BERNARD MALGRANGE

Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. nº 7, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A6_0>

SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET LES ENSEMBLES ANALYTIQUES

par Bernard MALGRANGE

1. Rappels sur les anneaux analytiques.

Soit $\underset{\sim}{R}\{x_1 , \ldots , x_n\}$ (resp. $R[[x_1 , \ldots , x_n]]$) l'anneau des séries à n indéterminées, convergentes au voisinage de 0 (resp. formelles), à coefficients réels. Nous appellerons anneau analytique réel (resp. formel réel) un anneau du type $\underset{\sim}{R}\{x_1 , \ldots , x_n\}/\mathfrak{P}$ (resp. $\underset{\sim}{R}[[x_1 , \ldots , x_n]]/\mathfrak{P}$), où $\mathfrak{P}$ est un idéal de $\underset{\sim}{R}\{x_1 , \ldots , x_n\}$ (resp. $\underset{\sim}{R}[[x_1 , \ldots , x_n]]$). Ces anneaux contiennent de manière canonique un sous-anneau isomorphe à $\underset{\sim}{R}$ (les "constantes").

Définitions analogues avec $\underset{\sim}{C}$ au lieu de $\underset{\sim}{R}$.

Nous allons rappeler rapidement certaines propriétés de ces anneaux, pour lesquelles nous renvoyons à [8] $\cup$ [9] $\cup$ [10] (et, en particulier, à l'appendice de ce dernier article). Certaines propriétés indiquées ici n'y sont mentionnées que dans le cas complexe : le lecteur les étendra immédiatement au cas réel.

$\underset{\sim}{1}$. - Un anneau analytique (resp. formel) A est <u>local</u> (i. e. possède un plus grand idéal $\mathfrak{M}$, formé de tous les éléments inversibles de A), et <u>noethérien</u>.

On munit A de la structure d'anneau topologique pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les $\mathfrak{M}^p$ $(p \in \underset{\sim}{N})$; muni de cette topologie, A est <u>séparé</u>, autrement dit $\bigcap_p \mathfrak{M}^p = \{0\}$ (théorème de Krull). Si $\mathfrak{P}$ est un idéal de A, le résultat précédent appliqué à $B = A/\mathfrak{P}$ signifie que $\mathfrak{P}$ est toujours <u>fermé</u>.

$\underset{\sim}{2}$. - Désignons par $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie précédente (lorsque $A = \underset{\sim}{R}\{x_1 , \ldots , x_n\}$, on a trivialement $\hat{A} = \underset{\sim}{R}[[x_1 , \ldots , x_n]]$). Si $\mathfrak{P}$ est un idéal de A, son complété $\hat{\mathfrak{P}}$ (i. e. son adhérence dans $\hat{A}$) est identique à l'idéal $\hat{A}\mathfrak{P}$ de $\hat{A}$ engendré par $\mathfrak{P}$, puisque $\mathfrak{P}$ est dense dans $\hat{A}\mathfrak{P}$, et que $\hat{A}\mathfrak{P}$ est fermé. D'autre part, si l'on pose $B = A/\mathfrak{P}$, on a $\hat{B} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$.

De là résulte immédiatement que le complété d'un anneau analytique est un anneau formel, et que tout anneau formel est complet. Il en résulte aussi trivialement que, $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ étant deux idéaux de A, on a $(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})\hat{} = \hat{\mathfrak{P}} + \hat{\mathfrak{Q}}$.

3. - $\hat{A}$ est un A-module <u>fidèlement plat</u>, ce qui signifie ceci :

a. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal de A, $\hat{A}\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{P}$

b. $\hat{A}$ est un A-module plat ; autrement dit, si l'on a une suite exacte de A-modules $M' \to M \to M''$ la suite

$$\hat{A} \otimes_A M' \to \hat{A} \otimes_A M \to \hat{A} \otimes_A M''$$

est exacte.

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal de A. En appliquant ce dernier résultat à la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{P} \to A \to A/\mathfrak{P} \to 0$$

on trouve que $\hat{\mathfrak{P}}$ (resp. $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$) s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{P}$ (resp. $\hat{A} \otimes_A A/\mathfrak{P}$).

Soit $\mathfrak{Q}$ un autre idéal de A. En appliquant (b) à la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\delta} A/\mathfrak{P} \oplus A/\mathfrak{Q}$$

[où i désigne l'injection, et δ l'application diagonale $a \to (a \bmod \mathfrak{P}, a \bmod \mathfrak{Q})$], on trouve le résultat suivant :

$$(\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q})\hat{} = \hat{\mathfrak{P}} \cap \hat{\mathfrak{Q}}$$

(voir dans [8] une autre démonstration de ce résultat).

4. - Soit A un anneau analytique (réel, par exemple), et $a_1, \dots, a_k$ des éléments de A. Pour toute série convergente $f \in \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\}$, on définit de manière évidente l'élément $f(a_1, \dots, a_k)$ de A (et de même avec les anneaux formels f étant cette fois une série formelle). On dit que $a_1, \dots, a_k$ sont analytiquement indépendants si l'application $\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\} \to A$ ainsi définie est injective, et l'on définit de même des éléments formellement indépendants d'un anneau formel.

