des fonctions fortement pseudoconvexes deux fois différentiables par GRAUERT [9], et pour des espaces analytiques complexes et des fonctions fortement pseudoconvexes deux fois différentiables par NARASIMHAN [20], dans ces deux cas d'ailleurs sous des hypothèses globales.

THÉORÈME I. - Soit D un ouvert relativement compact d'un espace analytique complexe X. Si, pour tout point x de la frontière de D, il existe un voisinage U de x et une fonction continue fortement pseudoconvexe φ dans U tels que l'on ait

$$D \cap U = \{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) < 0\} \quad ,$$

alors D est de type fini.

THÉORÈME II. - Soit X un espace analytique complexe ; supposons qu'il existe un compact K de X, une fonction φ à valeurs réelles, continue dans X et fortement pseudoconvexe dans $X - K$, et une fonction ψ à valeurs réelles, continue dans X et pseudoconvexe dans $X - K$, telle que

$$X_{\alpha} = \{x \; ; \; x \in X \, , \; \psi(x) < \alpha\}$$

soit relativement compact dans X pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors X est un espace de type fini. Si l'on peut prendre $K = \emptyset$, alors X est un espace de Stein.

Compte tenu du théorème 7, on prouve les théorèmes I et II en établissant des théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces considérés, à coefficients dans un faisceau analytique cohérent. Les techniques de topologie algébrique utilisées sont groupées dans la partie II de ce travail, où sont exposés des théorèmes de finitude pour la cohomologie de certains espaces topologiques, à coefficients dans certains faisceaux vectoriels topologiques. Ces théorèmes généraux ne sont pas indispensables pour la démonstration des théorèmes I et II, où ils peuvent être remplacés en partie par des résultats acquis dans la théorie des variétés de Stein ; toutefois, ils permettent de prouver d'autres théorèmes concrets de finitude, comme ceux d'ANDREOTTI et GRAUERT. Dans la partie III, on utilise les résultats de la partie II pour établir les théorèmes I et II.

Ces théorèmes résolvent le problème de Levi usuel dans le cas où l'hypothèse de pseudoconvexité de ce problème permet la construction des fonctions pseudoconvexes convenables, à savoir dans le cas de certains espaces pseudoconvexes K-complets.

Problème de Levi des espaces de Stein. - Tout espace analytique complexe pseudoconvexe et K-complet est-il un espace de Stein ?

Si X est un espace analytique complexe normal, pseudoconvexe et K-complet, de dimension complexe n, il existe une application holomorphe φ de X dans $\mathbb{C}^n$, en chaque point de x non dégénérée, telle que (X, φ) soit un domaine de Riemann, éventuellement ramifié (la structure analytique complexe de X étant, au voisinage de chacun de ses points, la structure analytique complexe usuelle de revêtement ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$). Deux cas sont alors à envisager :

- a. (X, φ) est un domaine de Riemann non ramifié au-dessus de $\mathbb{C}^n$; on construit alors les fonctions pseudoconvexes convenables à l'aide de la fonction $d(x)$, borne supérieure des rayons des boules ouvertes, de centre $x \in X$, contenues dans X ; la pseudoconvexité de X entraîne celle de $-\log d(x)$; toutefois on ne peut appliquer immédiatement le théorème II car les ensembles $\{x ; x \in X, d(x) < \alpha\}$ ne sont peut-être pas relativement compacts (si le domaine de Riemann possède une infinité de feuilles) ; on doit encore effectuer une autre approximation (cf. [27] et [21]) pour établir que X est un espace de Stein. On obtient ainsi :

THÉORÈME 9 (OKA [27]). - Tout domaine de Riemann non ramifié et pseudoconvexe au-dessus de $\mathbb{C}^n$ est un espace de Stein.

La preuve de ce théorème semble plus aisée à partir du théorème II que par la démonstration initiale d'OKA ; en fait, par le théorème II, on prouve que le domaine de Riemann considéré est holomorphiquement convexe ; la méthode d'OKA montre en outre qu'il est holomorphiquement séparable, propriété qui, dans la présentation adoptée pour cet exposé, résulte de l'équivalence (2) du théorème 2.

Le théorème 9 reste vrai si l'on remplace la pseudoconvexité globale par la pseudoconvexité locale (cf. OKA [27]), et $\mathbb{C}^n$ par une variété de Stein (cf. DOCQUIER et GRAUERT [6]).

- b. (X, φ) est un domaine de Riemann ramifié au-dessus de $\mathbb{C}^n$; dans ce cas, le problème de Levi n'est pas résolu, la difficulté essentielle étant de trouver un substitut pour la distance $d(x)$.

5. Enveloppes d'holomorphie, domaines d'holomorphie et espaces d'holomorphie.

Les problèmes considérés dans cette section n'ont été que partiellement résolus ; nous exposons un certain nombre de résultats connus, sans respecter constamment l'ordre qui permettrait de les déduire les uns des autres.

A. Enveloppes d'holomorphie d'espaces analytiques complexes.

DÉFINITION 20. - On appelle enveloppe d'holomorphie d'un espace analytique complexe X tout couple (Y, π) d'un espace analytique complexe Y et d'une application holomorphe π, en tout point non dégénérée, de X dans Y, tel que :

i. π induit un isomorphisme des anneaux $I(X)$ et $I(Y)$;

ii. pour tout espace analytique complexe K-complet Z, et toute application holomorphe α, en tout point non dégénérée, de X dans Z, induisant un isomorphisme des anneaux $I(X)$ et $I(Z)$, il existe une application holomorphe β, en tout point non dégénérée, de Z dans Y, vérifiant $\pi = \beta \circ \alpha$.

THÉORÈME 10. - Tout espace analytique complexe holomorphiquement convexe admet une enveloppe d'holomorphie (Y, π), unique à un biholomorphisme près ; Y est un espace de Stein. Tout espace analytique complexe normal et K-complet admet une enveloppe d'holomorphie (Y, π), unique à un biholomorphisme près ; Y est K-complet.

La première partie de ce théorème n'est autre que le théorème 5 ; la seconde a été établie par KERNER [16].

DÉFINITION 21. - Nous appellerons espace d'holomorphie tout espace analytique complexe qui possède une enveloppe d'holomorphie et coïncide avec cette enveloppe.

THÉORÈME 11. - Tout espace de Stein est un espace d'holomorphie.

Problème de Levi des espaces d'holomorphie. - Tout espace d'holomorphie est-il un espace de Stein ?

Ce problème n'est pas résolu, même pour un espace d'holomorphie normal et K-complet.

La démonstration donnée par KERNER pour la seconde partie du théorème 10 utilise les enveloppes d'holomorphie des domaines de Riemann au-dessus de $\underset{\sim}{C}^n$. ROTHSTEIN [29] suggère une autre méthode pour la construction de l'enveloppe d'holomorphie d'un espace analytique complexe.

B. Enveloppes d'holomorphie de domaines de Riemann.

DÉFINITION 22. - On appelle enveloppe d'holomorphie d'un domaine de Riemann $(X, \varphi, \mathbb{C}^n)$ au-dessus de $\mathbb{C}^n$ tout domaine de Riemann $(\tilde{X}, \tilde{\varphi}, \mathbb{C}^n)$ au-dessus de $\mathbb{C}^n$ tel que :

i. il existe une application holomorphe π, en tout point non dégénérée, de X dans $\tilde{X}$, vérifiant $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$, et induisant un isomorphisme des anneaux $I(X)$ et $I(\tilde{X})$.

ii. pour tout domaine de Riemann $(Y, \psi, \mathbb{C}^n)$ au-dessus de $\mathbb{C}^n$ et toute application holomorphe α, en tout point non dégénérée, de X dans Y, vérifiant $\varphi = \psi \circ \alpha$ et induisant un isomorphisme des anneaux $I(X)$ et $I(Y)$, il existe une application holomorphe β, en tout point non dégénérée, de Y dans $\tilde{X}$, vérifiant $\pi = \beta \circ \alpha$.

