GEORGES GLAESER

Fonctions composées différentiables

Séminaire Lelong. Analyse, tome 5 (1962-1963), exp. nº 2, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1962-1963__5__A2_0>

FONCTIONS COMPOSÉES DIFFÉRENTIABLES

par Georges GLAESER

Notations. – ω (resp. Ω) est un ensemble ouvert de R^n (resp. R^N) ($n \geqslant N$) ; les lettres minuscules (resp. majuscules) désignent des notions relatives à ω (resp. Ω).

Soit θ une application C^∞ de source ω, de but Ω, et d'image $\theta(\omega)$. La composition $F \to F \circ \theta$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{E}(\omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ (espaces de fonctions C^∞ munis de leur topologie usuelle d'espace de Fréchet). L'image de $\mathcal{E}(\Omega)$ par cette composition est une sous-algèbre $\mathfrak{A}_\theta$ de $\mathcal{E}(\omega)$.

Une série formelle à coefficients réels, à n ou N indéterminées, sera notée par une lettre affectée d'un astérisque : la série formelle de Taylor en $a \in \omega$ d'une fonction $f \in \mathcal{E}(\omega)$ sera notée f_a^*.

Une fonction C^∞ est plate sur un ensemble si elle s'y annule, ainsi que toutes ses dérivées partielles.

Une fonction f appartient à $\mathfrak{A}_\theta$ sur un ensemble $e \subset \omega$, s'il existe $F \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que $f - F \circ \theta$ soit plate sur e.

Une fonction appartient ponctuellement (resp. biponctuellement) à $\mathfrak{A}_\theta$ si elle appartient à $\mathfrak{A}_\theta$ sur tout ensemble réduit à un seul point (resp. deux points).

Exemple. – $\omega = R$ et $\Omega = R$. Considérons l'application θ définie par $x \to X = x^2$. WHITNEY a montré [4] que l'algèbre $\mathfrak{A}_\theta$ correspondante est identique à l'algèbre des fonctions C^∞ paires : cette algèbre est identique à l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{E}(R)$ qui appartiennent biponctuellement à $\mathfrak{A}_\theta$. Mais l'ensemble des fonctions qui appartiennent ponctuellement à $\mathfrak{A}_\theta$ est l'ensemble des fonctions C^∞ dont les dérivées d'ordre impair s'annulent à l'origine ; il est donc différent de $\mathfrak{A}_\theta$.

THÉORÈME 1. – Supposons que θ satisfasse aux conditions Θ_i ci-dessous. Alors $\mathfrak{A}_\theta$ est identique à l'ensemble des fonctions qui appartiennent biponctuellement à $\mathfrak{A}_\theta$.

THÉORÈME 2. — Si θ satisfait aux conditions Θ_i l'algèbre $\mathfrak{a}_\theta$ est fermée dans $\mathcal{E}(\omega)$.

Voici ces conditions Θ_i

Θ_1 : θ est une application analytique réelle.

Θ_2 : Le rang de l'application θ est égal à N (rappelons que $n \geqslant N$) sur un ouvert partout dense de ω .

Θ_3 : L'image $\theta(\omega)$ est fermée dans Ω .

Θ_4 : Pour tout compact $K \subset \theta(\omega)$ il existe un compact $k \subset \omega$ tel que $\theta(k) = K$.

Indications sommaires sur la démonstrationdu théorème 1. — Soit f une fonction appartenant biponctuellement à $\mathfrak{a}_\theta$.

Soit $a \in \omega$ et $A = \theta(a)$. On montre facilement que Θ_1 et Θ_2 impliquent l'existence et l'unicité d'une série formelle F_A^* telle que :

$$f_a^* = F_A^* \circ \theta_a^* \tag{1}$$

(la série formelle composée ayant ici une signification évidente).

On définit ainsi sur $\theta(\omega)$ un champ de séries formelles $A \to F_A^*$.

La méthode consistera à montrer que ce champ peut se "prolonger" en une fonction C^∞ , grâce au théorème du prolongement de Whitney.

Pour cela on aura besoin de montrer que chacun des coefficients de F_A^* varie continûment sur $\theta(\omega)$; ce sera facile pour le coefficient constant ; mais la continuité des coefficients des termes du premier degré est déjà un résultat profond : nous nous bornons ici à montrer où se trouve la difficulté en exposant le cas où $n = N = 1$.