Lorsque A est un anneau analytique <u>intègre</u>, on appelle dimension de A et l'on note $\dim(A)$ le nombre maximum k d'éléments analytiquement indépendants de A. On peut alors trouver $a_1, \dots, a_k \in A$ tels que A soit un $\mathbb{R}\{a_1, \dots, a_k\}$-module de type fini ("lemme de normalisation"). Si A est réalisé comme un quotient

$\underset{\sim}{R}\{x_1, \dots, x_n\}/\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$, un idéal premier), on peut prendre, en faisant au besoin un changement linéaire de coordonnées :

$$a_j = x_j \mod \mathfrak{P} \qquad (1 \leq j \leq k) \qquad ,$$

et on peut supposer que $a_{k+1} = x_{k+1} \mod \mathfrak{P}$ engendre le corps des fractions $\overline{A}$ de A sur le corps des fractions $\overline{B}$ de $B = \underset{\sim}{R}\{a_1, \dots, a_k\}$. D'après un lemme élémentaire, tout élément c de $\overline{A}$ entier sur B (en particulier, tout élément de A) s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme suivante :

$$c = \frac{P(a_{k+1})}{\Delta} \qquad ,$$

P étant un polynôme de degré $< p = [\overline{A} : \overline{B}]$, à coefficients dans B, et Δ étant le discriminant du polynôme minimal de a_{k+1} sur $\overline{B}$ (lequel polynôme a ses coefficients dans B, puisque B, étant isomorphe à $\underset{\sim}{R}\{x_1, \dots, x_k\}$ est factoriel, donc intégralement clos).

Soit $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) l'idéal maximal de A (resp. B). D'après un théorème de Krull la topologie définie sur A par les $A\mathfrak{N}^p$ induit sur B sa topologie naturelle ; montrons qu'il en est de même pour A ; $A/A\mathfrak{N}$ est un module de type fini sur $B/\mathfrak{N} \approx \underset{\sim}{R}$, donc un anneau d'Artin ; par conséquent $A\mathfrak{N}$ est $\mathfrak{M}$-primaire, et l'on a $A\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}^r$ pour un entier $r > 0$: d'où le résultat. On en déduit que l'application canonique $A \otimes_B \hat{B} \to \hat{A}$ est bijective [10] et (trivialement), que l'application canonique $\hat{B} \to \hat{A}$ est injective (en fait, les mêmes raisonnements valent pour un couple (A, B) d'anneaux analytiques, avec $A \supset B$ de type fini sur B).

Il en résulte immédiatement que $a_1, \dots, a_k$ sont <u>formellement indépendants</u> dans $\hat{A}$. Par contre, nous allons démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> $\mathfrak{I}$ <u>un idéal de</u> $\hat{A}$, <u>avec</u> $\mathfrak{I} \neq \{0\}$. <u>Les</u> $a_j \mod \mathfrak{I}$ <u>ne sont pas formellement indépendants dans</u> $\hat{A}/\mathfrak{I}$ (<u>autrement dit</u> : $\hat{B} \cap \mathfrak{I} \neq \{0\}$).

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant, dont la démonstration nous a été communiquée par J.-P. SERRE.

THÉORÈME 1. - <u>Dans les hypothèses précédentes</u> (i. e. A <u>anneau analytique intègre</u>), $\hat{A}$ <u>est un anneau intègre</u>.

On se ramène immédiatement au cas complexe en adjoignant au besoin à $\overline{A}$ une racine i de l'équation $X^2 + 1 = 0$, et en remplaçant A par $A[i]$; dans la suite, nous supposerons donc A analytique complexe, et nous garderons les notations précédentes en y remplaçant $\underset{\sim}{R}$ par $\underset{\sim}{C}$.

On établit alors le théorème 1, par récurrence sur la dimension de A ; pour cela, désignons par (T_k) l'énoncé précédent pour les anneaux de dimension $\leq k$, et par (T'_k) le même énoncé pour les anneaux normaux (i. e. intègres et intégralement clos) de dimension $\leq k$.

a. $(T'_k) \Longrightarrow (T_k)$. - Soit D la fermeture intégrale de A (ou, ce qui revient au même, de B) dans $\overline{A}$. Il est connu (cf. par exemple [2] ou [3]) que D est un anneau analytique, et de même dimension k que A. Comme D est un A-module de type fini, l'application $\hat{A} \to \hat{D}$ est injective (reprendre le raisonnement fait plus haut pour démontrer que l'application $\hat{B} \to \hat{A}$ est injective).

D est normal par construction, donc $\hat{D}$ est intègre, et $\hat{A}$, qui est un sous-anneau de $\hat{D}$, est intègre.

b. $(T_{k-1}) \Longrightarrow (T'_k)$. - On emploie ici une variante d'un raisonnement de ZARISKI [11]. Soit A un anneau analytique intègre de dimension k ; on sait que, $\mathfrak{P}$ étant un idéal premier de A, différent de $\{0\}$, $A/\mathfrak{P}$ est de dimension $\leq k-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ est intègre, donc $\hat{\mathfrak{P}}$ premier (en particulier $\hat{A}/\hat{\mathfrak{P}}$ n'a pas d'éléments nilpotents, i. e. $\mathfrak{P}$ n'est pas ramifié dans $\hat{A}$).