THÉORÈME 12 (IWAHASCHI [15], KERNER [16], SCHEJA [30]). - Tout domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^n$ possède une enveloppe d'holomorphie, déterminée à un biholomorphisme près.

DÉFINITION 23. - Nous appellerons enveloppe d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ tout domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^n$ qui coïncide avec son enveloppe d'holomorphie, et domaine d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ tout domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^n$ qui est le domaine d'existence d'une fonction holomorphe.

THÉORÈME 13 (SCHEJA [32]). - Les domaines d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ sont les enveloppes d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$; toute intersection de domaines d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$.

Problème de Levi des domaines d'holomorphie. - Etude des relations entre les notions de domaine d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ et de domaine de Riemann holomorphiquement convexe au-dessus de $\mathbb{C}^n$.

L'état actuel des connaissances sur ce problème sera résumé par les énoncés suivants :

THÉORÈME 14 (OKA [27]). - Pour qu'un domaine de Riemann non ramifié au-dessus de $\mathbb{C}^n$ soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit holomorphiquement convexe.

THÉORÈME 15. - Il existe des domaines d'holomorphie ramifiés au-dessus de $\mathbb{C}^n$ qui ne sont pas holomorphiquement convexes.

Le premier exemple d'un tel domaine a été construit par GRAUERT et REMMERT [11] ; leur construction est un cas particulier de celle que donne le théorème suivant :

THÉORÈME 16 (SCHEJA [31]). - Soient X un espace de Stein normal de dimension complexe n, et E un sous-ensemble analytique de X, différent de X et sans point isolé. Alors il existe :

i. une application holomorphe φ de X dans $\mathbb{C}^n$, en tout point de $X - E$ non dégénérée, et en tout point de E dégénérée ;

ii. une fonction f holomorphe dans $X - E$, admettant $(X - E , \varphi \mid X - E , \mathbb{C}^n)$ comme domaine d'holomorphie et de méromorphie.

Pour tout ensemble analytique A de dimension pure $n - 1$ dans X et contenant E, existe une fonction g, holomorphe dans $X - A$, admettant $(X - A , \varphi \mid X - A , \mathbb{C}^n)$ comme domaine d'holomorphie et de méromorphie.

Pour $E \neq \emptyset$, $n \geq 3$ et $\dim_{\mathbb{C}} E \leq n - 2$, $X - E$ n'est pas holomorphiquement convexe, ce qui justifie le théorème 15. Les problèmes suivants restent ouverts :

Problème 1. - Tout domaine d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$, de dimension complexe 2, est-il holomorphiquement convexe ?

Problème 2. - La construction donnée par le théorème 16 fournit-elle tous les domaines d'holomorphie et de méromorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$?

Remarque 13. - TOGARI [36] a donné une définition plus faible de la notion de domaine de Riemann holomorphiquement convexe au-dessus de $\mathbb{C}^n$, avec laquelle tout domaine d'holomorphie au-dessus de $\mathbb{C}^n$ est holomorphiquement convexe.

C. Relations entre les notions d'espace d'holomorphie et de domaine d'holomorphie.

THÉORÈME 17. - Tout espace de Stein X de dimension complexe n peut être réalisé comme domaine d'holomorphie $(X , \varphi , \mathbb{C}^n)$ au-dessus de $\mathbb{C}^n$.

C'est une conséquence immédiate du théorème 16.

THÉORÈME 18 (KERNER [16]). - L'enveloppe d'holomorphie $H(X , \varphi , \mathbb{C}^n)$ d'un domaine de Riemann $(X , \varphi , \mathbb{C}^n)$ se plonge naturellement dans l'enveloppe d'holomorphie $H(X)$ de l'espace analytique X ; φ se prolonge en une application holomorphe de $H(X)$ dans $\underset{\sim}{C}^n$, dégénérée aux points de $H(X) - H(X, \varphi, \underset{\sim}{C}^n)$, qui est un ensemble analytique de dimension $\leq n - 1$, sans point isolé. Si $(X, \varphi, \underset{\sim}{C}^n)$ est un domaine de Riemann non ramifié, on a $H(X) = H(X, \varphi, \underset{\sim}{C}^n)$ (et cette enveloppe coïncide encore avec l'enveloppe d'holomorphie non ramifiée de $(X, \varphi, \underset{\sim}{C}^n)$ au sens de THULLEN [35].

II. Théorèmes de finitude et théorèmes d'approximation en topologie algébrique.

Du mémoire [1] d'ANDREOTTI et GRAUERT, on peut extraire une méthode de démonstration de théorèmes de finitude pour la cohomologie d'un espace topologique à valeurs dans un faisceau vectoriel topologique. Cette méthode, explicitée par les théorèmes ci-dessous, est peut-être applicable aux faisceaux calculables (cf. définition 1) ; toutefois, on n'introduit ces faisceaux que dans les théorèmes les plus simples, ne considérant en général que les faisceaux pour lesquels un recouvrement acyclique existe.

Le principe général de démonstration des théorèmes de finitude est énoncé par le théorème 1, dans la première section. Parmi les théorèmes de finitude énoncés dans la seconde section, les plus intéressants sont :

i. le théorème 2, relatif à certains ouverts relativement compacts, et le théorème 5, relatif à certains espaces topologiques ;

ii. les théorèmes 6 et 7, dans lesquels les hypothèses des théorèmes 2 et 5 (qui reposent sur une suite de définitions assez compliquées) sont réalisées simplement à l'aide de fonctions appartenant à une classe aisément définie.

Les théorèmes 6 et 7 sont directement utilisables pour établir des théorèmes de finitude pour les espaces analytiques complexes ; on les déduit des théorèmes 2 et 5 à la fin de la seconde section. Dans la troisième section, on prouve les théorèmes 2 et 3 ; dans la quatrième, les théorèmes 4 et 5 sont établis à partir des théorèmes 2 et 3.

Chaque fois qu'une démonstration peut être lue dans [1], nous omettons de la reproduire, et nous donnons une référence précise.

1. Premier critère de finitude.

Rappelons d'abord un théorème, précédemment pubié (cf. [23] et [24]), inspiré par un résultat analogue de GROTHENDIECK [14] et par une démonstration de GRAUERT [9].

DÉFINITION 1 (GROTHENDIECK [14]). - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$; un faisceau F de modules sur un espace topologique paracompact X est dit calculable en degrés $\leqslant p$ si, pour tout nombre entier q vérifiant $1 \leqslant q \leqslant p$, tout point x de X et tout voisinage U de x, il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'homomorphisme canonique $H^q(U, F) \to H^q(V, F)$ soit nul.

DÉFINITION 2 (FRENKEL [7], GROTHENDIECK [14]). - Un faisceau F d'espaces vectoriels (réels ou complexes) sur un espace topologique X est appelé faisceau vectoriel topologique si, pour tout ouvert U de X, $H^0(U, F)$ est muni d'une topologie d'espace vectoriel topologique de telle sorte que, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U, la topologie de $H^0(U, F)$ soit la moins fine des topologies d'espace vectoriel topologique rendant continue l'application $H^0(U, F) \to H^0(U_i, F)$ pour tout $i \in I$; F est dit faisceau de Fréchet si les espaces vectoriels topologiques $H^0(U, F)$ sont des espaces de Fréchet ; F est dit compact si, pour tout couple $V \subset\subset U$ d'ouverts de X, l'application $H^0(U, F) \to H^0(V, F)$ est compacte (i. e. transforme un voisinage convenable de zéro en un ensemble relativement compact).

Remarque 1 (GROTHENDIECK [14]). - Soit F un faisceau vectoriel topologique compact sur un espace topologique localement compact X ; alors, pour tout ouvert U de X, $H^0(U, F)$ est un espace de Schwartz (cf. [13], p. 117) complet ; pour tout ouvert U, dénombrable à l'infini, de X, $H^0(U, F)$ est un espace de Fréchet.

