SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

JEAN-PIERRE KAHANE

Fonctions pseudo-périodiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 3 (1961), exp. n° 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1961__3__A3_0>

Séminaire LELONG
(Analyse)
3e année, 1961, n° 3

31 janvier 1961

FONCTIONS PSEUDO-PÉRIODIQUES

par Jean-Pierre KAHANE

1. Historique.

PALEY et WIENER [4] appellent fonction pseudo-périodique (ps. p.) toute fonction f définie sur la droite, localement de carré sommable, et telle que les combinaisons linéaires de ses translatées aient des normes équivalentes dans $L^2(I)$ et $L^2(J)$, dès que les intervalles I et J sont assez longs, soit $|I| > \lambda$, $|J| > \lambda$. La borne inférieure des λ, tels qu'il en soit ainsi, s'appelle la pseudo-période de f, et sera notée $\ell = \ell(f)$.

PALEY et WIENER démontrent les résultats suivants :

A. - Dire que f est ps. p., c'est dire que f est presque périodique à la Stepanoff (ps. p. Stepanoff) et de spectre régulier.

(On rappelle plus loin la définition d'une fonction p. p. Stepanoff. On dit qu'une suite Λ est régulière si la borne inférieure des distances de deux points distincts est positive ; on appelle "pas" de Λ cette borne inférieure).

B. - La pseudo-période ℓ ne dépend que du spectre Λ, et l'on a

$$\ell \leqslant 8\pi\delta^{-1} \tag{1}$$

δ désignant le pas de Λ.

Des inégalités d'INGHAM [1] permettent de raffiner (1) : on a

$$\ell \leqslant 2\pi\delta^{-1} \tag{2}$$

et la constante du second membre est maintenant la meilleure possible.

On peut cependant améliorer (2) ; on a exactement

$$\ell = 2\pi\Delta \tag{3}$$

$\Delta = \Delta(\Lambda)$ désignant la densité supérieure de répartition de Λ (J.-P. KAHANE [2]).

Δ peut être définie de l'une des manières équivalentes que voici :

a. Δ est la borne inférieure des densités des suites bien réparties contenant Λ. On dit que $\{\mu_n\}$ est bien répartie, et de densité D, si $\mu_n - \frac{n}{D} = O(1)$.

b. $$\Delta = \lim_{t \to \infty} \sup_{r} \frac{n(r\ ,\ r+t)}{t}$$

où $n(r\ ,\ r+t)$ est le nombre de points de Λ dans $[r\ ,\ r+t[$.

c. $$\Delta = \lim_{t \to \infty} \overline{\lim_{r \to \pm\infty}} \frac{n(r\ ,\ r+t)}{t} \ .$$

La démonstration de (3) utilise des techniques de fonctions entières d'une variable, et l'interprétation suivante de ℓ :

ℓ est la borne inférieure des τ tels que toute suite de carré sommable définie sur Λ soit la restriction à Λ d'au moins une fonction entière Φ de type exponentiel $\leqslant \pi$, et de carré sommable sur la droite réelle.

2. Essai d'une théorie dans R^p .

Soit $E^2 = E^2(R^p)$ l'espace des fonctions localement de carré sommable dans R^p ; c'est un espace de Fréchet, avec les semi-normes

$$\|f_t\|_D = (\int_D |f(x-t)|^2\, dx)^{1/2}\ , \quad (\ t \in R^p\ )$$

D étant un domaine (= fermeture d'un ouvert borné) fixé.

On dira que f est E^2-bornée si ces semi-normes sont bornées, et on pose

$$\|f\|_{BE^2} = \sup_{t \in R^p} \|f_t\|_D \quad .$$

Avec cette norme, l'ensemble BE^2 des fonctions E^2-bornées est un espace de Banach.

Pour tout sous-espace fermé de E^2 , contenu dans BE^2 , il existe un domaine G tel que les normes de ses éléments dans BE^2 et dans $L^2(G)$ sont équivalentes.