Supposons A normal, et soit $B = \underset{\sim}{C}\{a_1, \ldots, a_k\}$ un sous-anneau de A, isomorphe à $\underset{\sim}{C}\{x_1, \ldots, x_k\}$, tel que A soit de type fini sur B. En appliquant au couple (A, B) un lemme de NAGATA ([7], paragraphe 4, lemme 3), on trouve que $\hat{A}$ est normal, donc intègre. D'où le théorème.

La démonstration de la proposition 1 est maintenant immédiate. Soit $\overline{\hat{A}}$ (resp. $\overline{\hat{B}}$) le corps des quotients de $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$) ; comme $\hat{A} \approx \hat{B} \otimes_B A$, $\hat{A}$ est de type fini sur $\hat{B}$, donc le sous-anneau $\overline{\hat{B}}[\hat{A}]$ de $\overline{\hat{A}}$ engendré par $\overline{\hat{B}}$ et $\hat{A}$ est un corps ; donc $\overline{\hat{A}} = \overline{\hat{B}}[\hat{A}]$. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal $\neq \{0\}$ de $\hat{A}$, et soit $f \in \mathfrak{I}$, $f \neq 0$. On a, dans $\hat{A}$,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g}\, h \quad \text{avec} \quad g \neq 0 \, , \quad g \in \hat{B} \, , \quad h \in \hat{A}$$

d'où

$$g = fh \in \mathfrak{I} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I} \cap \hat{B} \neq \{0\} \, .$$

C. Q. F. D.

REMARQUE. - On notera que le théorème 1 était nécessaire pour établir le résultat précédent : Soit en effet B un anneau intègre et A un sur-anneau commutatif non intègre de B : il existe toujours un idéal $\mathfrak{I}$ non trivial de A vérifiant $\mathfrak{I} \cap B = \{0\}$ (s'il existe un $b \in B$, $b \neq 0$ qui soit diviseur de 0 dans A, il suffit de prendre pour $\mathfrak{I}$ l'annulateur de b dans A. Sinon, soit $a \in A$ un diviseur de zéro ; il suffit de prendre $\mathfrak{I} = (a)$).

2. Sur les germes de fonctions différentiables.

Désignons par $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$ l'anneau des germes de fonctions (indéfiniment) [1] dérivables au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles ; si f est un tel germe, nous noterons $\hat{f} \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ sa série de Taylor formelle en 0. Il est bien connu que l'application $f \to \hat{f}$ est surjective, i. e. que toute série formelle est de la forme $\hat{f}$ pour un germe f.

Si g est une fonction dérivable dans un voisinage ouvert de 0 nous noterons g_0 son germe en 0, et g sera appelé "un représentant de g_0 ".

DÉFINITION 1. - Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ adhérent à 0, et g une fonction dérivable au voisinage de 0. Nous dirons que g (ou : que son germe g_0) a un zéro d'ordre infini en 0 sur E (ou : sur le germe E_0 de E en 0) si, $\forall\ p \in \mathbb{N}$, il existe un voisinage $\mathcal{O}_p$ de 0 et un nombre $C_p > 0$ tels que, dans $E \cap \mathcal{O}_p$, on ait $|g(x)| \leq C_p \|x\|^p$ (ici, et, dans la suite, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$).

La propriété précédente ne dépend en fait que de la série de Taylor de f en 0, (puisque une fonction, dont la série de Taylor est nulle en 0, a un zéro d'ordre infini en 0 sur $\mathbb{R}^n$) ; l'ensemble des séries formelles provenant de fonctions ayant un zéro d'ordre infini en 0 sur E forme un idéal de $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ que nous appellerons "idéal formel du germe E_0 " et que nous noterons $\mathfrak{I}(E_0)$.

Supposons maintenant que E soit un ensemble analytique réel au voisinage de 0 ; pour ne pas avoir à écrire constamment des indices, nous poserons $E_0 = V$. Soit $\mathfrak{I}(V) \subset \mathbb{R}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'idéal analytique de V, i. e. l'ensemble des

---

[1] Dans la suite, nous omettrons le mot "indéfiniment".

germes de fonctions analytiques en 0 (identifiés à des séries convergentes) nuls sur V. L'objet essentiel de cet exposé est le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - $\widehat{\mathfrak{I}(V)} = \mathfrak{I}(V)$.

[Autrement dit : pour que $f \in \underset{\sim}{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ait un zéro d'ordre infini en 0 sur V, il faut et il suffit que l'on ait : $\hat{f} \in \widehat{\mathfrak{I}(V)}$.]

Il suffit d'établir ce résultat lorsque V est (analytiquement) irréductible : soient en effet $V_1, \ldots, V_p$ les composantes irréductibles de V ; on a

$$\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(V_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{I}(V_p) ,$$

d'où (paragraphe 1) ;

$$\widehat{\mathfrak{I}(V)} = \widehat{\mathfrak{I}(V_1)} \cap \ldots \cap \widehat{\mathfrak{I}(V_p)} ,$$

et aussi évidemment

$$\mathfrak{I}(V) = \mathfrak{I}(V_1) \cap \ldots \cap \mathfrak{I}(V_p) ;$$

si le résultat est vrai pour $V_1, \ldots, V_p$, il sera par conséquent vrai pour V.