THÉORÈME 1. - *Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique compact, calculable en degrés $\leqslant p$, sur un espace topologique X localement compact et paracompact. Soit D un ouvert relativement compact et paracompact de X, tel que l'application canonique $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ soit surjective. Alors on a* $\dim H^p(D, F) < +\infty$.

Dans les deux travaux cités, le théorème 1 est prouvé lorsque F est un faisceau de Fréchet ; cette hypothèse est superflue, comme le montre GROTHENDIECK dans [14], p. 4.

2. Théorèmes de finitude et d'approximation.

A. Théorèmes pour certains ouverts relativement compacts.

DÉFINITION 3. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau d'espaces vectoriels sur un espace topologique X ; nous dirons qu'un ouvert D de X est (relativement à X) quasi-p-convexe par rapport à F s'il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de la frontière de D et une suite croissante $(D_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ d'ouverts paracompacts de X, tels que l'on ait :

i. $D = D_0 \subset\subset D_k$ et $D_j - D_{j-1} \subset U_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$;

ii. $H^p(U_j \cap D_{j-1}, F) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

THÉORÈME 2. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique compact, calculable en degrés $\leqslant p$, sur un espace topologique localement compact et paracompact X. Pour tout ouvert D de X, quasi-p-convexe par rapport à F, il existe un ouvert $D' \supset\supset D$ tel que l'application $H^p(D', F) \to H^p(D, F)$ soit surjective, et l'on a $\dim H^p(D, F) < +\infty$.

DÉFINITION 4. - Soit F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X. On appellera recouvrement de X adapté à F toute base dénombrable $\mathfrak{U}$ de la topologie de X telle que $H^0(U, F)$ soit un espace de Fréchet pour tout $U \in \mathfrak{U}$.

Remarque 2. - Si F est un faisceau de Fréchet sur un espace topologique X, toute base dénombrable de la topologie de X est un recouvrement de X adapté à F. Si F est un faisceau vectoriel topologique compact sur un espace vectoriel topologique localement compact X, toute base dénombrable de la topologie de X, dont les éléments sont des ouverts de X dénombrables à l'infini, est un recouvrement de X adapté à F.

Remarque 3. - Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement d'un espace topologique X, adapté à un faisceau vectoriel topologique F sur X ; alors, pour tout ouvert V de X et tout nombre entier $p \geqslant 0$, l'espace vectoriel de cocycles $Z^p(\mathfrak{U}|V, F)$ (où $\mathfrak{U}|V$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}$ contenus dans V), muni de sa topologie naturelle, est un espace de Fréchet.

DÉFINITION 5. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X ; nous dirons qu'un ouvert D de X est (relativement à X) p-convexe par rapport à F s'il existe :

i. un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X adapté à F et acyclique par rapport à F ;
ii. un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de la frontière de D ;
iii. une suite croissante $(D_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ d'ouverts (relativement à X) quasi-p-convexes par rapport à F,

de telle sorte que l'on ait :

i. $D = D_0 \subset\subset D_k$ et $D_j - D_{j-1} \subset\subset U_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$;
ii. $H^p(U_j \cap D_{j-1}, F) = 0$ et $H^p(U_j \cap D_j, F) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$;
iii. l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|U_j \cap D_j, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|U_j \cap D_{j-1}, F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|U_j \cap D_{j-1}, F)$.

DÉFINITION 6. - Soient p un nombre entier $\geqslant 1$, F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X, et D un ouvert de X (relativement à X) p-convexe par rapport à F. Un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X sera dit adapté à F et à D s'il est adapté à F et s'il existe :

i. un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de la frontière de D ;
ii. une suite croissante $(D_j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ d'ouverts (relativement à X) quasi-p-convexes par rapport à F,

de telle sorte que les conditions (i), (ii), (iii) de la définition 5 soient vérifiées.

THÉORÈME 3. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique compact sur un espace topologique X localement compact et métrisable. Soit D un ouvert de X (relativement à X) p-convexe par rapport à F. Alors on a $\dim H^p(D, F) < +\infty$ et il existe un ouvert $D' \supset\supset D$ de X tel que l'application $H^p(D', F) \to H^p(D, F)$ soit bijective. Pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X adapté à F et à D et acyclique par rapport à F, il existe un ouvert $D' \supset\supset D$ tel que l'application $H^p(D', F) \to H^p(D, F)$ soit bijective et que l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D', F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$ soit dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$.

B. Théorèmes pour certains espaces topologiques.

DÉFINITION 7. - Si D est un ouvert d'un espace topologique X, nous appellerons extension de D à X toute famille $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ d'ouverts de X tels que l'on ait

$$D = D_0 \;, \qquad D_\alpha \subset\subset D_\beta \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta \;,$$

$$D_1 = X \;, \qquad \bigcup_{\beta\in[0,\alpha[} D_\beta = D_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in]0 \;, 1]$$

et

$$\bigcap_{\beta\in]\alpha,1]} D_\beta = \overline{D}_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in [0 \;, 1[\;.$$

DÉFINITION 8. - Soit p un nombre entier ≥ 1, et soit F un faisceau d'espaces vectoriels sur un espace topologique X ; nous appellerons extension quasi-p-convexe par rapport à F d'un ouvert D de X à X toute extension de D à X dont les ouverts sont (relativement à X) quasi-p-convexes par rapport à F.

DÉFINITION 9. - Soit p un nombre entier ≥ 1, et soit F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X. Nous appellerons extension p-convexe par rapport à F d'un ouvert D de X à X toute extension $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ de D à X vérifiant les conditions :

i. D_α est (relativement à X) p-convexe par rapport à F pour tout $\alpha \in [0 \;, 1[$;

ii. il existe un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, acyclique par rapport à F, adapté à F et à D_α pour tout $\alpha \in [0 \;, 1[$, et vérifiant en outre la condition : pour tout $\alpha \in [0 \;, 1[$ et tout $\beta \in]\alpha \;, 1[$ suffisamment voisin de α, on peut choisir les ouverts dont les conditions (i) et (ii) de la définition 6 assurent l'existence, de telle sorte que le nombre k soit le même pour D_α et D_β, que le recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ soit le même pour D_α et D_β, et que les ouverts $D_k(\alpha)$ et $D_k(\beta)$ associés respectivement à D_α et D_β vérifient $D_k(\beta) \supset D_k(\alpha)$. Étant donnée une telle extension p-convexe de D à X, un recouvrement de X vérifiant la condition (ii) à l'exception éventuellement de l'acyclicité sera dit <u>adapté</u> à l'extension considérée.

DÉFINITION 10. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau d'espaces vectoriels (resp. un faisceau vectoriel topologique) sur un espace topologique X. Nous dirons que l'espace X est quasi-p-convexe (resp. p-convexe) par rapport à F s'il existe une extension quasi-p-convexe (resp. p-convexe) par rapport à F d'un ouvert D de X à X.

THÉORÈME 4. - *Soit* p *un nombre entier* $\geqslant 1$, *et soit* F *un faisceau vectoriel topologique compact, calculable en degrés* $\leqslant p$, *sur un espace topologique localement compact et paracompact* X. *Supposons* X *quasi-p-convexe par rapport à* F. *Alors, pour tout ouvert* D *de* X, *possédant une extension à* X, *quasi-p-convexe par rapport à* F, *on a* $\dim H^p(D, F) < +\infty$ *et l'application* $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ *est surjective.*

THÉORÈME 5. - *Soit* p *un nombre entier* $\geqslant 1$, *et soit* F *un faisceau vectoriel topologique compact sur un espace topologique localement compact et métrisable* X. *Si* X *est* p-*convexe par rapport à* F, *on a* $\dim H^p(X, F) < +\infty$. *Pour tout ouvert* D *de* X, *possédant une extension à* X, p-*convexe par rapport à* F, *l'application* $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ *est bijective, et pour tout recouvrement* $\mathfrak{U}$ *de* X, *adapté à une telle extension, et acyclique par rapport à* F, *l'application* $Z^{p-1}(\mathfrak{U}, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$ *a une image dense dans* $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$.