Rappelons qu'une fonction p. p. Stepanoff est un élément de BE^2 tel que l'ensemble de ses translatées y soit relativement compact ; c'est aussi bien une limite dans BE^2 de polynômes trigonométriques ; le spectre de f est l'ensemble des $\lambda \in R^p$ tels que $e^{i\lambda x}$ soit approchable dans BE^2 par des combinaisons linéaires de translatés de f .

On appelle famille pseudo-périodique un sous-espace fermé F de E^2 , contenu dans BE^2 et invariant par translation. Un domaine G tel que $\|f\|_G \sim \|f\|_{BE^2}$ sur F s'appellera un domaine associé à F . Un élément d'une famille ps. p. s'appellera une fonction ps. p. On en déduit immédiatement qu'une fonction ps. p. est E^2-moyenne-périodique. le résultat essentiel est le suivant (c'est une variante du théorème A de Paley-Wiener).

Si Λ est une suite régulière dans R^p, les exponentielles $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ engendrent dans E^2 une famille ps. p. F_Λ et constituent une base de F_Λ. Inversement, toute famille ps. p. F est engendrée dans E^2 par les exponentielles $e^{i\lambda x}$ qu'elle contient, et son spectre $\Lambda_F = \{\lambda | e^{i\lambda x} \in F\}$ est régulier.

Désormais, Λ sera une suite régulière, et on appellera domaine associé à Λ tout domaine associé à F_Λ ; c'est un domaine G tel que, pour tous les polynômes trigonométriques

$$s(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a(\lambda)\, e^{i\lambda x}$$

il y ait équivalence des normes $\|s\|_G$ et $(\sum |a(\lambda)|^2)^{1/2}$.

3. Étude des domaines associés à Λ.

Exprimons cette définition en faisant intervenir les espaces de Banach suivants :

F_Λ, normé par $\|f\|_{BE^2}$;

$L^2_\Lambda(G)$: sous-espace fermé de $L^2(G)$ engendré par $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$;

ℓ^2_Λ : espace des suites $\{a(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ de carré sommable ;

$Exp^2(G)$: espace des transformées de Fourier des fonctions appartenant à $L^2(G)$ (prolongé par 0 hors de G).

Alors il revient au même de dire que

a. G est un domaine associé à Λ ;

b. F_Λ et $L^2_\Lambda(G)$ sont isomorphes dans l'application canonique ;

c. $L^2_\Lambda(G)$ et ℓ^2_Λ sont isomorphes dans l'application $f \to \{a_f(\lambda)\}$;

d. L'application $\Phi \to \{\Phi(\lambda)\}$ est un homomorphisme de $Exp^2\, G$ sur ℓ^2_Λ ;

e. Toute $f \in L^2_\Lambda(G)$ est prolongeable de manière unique sur R^p en une fonction appartenant à F_Λ ;

f. $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ forme une base de $L^2_\Lambda(G)$ (espace de Banach) et, pour toute $f \in L^2_\Lambda(G)$, les composantes de f suivant cette base forment une suite de carré sommable,

g. A toute suite $\{b(\lambda)\} \in \ell^2_\Lambda$ correspond au moins une $\Phi \in \mathrm{Exp}^2\, G$ telle que $\Phi(\lambda) = b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

EXEMPLE. - $\Lambda = \{$sommets d'un réseau$\}$, G = maille du réseau conjugué.

Il est intéressant d'étudier géométriquement G en fonction de Λ . Voici quelques questions naturelles, et des éléments de réponse.

1° Convenons de dire que deux suites sont α-voisines, s'il existe entre elles une correspondance biunivoque $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ telle que $|\lambda' - \lambda| < \alpha$ pour tout λ . Deux suites (régulières) α-voisines ont-elles mêmes domaines associés ?