Supposons donc V irréductible. Dans ce cas $\mathfrak{I}(V)$ est premier, et $A = \underset{\sim}{R}\{x_1, \ldots, x_n\}/\mathfrak{I}(V)$ est intègre ; soit k la dimension de A (qui, par définition, est égale à la dimension de V) ; on peut supposer (paragraphe 1) que les $a_j = x_j \mod \mathfrak{I}(V)$, $(1 \leq j \leq k)$, sont analytiquement indépendants, et que A est un $\underset{\sim}{R}\{a_1, \ldots, a_k\}$-module de type fini (dans la suite, nous poserons $B = \underset{\sim}{R}\{a_1, \ldots, a_k\}$ et nous écrirons $x_1, \ldots, x_k$ au lieu de $a_1, \ldots, a_k$, ce qui n'amènera aucune confusion).

On a évidemment : $\mathfrak{I}(V) \supset \widehat{\mathfrak{I}(V)}$; d'après la proposition 1, pour démontrer qu'on a $\mathfrak{I}(V) = \widehat{\mathfrak{I}(V)}$, il suffit de démontrer le résultat suivant :

$$(A_1) \qquad \mathfrak{I}(V) \cap \underset{\sim}{R}[[x_1, \ldots, x_k]] = \{0\}$$

(Autrement dit : toute fonction $f(x_1, \ldots, x_k)$ dérivable au voisinage de 0 ayant un zéro d'ordre infini en 0 sur V a une série de Taylor identiquement nulle).

Avant de transformer cette condition par une projection sur $\underset{\sim}{R}^k$, nous allons rappeler quelques propriétés des germes analytiques réels. Conservons les notations précédentes, et posons $a_j = x_j \mod \mathfrak{I}(V)$ $(k+1 \leq j \leq n)$. Pour

$j = k+1, \dots, n$, il existe un polynôme $P_j \in B[X]$ distingué (i. e. unitaire, les coefficients des termes non-dominants étant nuls à l'origine) et irréductible, tel qu'on ait $P_j(a_j) = 0$; on peut aussi supposer que a_{k+1} engendre le corps des fractions $\overline{A}$ de A sur le corps des fractions $\overline{B}$ de B, et que les P_j sont les polynômes minimaux des a_j sur $\overline{B}$. Il existe alors des polynômes uniques $Q_j \in B[X]$ $(k+2 \leqslant j \leqslant n)$, de degrés $< p = [\overline{A} : \overline{B}] = \deg P_{k+1}$, tels qu'on ait : $a_j = \dfrac{Q_j(a_{k+1})}{\Delta}$, Δ désignant le discriminant de P_{k+1} ; on sait enfin que, en dehors de l'ensemble des zéros de Δ, V est représenté par les équations

$$\begin{cases} P_{k+1}(x_{k+1}) = 0 \\ \Delta x_j = Q_j(x_{k+1}) \qquad (k+2 \leqslant j \leqslant n) \end{cases}$$

(cf. [3] ou [9]) ; plus précisément : soit W un représentant de V défini dans un ouvert Ω, avec $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; il existe un ouvert Ω', avec $0 \in \Omega' \subset \Omega$, dans lequel les équations précédentes ont un sens, et tel que $W \cap \Omega'$ coïncide, avec l'ensemble des solutions de ces équations, sauf peut être sur l'ensemble $\Delta = 0$.

Soit alors $\mathcal{U}$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$, que l'on peut supposer assez petit pour que les coefficients des P_j et des Q_j soient des séries convergentes dans $\mathcal{U}$ et pour que les conditions

$$\text{"}(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}, \quad P_{k+j}(x_{k+1} ; x_1, \dots, x_k) = 0\text{"}$$

entraînent

$$\text{"}(x_1, \dots, x_n) \in \Omega'\text{"} \qquad ;$$

désignons par pr la projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^k$ et par D l'ensemble des zéros de Δ dans $\mathcal{U}$; on peut supposer, en choisissant convenablement $\mathcal{U}$, que $\mathcal{U} - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, et que chacune d'elles est adhérente à 0 [1] ; il est alors clair que $pr(W \cap \Omega')$ contient une telle composante connexe, que nous noterons Γ ; on peut encore supposer que, sur $W \cap \Omega'$, on a $\|x\| \leqslant C \|pr\, x\|^{\alpha}$ avec $C > 0$, $\alpha > 0$ (en vertu des équations $P_{k+j}(x_{k+j} ; x_1, \dots, x_k) = 0$ et de majorations élémentaires des zéros d'un polynôme que nous laissons au lecteur).

Soit maintenant f un germe de fonction contenu dans $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_n\}\}$, et ne dépendant que de $x_1, \dots, x_k$, l'inégalité précédente nous montre que f, considéré comme élément de $\mathbb{R}\{\{x_1, \dots, x_k\}\}$, a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ. Pour démontrer (A_1), nous sommes donc ramenés, en changeant un peu les notations.

à établir le résultat suivant :

(A_2) <u>soient</u> $\mathcal{U}$ <u>un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}^k$, Φ <u>une fonction analytique réelle dans</u> $\mathcal{U}$, <u>vérifiant</u> $\Phi(0) = 0$ <u>et non identiquement nulle au voisinage de</u> 0 , D <u>l'ensemble des zéros de</u> Φ , <u>et</u> Γ <u>une composante connexe adhérente à</u> 0 <u>de</u> $\mathcal{U} - D$. <u>On a</u> $\mathfrak{J}(\Gamma_0) = 0$.