C. Utilisation de fonctions "convexes".

DÉFINITION 11. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau de groupes abéliens (resp. un faisceau vectoriel topologique) sur un espace topologique X. Un ensemble $\mathcal{C}$ de fonctions réelles continues sur X sera appelé <u>ensemble de fonctions quasi-p-convexes</u> (resp. p-convexes) par rapport à F s'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X et un ensemble $\mathfrak{K}$ de fonctions réelles continues $\geqslant 0$ et à supports compacts dans X, tels que l'on ait :

i. $H^p(U, F) = 0$ pour tout $U \in \mathfrak{U}$;

ii. pour tous $U \in \mathfrak{U}$ et $x \in U$, il existe $\rho \in \mathfrak{K}$, à support dans U, vérifiant $\rho(x) \neq 0$;

iii. pour tous $\varphi \in \mathcal{C}$ et $\rho \in \mathfrak{K}$, il existe un nombre réel $h > 0$ tel que l'on ait $\varphi + \varepsilon\rho \in \mathcal{C}$ pour $-h < \varepsilon < +h$;

iv. pour tous $U \in \mathfrak{U}$, $\varphi \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) < \alpha\} \in \mathfrak{U}$ (resp. : pour tous $U \in \mathfrak{U}$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout recouvrement $\mathfrak{U}'$ de X adapté à F et acyclique par rapport à F, l'image de l'application

$$Z^{p-1}(\mathfrak{U}'|U \, , F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}'|\{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) < \alpha\} \, , F)$$

est dense dans ce dernier espace).

THÉORÈME 6. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique compact, calculable en degrés $\leqslant p$, sur un espace topologique localement compact et paracompact X. Soit D un ouvert relativement compact de X, et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de fonctions quasi-p-convexes par rapport à F dans un voisinage V de la frontière de D. S'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}$ telle que l'on ait $D \cap V = \{x \; ; \; x \in V \, , \; \varphi(x) < 0\}$, alors on a $\dim H^p(D \, , F) < +\infty$, et il existe un nombre réel $h > 0$ tel que l'application $H^p(D_\alpha \, , F) \to H^p(D \, , F)$ soit surjective pour $0 \leqslant \alpha < h$, $D_\alpha = D \cup \{x \; ; \; x \in V \, , \; \varphi(x) < \alpha\}$.

Preuve. - D est quasi-p-convexe par rapport à F ; en effet, soient $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de V et $\mathcal{K}$ une famille de fonctions continues dans V, vérifiant les conditions de la définition 11. A tout point x de la frontière bD de D, associons un ouvert U de $\mathfrak{U}$ qui le contient, et que nous noterons U_x ; à chaque U_x, associons une fonction $\rho_x \in \mathcal{K}$, à support dans U_x, et vérifiant $\rho_x(x) \neq 0$; soit U'_x l'intérieur du support de ρ_x ; $(U'_x)_{x \in bD}$ est un recouvrement ouvert de bD, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U'_{x_i})_{1 \leqslant i \leqslant k}$; posons

$$U_i = U_{x_i} \, , \qquad \rho_i = \rho_{x_i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k \, , \qquad D_0 = D \qquad ,$$

$$D_j = D \cup \{x \; ; \; x \in V \, , \; \varphi(x) < \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} \varepsilon_i \, \rho_i(x)\} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant k \qquad ,$$

où les ε_i sont des nombres réels > 0 assez petits pour que l'on ait $\varphi - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} \varepsilon_i \, \rho_i \in \mathcal{K}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Les conditions de la définition 3 sont réalisées. Le théorème 6 se déduit alors immédiatement du théorème 2.

THÉORÈME 7. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$, et soit F un faisceau vectoriel topologique compact sur un espace topologique localement compact et métrisable X. Supposons qu'il existe

i. un recouvrement de X adapté à F et acyclique par rapport à F,

ii. un compact K de X, un ensemble $\mathcal{C}$ de fonctions p-convexes par rapport à F dans $X - K$, et une fonction φ à valeurs réelles, continue dans X, telle que l'on ait

$$\varphi \mid X - K \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad X_\alpha = \{x \,;\; x \in X \,,\; \varphi(x) < \alpha\} \subset\subset X \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \underset{\sim}{R} \;.$$

Alors on a $\dim H^p(X, F) < +\infty$. Pour tout $\alpha > \sup_{x\in K} \varphi(x)$, l'application $H^p(X, F) \to H^p(X_\alpha, F)$ est bijective ; pour tout $\alpha > \sup_{x\in K} \varphi(x)$ et tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de X adapté à F et acyclique par rapport à F, l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|X_\alpha, F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|X_\alpha, F)$.

Preuve. - X est p-convexe par rapport à F ; en effet, soit $\alpha_0 > \sup_{x\in K} \varphi(x)$; X_{α_0} admet une extension à X, p-convexe par rapport à F, obtenue en modifiant le paramètre de la famille $(X_\alpha)_{\alpha\geqslant\alpha_0}$; car :

i. pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, X_α est p-convexe par rapport à F ; en effet, en effectuant la même construction que dans la preuve du théorème 6, on vérifie les conditions de la définition 5 ;

ii. tout recouvrement de X adapté à F et acyclique par rapport à F est adapté à F et à X_α pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, et vérifie la condition supplémentaire imposée dans la définition 9 (cf. [1], § 17, la remarque qui suit le lemme).

Le théorème 7 se déduit donc immédiatement du théorème 5.

3. Cohomologie de la réunion de deux ouverts. Preuve des théorèmes 2 et 3.

Le but de cette section est d'établir les propositions 2 et 5 ci-dessous, utilisées ensuite pour prouver les théorèmes 2 et 3.

PROPOSITION 1. - Soient X_1 et X_2 deux ouverts d'un espace topologique X vérifiant $X = X_1 \cup X_2$, et soit F un faisceau de groupes abéliens sur X ; en posant $X_{12} = X_1 \cap X_2$, on a la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\ldots \to H^p(X, F) \overset{\varphi}{\to} H^p(X_1, F) \oplus H^p(X_2, F) \overset{\psi}{\to} H^p(X_{12}, F) \to H^{p+1}(X, F) \to \ldots$$

où

$$\varphi(h) = h|X_1 \oplus h|X_2 \quad \text{et} \quad \psi(h_1 \oplus h_2) = h_1|X_{12} - h_2|X_{12} \quad .$$

Preuve. - Cf. [1] (§ 17, a).

PROPOSITION 2. - *Soient* X_1 *et* X_2 *deux ouverts d'un espace topologique* X, *vérifiant* $X = X_1 \cup X_2$, *et soit* F *un faisceau de groupes abéliens sur* X. *Si l'on a* $H^p(X_1 \cap X_2, F) = 0$, *les applications* $H^p(X, F) \to H^p(X_i, F)$, $i = 1$ *ou* 2, *sont surjectives.*

Preuve. - C'est une conséquence immédiate de la suite exacte de Mayer-Vietoris de la proposition 1.