En dérivant (1) formellement on trouve

$$\frac{df_a^*}{dx} = \frac{d\theta_a^*}{dx}\left(\frac{dF_A^*}{dX} \circ \theta_a^*\right) \tag{2}$$

Le terme constant du premier membre est $\frac{df}{dx}(a)$. La fonction $a \to \frac{df}{dx}(a)$ est une fonction C^∞ qui, d'après le théorème de synthèse spectrale de Whitney [5], est adhérente à l'idéal engendré par $\frac{d\theta}{dx}$ (l'égalité (2) exprime que df/dx appartient ponctuellement à cet idéal).

Mais d'après un théorème de Lojasewicz [2], tout idéal de $\mathcal{E}(\omega)$, engendré par une fonction analytique réelle, est fermé. Ceci permet d'affirmer que le quotient de df/dx par $d\theta/dx$ est une fonction C^∞.

On en déduit que le coefficient constant de dF^*_A/dX (c'est-à-dire le coefficient du terme du premier degré de F^*_A) varie continûment sur $\theta(\omega)$. La continuité des autres coefficients s'établit par récurrence.

Désignons par $F_A^{[m]}$ le polynôme-section obtenu en ne gardant dans F^*_A que les termes de degré $\leq m$. Le théorème du prolongement de Whitney affirme que, pour que le champ de série formelle F^*_A défini sur $\theta(\omega)$ puisse se prolonger en une fonction C^∞ sur Ω, il faut et il suffit que certaines inégalités (W) soient satisfaites ; ces inégalités sont analogues à

$$|F_A^{[m]}(B) - F_B^{[m]}(B)| \leq ||AB||^m.O(||AB||) \quad .$$

$|| \ ||$ est une distance euclidienne.

Les inégalités (W) doivent être satisfaites pour tout m. Lorsque A et B décrivent un compact K de $\theta(\omega)$, la fonction O doit être un module de continuité ne dépendant que de m et K.

Or, il est facile de vérifier des inégalités telles que

$$|F_A^{[m]}(B) - F_B^{[m]}(B)| \leq ||ab||^{m'} \quad O(||ab||)$$

où m est un entier supérieur ou égal à m', et où $\theta(a) = A$ et $\theta(b) = B$.

Il suffirait, pour conclure, de disposer d'une majoration de $||ab||$ en fonction de $||\theta(a) \ \theta(b)||$. Malheureusement une telle majoration n'existe pas, car deux points très éloignés dans ω peuvent être appliqués par θ sur un même point.

Cela explique que la fin de la démonstration fait intervenir une certaine inégalité géométrique, qui est d'ailleurs une conséquence facile de l'inégalité de Lojasewicz. Cette inégalité affirme qu'à deux points a et b de ω, il est possible d'associer deux points c_1 et c_2 tels que $\theta(c_1) = \theta(c_2)$ et que

$$||ac_1|| + ||bc_2|| \leq \Gamma||\theta(a) \ \theta(b)||^{1/\rho}$$

où Γ et ρ restent constants lorsque a et b décrivent un compact de ω.

La fin de la démonstration du théorème 1, c'est-à-dire la vérification des inégalités (W), n'utilise plus que de la technique de calcul taylorien.

La démonstration du théorème 2 repose sur la théorie des espaces de Fréchet et sur le théorème 1.

Application. - Le théorème 2 permet de démontrer le théorème de Newton différentiable. Toute fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de classe C^∞ symétrique par rapport aux variables x_i s'exprime en une fonction C^∞ par rapport aux fonctions symétriques élémentaires.

Nous profitons de cet exposé pour signaler que toute distribution "symétrique" s'identifie à un élément du dual de l'espace des fonctions $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à support compact et symétriques. Par dualité, le théorème 2 montre alors que toute distribution symétrique s'identifie à une distribution par rapport aux variables σ_i dont le support est contenu dans l'ensemble de l'espace des σ_i dont les points satisfont à la propriété suivante :

"L'équation $X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} \ldots = 0$ n'a que des racines réelles."

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLAESER (Georges). - Fonctions composées différentiables, Annals of Math., Series 2, t. 76, 1962 (à paraître).

[2] LOJASEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.

[3] WHITNEY (Hassler). - Analytic extensions of differentiable functions defined in closet sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

[4] WHITNEY (Hassler). - Differentiable even functions, Duke math. J., t. 10, 1948, p. 159-160.

[5] WHITNEY (Hassler). - On ideals of differentiable functions, Amer. J. of Math., t. 70, 1948, p. 635-658.