Autrement dit : tout $f \in \underset{\sim}{R}\{\{x_1 , \dots , x_k\}\}$ qui a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ vérifie $\hat{f} = 0$.

Pour démontrer (A_2) , nous allons procéder ainsi : nous supposerons que la fonction $\Phi(0 , \dots , 0 , x_k)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0 , et nous montrerons qu'on a alors,

$$\forall \ p \in \underset{\sim}{N} , \qquad \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p}(0 , \dots , 0) = 0 \qquad .$$

Cela entraînera bien le résultat ; en effet, l'ensemble des droites issues de 0 sur lesquelles Φ n'est pas identiquement nul au voisinage de 0 est un ouvert partout dense dans l'ensemble des droites issues de 0 ; comme, après un changement linéaire de coordonnées, on peut prendre pour axe Ox_k une quelconque de ces droites, il en résultera bien, par un calcul élémentaire que nous laissons au lecteur, que toutes les dérivées de f sont nulles à l'origine, i. e. que $\hat{f} = 0$.

Dans les hypothèses précédentes, on peut supposer, d'après des propriétés classiques des anneaux de séries convergentes, que le germe Φ_0 est sans facteurs multiples, et que c'est un polynôme distingué en x_k . En restreignant au besoin $\mathcal{U}$, Φ sera alors de la forme

$$\Phi = x_k^p + \sum_{i=1}^{p-1} a_i(x_1 , \dots , x_{k-1}) \ x_k^{p-i}$$

les a_i étant des fonctions analytiques dans $\mathcal{U}$, avec $a_i(0 , \dots , 0) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant p - 1)$, et le discriminant δ de Φ ne sera pas identiquement nul au voisinage de 0 .

Posons, pour $x = (x_1 , \dots , x_k)$: $x = (x' , x_k)$ et $\mathrm{pr}\ x = x'$. Soit $\mathcal{U}'$ un voisinage ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}^{k-1}$ tel que les conditions "$x' \in \mathcal{U}'$, $\Phi(z ; x') = 0$ $(z \in \underset{\sim}{C})$ " entraînent $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ et, lorsque z est réel : $(x' , z) \in \mathcal{U}$; soient Δ l'ensemble des zéros de δ dans $\mathcal{U}'$, et $\mathcal{V}'$ un voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{R}^{k-1}$, relativement compact dans $\mathcal{U}'$. D'après un théorème de ŁOJASIEWICZ (cf. [5] ou [6]), il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$, tels qu'on ait, $\forall\ x' \in \gamma'$: $|\delta(x')| \geq C\ d(x', \Delta)^{\alpha}$, d désignant la distance euclidienne dans $\underset{\sim}{R}^{k-1}$. Si $z^1, \ldots, z^p$ sont les racines de l'équation $\Phi(x', z) = 0$, on aura toujours, pour $x' \in \gamma'$: $|z^i - z^j| \leq 1$, et par suite $|z^i - z^j| \geq C\ d(x', \Delta)^{\alpha}$.

D'autre part, on peut supposer que $\gamma' - D$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, toutes adhérentes à $O[1]$; il est alors clair que $\mathrm{pr}(\Gamma)$ contient une de ces composantes connexes, γ ; et, $\forall\ x' \in \gamma$, $\mathrm{pr}^{-1}(x') \cap \Gamma$ contient un intervalle ouvert $I(x')$, de longueur $\geq C\ d(x', \Delta)^{\alpha}$.

Appelons $a(x')$ et $b(x')$ les k-ièmes coordonnées des extrémités de $I(x')$; on peut supposer qu'on a $\Phi(x', a(x')) = 0$, et par suite (majoration élémentaire)

(1) $$|a(x')| \leq C_1 \|x'\|^{\alpha_1} \quad (C_1 > 0\ ,\ \alpha_1 > 0) \qquad ;$$

en diminuant au besoin $I(x')$, et en modifiant convenablement C_1 et α_1, on peut supposer qu'on a aussi

(2) $$|b(x')| \leq C_1 \|x'\|^{\alpha_1} \qquad ,$$

l'inégalité

(3) $$|a(x') - b(x')| \geq C\ d(x', \Delta)^{\alpha}$$

restant toujours vérifiée.

LEMME 1. - <u>Dans les hypothèses de</u> (A_2), <u>il existe une suite</u> x^{ℓ} <u>de points de</u> Γ <u>tendant vers</u> 0 <u>et des nombres</u> $C_2 > 0$, $\alpha_2 > 0$ <u>tels qu'on ait</u>, $\forall\ \ell$

$$\|x^{\ell}\| \leq C_2\ d(x^{\ell}, D)^{\alpha_2} \qquad .$$

Ce lemme est évident pour $k = 1$; supposons-le donc vrai pour $k - 1$, et démontrons-le pour k. D'après la formule des accroissements finis, il suffit de trouver une suite x^{ℓ} de points de Γ tendant vers 0, et vérifiant

$$\|x^{\ell}\| \leq C_2' |\Phi(x^{\ell})|^{\alpha_2} \qquad .$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une suite (x'^{ℓ}) de points de γ qui vérifient