PROPOSITION 3. - *Soient* X_1 *et* X_2 *deux ouverts d'un espace topologique* $X = X_1 \cup X_2$; *soit* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ *une base de la topologie de* X, *telle que la réunion de tout ensemble fini d'ouverts de* $\mathfrak{U}$, *d'intersection non vide, soit contenue dans* X_1 *ou dans* X_2 ; *soit* F *un faisceau de groupes abéliens sur* X. *En posant* $X_{12} = X_1 \cap X_2$, *on a la suite exacte de Mayer-Vietoris*

$$\ldots \to H^p(\mathfrak{U}, F) \to H^p(\mathfrak{U}|X_1, F) \oplus H^p(\mathfrak{U}|X_2, F) \to H^p(\mathfrak{U}|X_{12}, F) \xrightarrow{j^*} H^{p+1}(\mathfrak{U}, F) \to \ldots$$

où les deux premiers homomorphismes sont analogues à ceux de la proposition 1, et j^* *est induit par l'application* $j : Z^p(\mathfrak{U}|X_{12}, F) \to Z^{p+1}(\mathfrak{U}, F)$ *définie de la manière suivante : à tout cocycle* $\xi \in Z^p(\mathfrak{U}|X_{12}, F)$, *on associe la cochaîne* $\eta \in C^p(\mathfrak{U}|X_1, F)$ *définie par*

$$\eta(i_0, \ldots, i_p) = \begin{cases} \xi(i_0, \ldots, i_p) & \text{si } \bigcup_{0\leq r\leq p} U_{i_r} \subset X_{12} , \\ 0 & \text{dans le cas contraire} , \end{cases}$$

et on définit le cocycle $j(\xi)$ par

$$(j(\xi))(i_0 , \dots , i_{p+1}) = \begin{cases} (d\eta)(i_0 , \dots , i_{p+1}) & \text{si } \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant p+1} U_{i_r} \subset X_1 , \\ 0 & \text{dans le cas contraire} . \end{cases}$$

Preuve. - Cf. [1] (§ 19, a, (α) et (β)).

PROPOSITION 4. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$. Soient X_1 et X_2 deux ouverts d'un espace topologique $X = X_1 \cup X_2$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à un faisceau vectoriel topologique F sur X, tel que les conditions suivantes soient vérifiées :

i. la réunion de tout ensemble fini d'ouverts de $\mathcal{U}$, d'intersection non vide, est contenue dans X_1 ou dans X_2 ;

ii. $\dim H^p(\mathcal{U} , F) < + \infty$;

iii. l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_2 , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_{12} , F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_{12} , F)$, où $X_{12} = X_1 \cap X_2$.

Alors l'application $H^p(\mathcal{U} , F) \to H^p(\mathcal{U}|X_1 , F) \oplus H^p(\mathcal{U}|X_2 , F)$ est injective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U} , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_1 , F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_1 , F)$.

Preuve. - Compte tenu de la remarque 3, les deux assertions sont prouvées respectivement par [1] (§ 20, a) et par [1] (§ 19, a, (γ) et (δ)), en utilisant la proposition 3.

PROPOSITION 5. - Soit p un nombre entier $\geqslant 1$; soient X_1 et X_2 deux ouverts relativement compacts d'un espace topologique métrisable vérifiant la condition $\overline{X_1 - X_{12}} \cap \overline{X_2 - X_{12}} = \emptyset$, où $X_{12} = X_1 \cap X_2$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de $X = X_1 \cup X_2$, adapté à un faisceau vectoriel topologique F sur X, acyclique par rapport à F, et tel que l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_2 , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_{12} , F)$ soit dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_{12} , F)$. Alors, si l'on a $\dim H^p(X , F) < + \infty$, l'application $H^p(X , F) \to H^p(X_1 , F) \oplus H^p(X_2 , F)$ est injective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U} , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_1 , F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|X_1 , F)$. Si l'on a de plus $H^p(X_{12} , F) = 0$ et $H^p(X_2 , F) = 0$, l'application $H^p(X , F) \to H^p(X_1 , F)$ est bijective.

Preuve. - Soit d la distance des ensembles $\overline{X_1 - X_{12}}$ et $\overline{X_2 - X_{12}}$ par rapport à une métrique sur l'espace topologique qui contient X, et soit $\mathcal{U}'$ l'ensemble des ouverts de $\mathcal{U}$ dont le diamètre est $< d/2$; $\mathcal{U}'$ est un recouvrement de X qui permet d'appliquer la proposition 4 ; on utilise alors le fait que $\mathcal{U}'$ est acyclique par rapport à F et le raisonnement de [1] (§ 19, a, (ε)) ; puis on tient compte de la proposition 2.

Preuve du théorème 2. - Avec les notations de la définition 3, posons $D' = D_k$, et, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, remplaçons X_1 par D_{j-1} et X_2 par $D_j \cap U_j$ dans la proposition 2 ; nous voyons que l'application $H^p(D_j , F) \to H^p(D_{j-1} , F)$ est surjective pour $1 \leqslant j \leqslant k$; donc l'application composée $H^p(D' , F) \to H^p(D , F)$ est surjective et l'on a $\dim H^p(D , F) < +\infty$ en vertu du théorème 1.

Preuve du théorème 3. - Avec les notations de la définition 5, posons $D' = D_k$, et, pour $1 \leqslant j \leqslant k$, remplaçons X_1 par D_{j-1} et X_2 par $D_j \cap U_j$ dans la proposition 5 ; les hypothèses de cette proposition sont alors vérifiées, car on a $\dim H^p(D_j , F) < +\infty$ d'après le théorème 2.

4. Théorèmes de passage à la limite pour la cohomologie. Preuve des théorèmes 4 et 5.

Les résultats de cette section (particulièrement les propositions 9 et 11) permettent de prouver les théorèmes 4 et 5 à partir des théorèmes 2 et 3.

A. Passage à la limite d'une suite croissante d'ouverts.

PROPOSITION 6. - Soient p un nombre entier $\geqslant 0$, $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace topologique $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ et F un faisceau de groupes commutatifs sur X. Si l'application $H^p(D_{n+1} , F) \to H^p(D_n , F)$ est surjective pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $H^p(X , F) \to H^p(D_0 , F)$ est surjective.

Preuve. - Cf. [1], § 18.

PROPOSITION 7. - Soient p un nombre entier $\geqslant 0$, $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace topologique $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, F un faisceau vectoriel topologique sur X, et $\mathcal{U}$ un recouvrement de X, adapté à F. Si l'image de l'application $Z^p(\mathcal{U}|D_{n+1} , F) \to Z^p(\mathcal{U}|D_n , F)$ est dense dans $Z^p(\mathcal{U}|D_n , F)$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, l'image de l'application $Z^p(\mathcal{U} , F) \to Z^p(\mathcal{U}|D_0 , F)$ est dense dans $Z^p(\mathcal{U}|D_0 , F)$.

Preuve. - Cf. [1] (§ 19, b).

PROPOSITION 8. - Soient p un nombre entier ≥ 1 , $(D_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite croissante d'ouverts d'un espace topologique $X = \bigcup_{n\in \underset{\sim}{N}} D_n$, F un faisceau vectoriel topologique sur X , et $\mathcal{U}$ un recouvrement de X adapté à F et acyclique par rapport à F . Si l'application $H^p(D_{n+1} , F) \to H^p(D_n , F)$ est bijective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U}|D_{n+1} , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|D_n , F)$ dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|D_n , F)$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, alors l'application $H^p(X , F) \to H^p(D_0 , F)$ est bijective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathcal{U} , F) \to Z^{p-1}(\mathcal{U}|D_0 , F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathcal{U}|D_0 , F)$.

Preuve. - Cf. [1] (§ 20, c), qui utilise les propositions 5 et 6.

B. Passage à la limite au moyen d'une extension.

LEMME 1. - Soit $R(\alpha , \beta)$ une relation de préordre dans le segment $[0 , 1]$ de la droite réelle, vérifiant les conditions

i. $R(\alpha , \beta) \implies \alpha \leq \beta$;

ii. pour tout $\alpha \in [0 , 1[$, il existe $\beta \neq \alpha$ vérifiant $R(\alpha , \beta)$;

iii. si $(\alpha_n)_{n\in \underset{\sim}{N}} \subset [0 , 1]$ vérifie $R(\alpha_n , \alpha_{n+1})$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, on a $R(\alpha_0 , \alpha)$ où $\alpha = \sup_{n\in \underset{\sim}{N}} \alpha_n$.