(4) $$\|x'^{\ell}\| \leq C_3\ d(x'^{\ell}, \Delta)^{\alpha_3} \qquad (C_3 > 0\ ,\ \alpha_3 > 0) \qquad .$$

Montrons que le milieu x^{ℓ} de l'intervalle $I(x'^{\ell})$ répond à la question ; on a en effet, à cause de (1) et (2) :

$$(5) \qquad \|x^{\ell}\| \leq C_4 \|x'^{\ell}\|^{\alpha_4} \qquad (C_4 > 0 \ , \ \alpha_4 > 0) \quad .$$

D'autre part, $I(x'^{\ell})$ ne contient aucun zéro réel de Φ, donc la distance de x_k^{ℓ} $\left(= \frac{a(x'^{\ell}) + b(x'^{\ell})}{2}\right)$ à une racine réelle z de l'équation $\Phi(x'^{\ell}, z) = 0$ est supérieure à $C\, d(x'^{\ell}, \Delta)^{\alpha}$, d'après (3) ; comme les racines non réelles de cette équation vérifient

$$2|\Im_z| = |z - \bar{z}| \geq C\, d(x'^{\ell}, \Delta)^{\alpha} \quad ,$$

la distance de x_k^{ℓ} à une telle racine est supérieure à $\frac{C}{2} d(x'^{\ell}, \Delta)^{\alpha}$; par suite, en désignant par z^j les racines de cette équation :

$$|\Phi(x^{\ell})| = \prod_j |x_k^{\ell} - z^j| \geq \left(\frac{C}{2}\right)^p d(x'^{\ell}, \Delta)^{p\alpha} \quad .$$

Donc, d'après (4) et (5)

$$|\Phi(x^{\ell})| \geq C_5 \|x^{\ell}\|^{\alpha_5} \qquad (C_5 > 0 \ , \ \alpha_5 > 0) \quad ,$$

d'où le lemme.

Pour démontrer (A_2), nous appliquerons ce lemme à δ et γ (au lieu de Φ et Γ, comme dans l'énoncé) : il existe donc une suite (x'^{ℓ}) de points de γ tendant vers 0 et vérifiant (4). Divisons l'intervalle $I(x'^{\ell})$ en n intervalles égaux, dont les extrémités ont pour k-ième coordonnée :

$$a_0(x'^{\ell}) = a(x'^{\ell}) \ , \ a_1(x'^{\ell}) \ , \ \dots \ , \ a_n(x'^{\ell}) = b(x'^{\ell})$$

et considérons l'expression :

$$\frac{1}{(a_0 - a_1)^n}\left[f(x'^{\ell}, a_0) - \binom{n}{1} f(x'^{\ell}, a_1) + \dots + (-1)^n f(x'^{\ell}, a_n)\right]$$

lorsque ℓ tend vers l'infini, cette expression a pour limite $\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(0)$, d'après (par exemple) la formule des accroissements finis généralisée ; d'autre part les inégalités (1), (2), (3) et (4), jointes au fait que f a un zéro d'ordre infini en 0 sur Γ , montrent que cette expression a pour limite 0 : on a donc bien, $\forall$ n , $\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}(0) = 0$, ce qui démontre (A_2) et le théorème.

Soient maintenant Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, et E un sous-ensemble analytique de Ω. Pour tout point $a \in \Omega$, désignons par $\mathcal{O}_a$ l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de a , et par $\mathfrak{I}_a(E)$ l'idéal de $\mathcal{O}_a$ formé des germes nuls sur E au voisinage de a . Rappelons que, par définition, E est dit cohérent si le faisceau analytique $a \to \mathfrak{I}_a(E)$ est cohérent [4]. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - <u>Avec les notations précédentes, supposons que</u> E <u>soit cohérent, et soit</u> f <u>une fonction dérivable dans</u> Ω , <u>nulle sur</u> E . <u>Au voisinage de tout point de</u> Ω , <u>on a</u> : $f = \sum g_i h_i$, <u>les fonctions</u> g_i <u>étant analytiques au voisinage de</u> a <u>et nulles sur</u> E , <u>et les fonctions</u> h_i <u>dérivables</u>.

(La théorie des faisceaux analytiques cohérents permettrait d'ailleurs de donner un énoncé global de ce théorème.)

Etant donné un point $a \in \Omega$, on peut, par définition de la cohérence de E , trouver un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de a , $\mathcal{O} \subset \Omega$, et des fonctions g_i analytiques dans $\mathcal{O}$ telles que , $\forall$ $b \in \mathcal{O}$, les germes $(g_i)_b$ engendrent $\mathfrak{I}_b(E)$. Il résulte alors du théorème 2 que, $\forall$ $b \in \mathcal{O}$, la série de Taylor $\tilde{f}_b$ de f en b est combinaison des $(\widetilde{g_i})_b$ à coefficients séries formelles. D'après un théorème connu [6], il en résulte que f est dans $\mathcal{O}$, combinaison des g_i à coefficients fonctions dérivables.

C. Q. F. D.

Pour un sous-ensemble analytique E quelconque, le résultat précédent ne sera pas vrai (il me paraît même probable que l'hypothèse de cohérence est nécessaire) : voici un contre-exemple, qui m'a été communiqué par J.-P. SERRE : prenons $\Omega = \mathbb{R}^3$, et prenons pour E le cone d'équation $x_3(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3$, qui admet pour génératrice isolée la droite $x_1 = x_2 = 0$. Soit φ une fonction dérivable sur la sphère unité S_2 : $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, nulle sur $S_2 \cap E$, mais ne s'annulant qu'à l'ordre 1 aux points $(0 , 0 , \pm 1)$. Prenons f défini par

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{||x||}\right) \exp\left(- \frac{1}{||x||^2}\right)$$

il est clair que f est dérivable dans $\underset{\sim}{R}^3$, et nulle sur E ; mais, au voisinage de 0 , f n'est pas de la forme $[x_3(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3]\, h$, avec h dérivable puisque f ne s'annule qu'à l'ordre 1 aux points $\neq 0$ de la génératrice isolée.

3. Application aux ensembles analytiques complexes.

Soit V un germe d'ensemble analytique complexe en 0 dans $\underset{\sim}{C}^n$; identifions $\underset{\sim}{C}^n$ à $\underset{\sim}{R}^{2n}$ en associant à $z = (z_1 , \dots , z_n)$ le point $(x_1 , \dots , x_n , y_1 , \dots , y_n)$ avec $x_j = \Re z_j$, $y_j = \Im z_j$; V peut alors être considéré comme germe analytique-réel. Si V est irréductible en tant que germe analytique complexe, il est irréductible en tant que germe analytique-réel puisque, W étant un représentant de V , il existe un système fondamental de voisinages $\mathcal{O}_\alpha$ de 0 tels que la partie régulière de $W \cap \mathcal{O}_\alpha$ soit un ouvert connexe et partout dense dans $W \cap \mathcal{O}_\alpha$ (cf. par exemple [2]). Il en résulte, dans le cas général, que les décompositions en composantes irréductibles de V coïncident, que V soit considéré comme germe analytique-réel ou analytique complexe.

Supposons V irréductible, et soit $\mathfrak{I}$ son idéal "complexe" (i. e. dans $\underset{\sim}{C}\{z_1 , \dots , z_n\}$), et $\mathfrak{I}'$ son idéal réel (i. e. dans $\underset{\sim}{R}\{x_1 , \dots , x_n , y_1 , \dots , y_n\}$), posons $\tilde{\mathfrak{I}} = \underset{\sim}{C} \otimes_R \mathfrak{I}'$; $\tilde{\mathfrak{I}}$ est un idéal de $\underset{\sim}{C}\{x_1 , \dots , x_n , y_1 , \dots , y_n\}$, et c'est l'idéal du complexifié [4] $\tilde{V}$ de V considéré comme germe analytique-réel ; évidemment, $\tilde{\mathfrak{I}}$ contient les parties réelles et imaginaires des fonctions de $\mathfrak{I}$ (je ne sais pas s'il est ou non engendré par ces fonctions ; il me semble probable que la réponse est positive). En faisant, dans $\underset{\sim}{C}^{2n}$, le changement de coordonnées : $z = x + iy$, $\zeta = x - iy$, on déduit de là que un représentant $\tilde{W}$ de $\tilde{V}$ est contenu au voisinage de 0 dans l'ensemble $W \times \overline{W}$ des points (z , ζ) vérifiant $z \in W$, $\overline{\zeta} \in W$, W étant un représentant de V ; or cet ensemble est visiblement irréductible (même raisonnement que plus haut), donc $\tilde{W} = W \times \overline{W}$.

Soit alors E un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert $\Omega \subset \underset{\sim}{C}^n$. Examinons à quelle condition E , considéré comme ensemble analytique-réel, est cohérent ; pour cela, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée : pour tout $a \in \Omega$, désignons par $\tilde{E}_a$ le complexifié du germe analytique-réel E_a , et soit F_a un représentant de $\tilde{E}_a$; alors, en tout point $b \in \Omega$ assez voisin de a , on a $(F_a)_b = \tilde{E}_b$ (ce fait résulte immédiatement du fait que le faisceau d'un sous-ensemble analytique complexe est cohérent ; voir [4]) ; et la condition précédente est vérifiée en a si elle est vérifiée par les composantes irréductibles de E_a (ou, plus exactement, par des représentants de ces composantes irréductibles) [4]. De là, et des résultats précédents, résulte facilement que E , considéré comme ensemble analytique réel, est cohérent, si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour tout point $a \in \Omega$, les composantes irréductibles de E en a (i. e. des représentants des composantes irréductibles de E_a) restent irréductibles en tout point $b \in \Omega$ suffisamment voisin de a . Par exemple, cette propriété sera vérifiée en a , si E est normal en a , d'après le "théorème d'Oka" [3] ; mais en général, elle ne sera pas vérifiée [par exemple, dans $\underset{\sim}{C}^3$, l'ensemble défini par l'équation $z_3(z_1^2 + z_2^2) = z_1^3$ n'est pas cohérent en 0 , lorsqu'on le considère comme ensemble analytique réel ; et une construction analogue à celle qui a été faite au paragraphe 2 montre que pour cet ensemble, la propriété énoncée au théorème 3 est fausse].

Voici maintenant une autre application du théorème 2.