Alors on a $R(0 , 1)$.

Preuve. - En vertu de la condition (i), R est une relation d'ordre dans $[0 , 1]$. Soit E une partie de $[0 , 1]$ totalement ordonnée par R , et soit $\lambda = \sup E$ (relativement à l'ordre $\leq$) ; pour toute suite $(\lambda_n)_{n\in \underset{\sim}{N}} \subset E$ vérifiant $\lambda = \sup_{n\in \underset{\sim}{N}} \lambda_n$, on a $R(\lambda , \lambda_0)$ d'après la condition (iii) ; donc λ est la borne supérieure de E relativement à R . Par conséquent l'ensemble $[0 , 1]$, muni de la relation d'ordre R , est inductif. En vertu du théorème de Zorn (cf. [2], § 2, n° 4, corollaire 1, p. 45), $[0 , 1]$ possède un élément maximal γ relativement à R , vérifiant $R(0 , \gamma)$; d'après la condition (ii), on a nécessairement $\gamma = 1$.

LEMME 2. - <u>Soit</u> X <u>un espace topologique et soit</u> $R(D , D')$ <u>une relation de préordre dans l'ensemble des ouverts de</u> X , <u>vérifiant les conditions</u>

i. $R(D , D') \Longrightarrow D \subset D'$;

ii. <u>si</u> $(D_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>est une suite croissante d'ouverts de</u> X <u>vérifiant</u> $R(D_n , D_{n+1})$ <u>pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>on a</u> $R(D_0 , D')$ <u>où</u> $D' = \bigcup_{n\in \underset{\sim}{N}} D_n$.

<u>Soit</u> D <u>un ouvert de</u> X , <u>possédant une extension</u> $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ <u>à</u> X <u>qui vérifie la condition</u>

iii. <u>pour tout</u> $\alpha \in [0 , 1[$, <u>il existe</u> $\beta \neq \alpha$ <u>vérifiant</u> $R(D_\alpha , D_\beta)$.

<u>Alors on a</u> $R(D , X)$.

<u>Preuve</u>. - Considérons une extension $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ de D à X , vérifiant la condition (iii), et définissons une relation R' dans $[0 , 1]$ en posant

$$R'(\alpha , \beta) \Longleftrightarrow R(D_\alpha , D_\beta) \qquad ;$$

grâce aux conditions (i) et (iii) du lemme 2, R' est une relation de préordre dans $[0 , 1]$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 1. Si $(\alpha_n)_{n\in \underset{\sim}{N}} \subset [0 , 1]$ vérifie $R'(\alpha_n , \alpha_{n+1})$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$R(D_{\alpha_n} , D_{\alpha_{n+1}}) \text{ , et } R(D_{\alpha_0} , \bigcup_{n\in \underset{\sim}{N}} D_{\alpha_n})$$

d'après la condition (ii) du lemme 2 ; or on a

$$\bigcup_{n\in \underset{\sim}{N}} D_{\alpha_n} = D_\alpha$$

où $\alpha = \sup_{n\in \underset{\sim}{N}} \alpha_n$ à cause de la condition

$$D_\alpha = \bigcup_{\beta\in[0,\alpha[} D_\beta \qquad ;$$

on a donc $R'(\alpha_0 , \alpha)$ et la condition (iii) du lemme 1 est vérifiée. Donc, en vertu du lemme 1, on a $R'(0 , 1)$, soit $R(D , X)$.

PROPOSITION 9. - Soient p un nombre entier ≥ 0, et F un faisceau de groupes commutatifs sur un espace topologique X. Soit D un ouvert de X, possédant une extension $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ à X qui vérifie la condition : pour tout $\alpha\in[0, 1[$, il existe un ouvert $D' \supset\supset D_\alpha$ tel que l'application $H^p(D', F) \to H^p(D_\alpha, F)$ soit surjective. Alors l'application $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ est surjective.

Preuve. - On applique le lemme 2 en posant :

$$R(D, D') \iff \text{" } D \subset D' \text{ et l'application } H^p(D', F) \to H^p(D, F)$$
$$\text{est surjective".}$$

La condition (i) du lemme 2 est trivialement réalisée, et la condition (ii) est réalisée d'après la proposition 6. Enfin, soit $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ une extension de D à X, vérifiant l'hypothèse de la proposition 9 ; comme on a

$$\overline{D}_\alpha = \bigcap_{\gamma\in]\alpha,1]} D_\gamma \qquad ,$$

il existe

$$\beta \in]\alpha, 1] \text{ vérifiant } D_\beta \subset D' \qquad ;$$

l'application $H^p(D_\beta, F) \to H^p(D_\alpha, F)$ est alors surjective et la condition (iii) du lemme 2 est vérifiée. On a donc $R(D, X)$, et l'application $H^p(X, F) \to H^p(D,F)$ est surjective.

PROPOSITION 10. - Soient p un nombre entier ≥ 0, F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X et $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X adapté à F. Soit D un ouvert de X, possédant une extension $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ à X qui vérifie la condition : pour tout $\alpha \in [0, 1]$, il existe un ouvert $D' \supset\supset D_\alpha$ tel que l'image de l'application $Z^p(\mathfrak{U}|D', F) \to Z^p(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$ soit dense dans $Z^p(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$. Alors l'image de l'application $Z^p(\mathfrak{U}, F) \to Z^p(\mathfrak{U}|D, F)$ est dense dans $Z^p(\mathfrak{U}|D, F)$.

Preuve. - Analogue à célle de la proposition 9, en utilisant la proposition 7 et le lemme 2.

PROPOSITION 11. - Soient p un nombre entier ≥ 1, F un faisceau vectoriel topologique sur un espace topologique X, et $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X adapté à F et acyclique par rapport à F. Soit D un ouvert de X possédant une extension $(D_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ à X qui vérifie la condition : pour tout $\alpha \in [0, 1[$ existe $\beta \in]\alpha, 1]$ tel que l'application $H^p(D_\beta, F) \to H^p(D_\alpha, F)$ soit bijective et que l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\beta, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$ soit dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$. Alors l'application $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ est bijective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$.

Preuve. - On applique le lemme 2 en tenant compte de la proposition 8.

C. Preuve des théorèmes 4 et 5.

Preuve du théorème 4. - Soit D un ouvert de X, possédant une extension à X, quasi-p-convexe par rapport à F, et soit $(D_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ une telle extension ; $D = D_0$ étant quasi-p-convexe par rapport à F, on a $\dim H^p(D, F) < +\infty$ d'après le théorème 2. D'après le même théorème, l'extension considérée vérifie l'hypothèse de la proposition 9 ; l'application $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ est donc surjective.

Preuve du théorème 5. - Soit D un ouvert de X, possédant une extension à X, p-convexe par rapport à X, et soit $(D_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ une telle extension ; d'après le théorème 3, on a $\dim H^p(D, F) < +\infty$. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement de X adapté à F et à l'extension considérée, et acyclique par rapport à F ; pour tout $\alpha \in [0, 1[$, existent d'après la condition (ii) de la définition 9 un nombre $\beta \in]\alpha, 1[$ et deux ouverts D' et D'' vérifiant $D_\alpha \subset D_\beta \subsetneq D' \subset D''$, tels que les applications $H^p(D'', F) \to H^p(D_\beta, F)$ et $H^p(D', F) \to H^p(D_\alpha, F)$ soient bijectives et que l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D', F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$ soit dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$. Alors l'application $H^p(D_\beta, F) \to H^p(D_\alpha, F)$ est bijective et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\beta, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D_\alpha, F)$. Les hypothèses de la proposition 11 sont vérifiées, donc l'application $H^p(X, F) \to H^p(D, F)$ est bijective (d'où résulte $\dim H^p(X, F) < +\infty$) et l'image de l'application $Z^{p-1}(\mathfrak{U}, F) \to Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$ est dense dans $Z^{p-1}(\mathfrak{U}|D, F)$.

III. Preuve des théorèmes I et II.

Les démonstrations de [21] font appel à des propriétés analogues à celles données dans [18] et [19] concernant les fonctions plurisousharmoniques :

PROPOSITION 1. - *Soit φ une fonction fortement pseudoconvexe deux fois continûment différentiable sur un espace analytique complexe X. Pour tout point $x_0 \in X$, il existe un voisinage U de x et une fonction continue à valeurs complexes $f(x, t)$ définie dans $U \times [0, 1]$, vérifiant les conditions*

i. *pour tout* $t \in [0, 1]$, $f(x, t)$ *est une fonction holomorphe dans* U ;

ii. *pour tout* $t \in [0, 1]$, $\sigma_t = \{x ; x \in U, f(x, t) = 0\}$ *est un ensemble analytique de codimension* ≥ 1 *en chacun de ses points* ;

iii. $\sigma_0 \cap \{x ; x \in U, \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\} = \{x_0\}$;

iv. $\sigma_t \subset \{x ; x \in U, \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$ *pour* $t > 0$.

Preuve. - Cf. [20], lemme p. 357.

LEMME 1. - *Pour qu'une fonction φ à valeurs réelles, semi-continue supérieurement dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$, soit fortement pseudoconvexe, il faut et il suffit que, pour tout ouvert $U \subset\subset D$, existent un nombre réel $\delta > 0$ et une suite décroissante $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions indéfiniment différentiables dans U, tendant vers φ en tout point de U, tels que l'on ait $L(\varphi_i) \geq \delta \sum_{1 \leq j \leq n} dz_j\, d\bar{z}_j$ dans U pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Preuve. - Cf. [21] (§ 2, lemme 1). L'énoncé est d'ailleurs immédiat si l'on considère les régularisées de la distribution $t(\vec{\lambda}) = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_p\, \partial \bar{z}_q} \lambda_p \bar{\lambda}_q$ où les régularisées du "courant positif" $i \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_p\, \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q$, cf. [19] et l'exposé n° 1 de ce séminaire.

DÉFINITION 1. - On dit qu'une fonction φ à valeurs réelles, définie dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$, vérifie une *condition de Lipschitz* si et seulement si, pour tout compact $K \subset D$, il existe un nombre réel M tel que l'on ait

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| < M|x - x'|$$

pour tous $x \in K$, $x' \in K$ vérifiant $x \neq x'$.

LEMME 2. - Une fonction φ pseudoconvexe dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$ vérifie une condition de Lipschitz dans D si et seulement si, pour tout ouvert $U \subset\subset D$, il existe une suite $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions pseudoconvexes indéfiniment différentiables dans U , convergeant uniformément vers φ dans U , et un nombre réel C , tels que l'on ait $|\partial\varphi_i/\partial z_j| \leqslant C$ dans U pour $i \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Preuve. - Cf. [21] (§ 2, lemme 2).

LEMME 3. - Soit φ une fonction continue, fortement pseudoconvexe dans un espace analytique complexe X . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction fortement pseudoconvexe dans X , vérifiant $0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ dans X , et telle que, pour tout point x de X , il existe une famille finie $(\psi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de fonctions fortement pseudoconvexes indéfiniment différentiables dans un voisinage U de x , telles que l'on ait $\psi = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \psi_i$.

Preuve. - Cf. [21] (§2, lemme 5). La démonstration utilise le lemme 1.

PROPOSITION 2. - Soit D un ouvert relativement compact d'un espace analytique complexe X . Supposons que, pour tout point x_0 de la frontière de D , il existe une fonction φ continue et fortement pseudoconvexe dans un voisinage U de x_0 , une application biholomorphe τ de U sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert G de $\mathbb{C}^n$, et une fonction fortement pseudoconvexe ψ vérifiant une condition de Lipschitz dans G , de telle sorte que l'on ait

$$U \cap D = \{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) < 0\} \text{ et } \varphi = \psi \circ \tau \quad .$$

Il existe alors une fonction $\tilde{\varphi}$, continue et fortement pseudoconvexe dans un voisinage V de la frontière de D , telle que l'on ait

$$V \cap D = \{x \; ; \; x \in V \, , \; \tilde{\varphi}(x) < 0\} \quad .$$

Preuve. - Cf. [21], (3.2). La démonstration utilise les lemmes 1 et 2.

1. Théorèmes d'approximation et preuve du théorème II.

DÉFINITION 2. - Une paire (X' , X) d'espaces analytiques complexes est appelée paire de Runge si X' est un sous-ensemble ouvert de X et si toute fonction holomorphe dans X' peut être approchée, arvitrairement et uniformément sur tout compact, par des fonctions holomorphes dans X .

PROPOSITION 3 (STEIN [34]). - Pour qu'un ouvert X' d'un espace de Stein X soit convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans X (i. e. pour que l'intersection de X' et de l'enveloppe holomorphiquement convexe de tout compact de X' dans X soit compacte), il faut et il suffit que X' soit un espace de Stein et que (X', X) soit une paire de Runge.

PROPOSITION 4 (STEIN [34]). - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces analytiques complexes dénombrables à l'infini, tels que (X_n, X_{n+1}) soit une paire de Runge pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Alors (X_n, X) est une paire de Runge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 5 (STEIN [34]). - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Stein connexes, tels que (X_n, X_{n+1}) soit une paire de Runge pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est un espace de Stein et (X_n, X) est une paire de Runge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1. - La proposition 4 résulte immédiatement de la proposition 7 de II, et la proposition 5, de la proposition 8 de II et du théorème 4 de I.

DÉFINITION 3. - Une famille continue de fonctions holomorphes sur un espace analytique complexe X est une application continue du segment unité $[0, 1]$ dans $I(X)$ (munie de la topologie de la convergence compacte). Une famille continue de fonctions méromorphes sur un espace analytique complexe X est une application $t \to f_t$ de $[0, 1]$ dans l'ensemble des fonctions méromorphes sur X, telle que pour tout $x \in X$ existent des familles continues $t \to g_t$ et $t \to h_t$ de fonctions holomorphes dans un voisinage U de x, vérifiant $f_t = g_t/h_t$ dans U.

THÉORÈME 1. - Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace de Stein X, et, pour tout $U \in \mathcal{U}$, soit $t \to f_t^U$ une famille continue de fonctions méromorphes dans U, telle que, pour tous $t \in [0, 1]$, $U \in \mathcal{U}$ et $U' \in \mathcal{U}$, $f_t^U - f_t^{U'}$ soit holomorphe dans $U \cap U'$. Alors il existe une famille continue $t \to F_t$ de fonctions méromorphes dans X, telle que $F_t - f_t^U$ soit holomorphe dans U pour tous $t \in [0, 1]$ et $U \in \mathfrak{U}$.

Preuve. - Cf. [20], p. 359-361.

THÉORÈME 2. - Soient X un espace de Stein, et $(D_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ une famille d'ouverts de X, relativement compacts pour $\alpha \in [0, 1[$, vérifiant les conditions :

i. $\bigcup_{\beta\in[0,\alpha[} \overline{D}_\beta = D_\alpha$ pour $\alpha \in]0, 1]$, $D_1 = X$;

ii. pour tout $\alpha \in [0, 1[$, il existe une fonction continue et pseudoconvexe φ dans un voisinage U de $K_\alpha = \bigcap_{\beta\in]\alpha,1[} D_\beta - D_\alpha$, telle que l'on ait $\varphi(x) < 0$ pour $x \in U \cap D_\alpha$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x \in K_\alpha$.

Alors D_0 est un espace de Stein et (D_0, X) est une paire de Runge.

Preuve. - Cf. [21], § 4. La démonstration utilise la proposition 1 de I, le lemme 3, la proposition 1 et le théorème 1.