THÉORÈME 4. - Soit V un germe analytique complexe en 0 dans $\underset{\sim}{C}^n$, et soit f un germe de fonction à valeurs complexes sur V , possédant les propriétés suivantes :

1° f est restriction d'un germe F de fonction dérivable au voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{C}^n$.

2° La restriction de f à la partie régulière de V est holomorphe.

Alors, f est restriction d'un germe de fonction holomorphe au voisinage de 0 dans $\underset{\sim}{C}^n$ (i. e. "f est holomorphe sur le germe d'espace analytique V ").

(La condition 2° doit évidemment être interprétée ainsi : soient W un représentant de V , et g une fonction sur W dont le germe en 0 soit égal à f ; alors la restriction de g à la variété des points réguliers de W est holomorphe.)

Démontrons d'abord ce théorème lorsque V est irréductible ; dans ce cas, nous conserverons les notations du début du paragraphe 3 : $\tilde{V}$, $\mathfrak{I}$, etc. L'hypothèse 2°, jointe à la continuité de f , entraîne classiquement [2] que f est méromorphe sur V , i. e. qu'il existe g et $h \in \underset{\sim}{C}\{z_1 , \dots , z_n\}$, avec $h \notin \mathfrak{I}$, tels qu'on ait, sur V : $hf - g = 0$.

Appliquons le théorème 2 à la fonction $hF - g$; on trouve

$$\hat{h}\hat{F} - \hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{I}}} ,$$

appelons $\hat{F}'$ la série formelle $\in \underset{\sim}{C}[[z_1 , \dots , z_n]]$ obtenue en faisant $\zeta = 0$ dans le développement $\hat{F}(z , \zeta)$ de F en 0 , et remarquons que, si une série formelle $k(z , \zeta)$ appartient à $\hat{\mathfrak{I}}$, on a $k(z , 0) \in \hat{\mathfrak{I}}$ (en effet, il suffit d'établir ce résultat lorsque k est une série convergente ; or, dans ce cas, elle s'annule sur $V \times \overline{V}$, donc $k(z, 0)$ s'annule sur V). Faisant $\zeta = 0$ dans la formule précédente, il vient

$$\hat{h}\hat{F}' - \hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{I}}} \quad .$$

Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal $\subset \underset{\sim}{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ engendré par $\mathfrak{I}$ et h, i. e. $\mathfrak{J} = \mathfrak{I} + (h)$; on a (paragraphe $\underset{\sim}{1}$) $\hat{\mathfrak{J}} = \hat{\mathfrak{I}} + (\hat{h})$, d'où $\hat{g} \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{J}}}$; d'après 1, 3 (a), cela entraîne :

$$g \equiv 0 \pmod{\mathfrak{J}} \text{ , i. e. } \exists \ \Phi \in \underset{\sim}{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \text{ , } g - \Phi h \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}} \quad ;$$

sur l'ensemble des points de V qui vérifient $h \neq 0$, donc partout sur V, on a alors $\Phi = F$ (puisque l'ensemble de ces points est dense dans V, cf [2]). ; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas général : soient $V_1, \ldots, V_p$ les composantes irréductibles de V, et $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_p$ leurs idéaux. Le raisonnement précédent montre qu'il existe $\Phi_1, \ldots, \Phi_p \in \underset{\sim}{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ tels qu'on ait,

$$\forall \ j : \ F - \Phi_j = 0 \text{ sur } V_j \quad .$$

Avec des notations évidentes, on aura, $\forall \ j$, d'après le théorème 2

$$\hat{F} - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\hat{\tilde{\mathfrak{I}}}_j}$$

d'où, en faisant $\sigma = 0$:

$$\hat{F}' - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \pmod{\hat{\mathfrak{I}}_j}$$

et par suite

$$\forall \ (i, j) \text{ , } \hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_j \equiv 0 \mod (\hat{\mathfrak{I}}_i + \hat{\mathfrak{I}}_j)$$

et, d'après 1, 3 (a), et la formule $(\mathfrak{I}_i + \mathfrak{I}_j)\hat{} = \hat{\mathfrak{I}}_i + \hat{\mathfrak{I}}_j$

$$\Phi_i - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}_i + \mathfrak{I}_j} \quad .$$

Il est alors élémentaire de montrer qu'il existe $\Phi \in \underset{\sim}{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ tel qu'on ait,

$$\forall \ j \text{ , } \Phi - \Phi_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}_j} \quad ;$$

et il est clair que, sur V, on a $\Phi = F$. D'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUHAT (F.) et CARTAN (H.). - Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 988-990.

[2] CARTAN (Henri). - Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 ; Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54.

[3] CARTAN (Henri). - Déformation de structures analytiques complexes, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique (à paraître).

[4] CARTAN (Henri). - Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 77-99.

[5] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.

[6] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, I-IV., Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60, exposés 21-25.

[7] NAGATA (Masayoshi). - A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, I., Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 78-116.

[8] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Mémorial des Sciences mathématiques, 123).

[9] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale et ensembles analytiques, Séminaire Lelong : Analyse, t. 1, 1957/58, exposé n° 2 (non multigraphié).

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

[11] ZARISKI (Oscar). - Sur la normalité analytique des variétés normales, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 2, 1950, p. 161-163.