COROLLAIRE 1. - Si φ est une fonction continue pseudoconvexe sur un espace de Stein X, alors $X_\alpha = \{x ; x \in X, \varphi(x) < \alpha\}$ est un espace de Stein et (X_α, X) une paire de Runge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME 3. - L'ensemble des fonctions continues fortement pseudoconvexes sur un espace analytique complexe X est un ensemble de fonctions 1-convexes par rapport à tout faisceau analytique cohérent sur X.

En effet, le corollaire 1 permet de réaliser les conditions de la définition 4 de II.

Preuve du théorème II. - La fonction e^φ est positive et fortement pseudoconvexe dans $X - K$; on sait qu'il en est ainsi de toute $f(\varphi)$, f positive, croissante convexe ; cf. [18]. La fonction $\theta = e^\varphi + \psi$ est continue dans X et fortement pseudoconvexe dans $X - K$, et l'ensemble $\{x ; x \in X, \theta(x) < \alpha\}$ est relativement compact pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Grâce au théorème 3, la conclusion du théorème II résulte alors du théorème 7 de II.

Le théorème 3 a été généralisé par ANDREOTTI et GRAUERT [1] qui ont prouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - L'ensemble des fonctions fortement p-pseudoconvexes indéfiniment différentiables sur un espace analytique complexe X est un ensemble de fonctions p-convexes par rapport à tout faisceau analytique cohérent sur X .

Compte tenu du théorème 7 de II, on obtient alors

THÉORÈME 5. - Soit F un faisceau analytique cohérent sur un espace analytique complexe X ; supposons qu'il existe un compact K de X et une fonction φ continue dans X , fortement p-pseudoconvexe et indéfiniment différentiable dans $X - K$, telle que $X_\alpha = \{x ; x \in X , \varphi(x) < \alpha\}$ soit relativement compact pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors on a $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X , F) < + \infty$ pour $q \geqslant p$. Pour tous $\alpha > \sup_{x \in K} \varphi(x)$ et $q \geqslant p$, l'application $H^q(X , F) \to H^q(X_\alpha , F)$ est bijective.

Nous ne pouvons exposer ici les théorèmes analogues relatifs aux espaces q-pseudoconcaves, établis dans [1].

2. Preuve du théorème I.

PROPOSITION 3. - Soit D un ouvert relativement compact d'un espace analytique complexe X . Supposons que, pour tout point x de la frontière de D , il existe une application biholomorphe τ d'un voisinage U de x sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert G de $\mathbb{C}^n$, et une famille $(\psi_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de fonctions fortement pseudoconvexes deux fois continûment différentiables dans G , de telle sorte que l'on ait

$$U \cap D = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \{x ; x \in U , \varphi_i(x) < 0\}$$

où $\varphi_i = \psi_i \circ \tau$. Alors D est de type fini.

Ceci résulte immédiatement de la proposition 2 et du théorème II.

Pour prouver le théorème I, on construit alors une suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de X vérifiant chacun les hypothèses de la proposition 3 (donc holomorphiquement convexes); tels que l'on ait

$$D_n \subset\subset D_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \qquad ,$$

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \qquad ,$$

et pour lesquels on établit successivement :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble analytique compact maximal de dimension > 0 dans D_{n+1} (qui existe d'après la proposition 3) est contenu dans D_n ;

ii. il existe un espace analytique D' et une application holomorphe propre π de D sur D', tels que $D'_n = \pi(D_n)$ soit la réduction de D_n conformément au théorème 5 de I, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

iii. (D'_n , D'_{n+1}) est une paire de Runge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors D' est un espace de Stein d'après la proposition 5, et le théorème I est démontré. Pour les détails de la démonstration, voir [21] (§ 3, part (iv)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.) - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962 (à paraître).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles, Chapitre 3 : Ensembles ordonnés, Cardinaux, Nombres entiers. - Paris, Hermann, 1956 (Act. scient. et ind., 1243 ; Eléments de Mathématique, 20).

[3] BREMERMANN (Hans J.). - Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, t. 128, 1954, p. 63-91.

[4] CARTAN (Henri). - Quotients of complex analytic spaces, Papers communicated to the International colloquium on function theory [1960. Bombay] ; p. 1-15. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960.

[5] CARTAN (H.) und THULLEN (P.). - Zur Theorie des Singlaritäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen, t. 106, 1932, p. 617-647.

[6] DOCQUIER (F.) und GRAUERT (H.). - Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 94-123.

[7] FRENKEL (Jean). - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 135-220 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[8] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.

[9] GRAUERT (Hans). - On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 460-472.

[10] GRAUERT (Hans). - Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes, Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Topologie algébrique et géométrie différentielle [89. 1959. Lille], Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 341-350.

[11] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Konvexität in der komplexen Analysis, Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie, Comment. Math. Helvet., t. 31, 1956, p. 152-183.

[12] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Espaces analytiquement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 882-885.

[13] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math., t. 3, 1954, p. 57-123.

[14] GROTHENDIECK (Alexander). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 1-7.

[15] IWAHASCHI (Ryosuke). - Domains spread on a complex space, J. Math. Soc. Japan, t. 9, 1957, p. 452-463.

[16] KERNER (Hans). - Holomorphiehüllen zu K-vollständigen komplexen Räumen, Math. Annalen, t. 138, 1959, p. 316-328.

[17] LELONG (Pierre). - Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. Anal. math., Jérusalem, t. 2, 1952, p. 178-208.

[18] LELONG (Pierre). - La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 31, 1952, p. 191-219.

[19] LELONG (Pierre). - Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 263-303.

[20] NARASIMHAN (Raghavan). - The Levi problem for complex spaces, Math. Annalen, t. 142, 1961, p. 355-365.

[21] NARASIMHAN (Raghavan). - The Levi problem for complex spaces, II. (à paraître).

[22] NORGUET (François). - Sur les domaines d'holomorphie des fonctions de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), Bull. Soc. math. France, t. 82, 1954, p. 137-159.

[23] NORGUET (François). - Problème de Levi et plongement des variétés analytiques réelles, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 173, 21 pages.

[24] NORGUET (François). - Un théorème de finitude pour la cohomologie des faisceaux, Atti Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti, Série 8, t. 31, 1961, p. 222-224.

[25] NORGUET (François). - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 234, 15 pages.

[26] OKA (Kiyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI : Domaines pseudoconvexes, Tôhoku math. J., t. 49, 1942, p. 15-52.

[27] OKA (Kiyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX : Domaines finis sans point critique intérieur, Japan. J. Math., t. 23, 1953, p. 97-155.

[28] REMMERT (Reinhold). - Reduction of complex spaces, Seminars on analytic functions, Volume 1 ; p. 190-205. - Princeton, Institute for advanced Study, 1957 (multigraphié).

[29] ROTHSTEIN (Wolfgang). - Bemerkungen zur Theorie komplexer Räume, Math. Annalen, t. 137, 1959, p. 304-315.

[30] SCHEJA (Günter). - Verzweigte Holomorphiehüllen, Sitz. math.-naturw. Abt. bayr. Akad. Wiss., 1958, p. 9-18.

[31] SCHEJA (Günter). - Über das Auftreten von Holomorphie- und Meromorphiegebieten, die nicht holomorph-konvex sind, Math. Annalen, t. 140, 1960, p. 33-50.

[32] SCHEJA (Günter). - Der Durchschnittssatz für Holomorphiegebiete, Math. Annalen, t. 142, 1961, p. 366-384.

[33] Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, Ecole Normale Supérieure, 1952 (multigraphié).

[34] STEIN (Karl). - Überlagerung holomorph-vollständiger komplexer Räume, Archiv der Math., t. 7, 1956, p. 354-361.

[35] THULLEN (P.). - Zur Theorie der Funktionen zweier komplexer Veränderlichen, Die Regularitätshüllen, Math. Annalen, t. 106, 1932, p. 64-72.

[36] TOGARI (Yoshio). - On ramified Riemann domains, Nagoya math. J., t. 14, 1959, p. 173-191.