RÉPONSE : Non (cf. exemple ci-dessus). Mais si G est un domaine associé à Λ , il existe un $\alpha > 0$ tel que G reste associé à toute suite α-voisine de Λ .

2° Soit G_j un domaine associé à Λ_j ($j = 1 , 2$) ; on suppose $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ régulière. Peut-on déterminer simplement des domaines G associés à Λ ?

RÉPONSE : Il suffit que l'intérieur de G contienne $\overline{G_1 + G_2}$.

3° A quelle condition tout domaine est-il associé à Λ ?

RÉPONSE : Soit $N(r)$ le nombre maximum de points de Λ dans une boule de rayon r . Il suffit que $N(r) = o(r)$. Il ne suffit pas que $N(r) = O(r)$ (évident). La condition est nécessaire pour $p = 1$, mais non pour $p > 1$.

4° Appelons épaisseur de G dans la direction D la longueur du plus petit segment contenant la projection orthogonale de G sur une droite parallèle à D . Peut-on relier cette épaisseur à une densité de Λ convenablement définie ?

RÉPONSE : L'épaisseur minimum dans la direction G est $2\pi\Delta_\Lambda(\Lambda)$, où

$$\Delta_D(\Lambda) = \lim_{\eta \to 0} \lim_{\ell \to \infty} \frac{N_D(\ell, \eta)}{\ell}$$

$N_D(\ell , \eta)$ étant la maximum, pour tous les segments S de longueur ℓ parallèles à D , du nombre de points de Λ qui sont à une distance de S inférieure à η .

On peut appliquer cette formule à l'exemple ci-dessus.

5° Existe-t-il une interprétation, relative aux domaines associés, de la densité supérieure de répartition en volume, définie par analogie avec la définition (a) donnée sur la droite (voir historique) ?

RÉPONSE inconnue : Il existe des suites "rares", dans ce sens que leur densité supérieure de répartition en volume est nulle, et telles qur tout domaine convexe associé, symétrique par rapport à 0 , contient une boule arbitraire donnée.

6° Peut-on interpréter, par une notion de lacunarité convenable, le fait que Λ admet des domaines associés de volume arbitrairement petit ?

RÉPONSE inconnue.

4. Relation avec un problème de Mandelbrojt.

MANDELBROJT ([3]) a posé en 1935 sur les séries de Fourier un problème que nous formulerons ainsi :

La suite régulière Λ étant donnée, déterminer des domaines G et des propriétés P telles que, si une fonction ps. p. $\in F_\Lambda$ satisfait P sur un voisinage de G (= un ouvert contenant G), elle satisfait P partout. Nous dirons alors que P est une bonne propriété relativement à Λ et G.

Si G est associé à Λ, l'appartenance à C^∞, l'analycité, sont de bonnes propriétés.

Il en est de même pour l'appartenance locale à $\mathcal{F}L^1$ (c'est-à-dire le fait d'être localement représentable comme transformée de Fourier d'une fonction de L^1). Réciproquement, si cette propriété est bonne relativement à Λ et G, tout voisinage de G contient un domaine associé à Λ.

On peut remplacer dans cet énoncé $\mathcal{F}L^1$ par $\mathcal{F}L^{\alpha,r}$, $L^{\alpha,r}$ représentant l'ensemble des fonctions de puissance α-ième sommable par rapport à un poids $(1+|x|)^{r\alpha}$, à condition que $\mathcal{F}L^{\alpha,r} \subset E^2$. L'étude des espaces $\mathcal{F}L^{\alpha,r}$ n'est pas sans intérêt en elle-même. Ce sont les succédanés naturels de E^2 pour la théorie de la pseudo-périodicité.

5. Séries de Fourier lacunaires.

On vient de voir que le comportement d'une fonction appartenant à F_Λ est déterminé, à divers égards, par son comportement au voisinage d'un domaine associé à Λ. Si Λ est assez lacunaire, on doit s'attendre à ce que son comportement sur certains compacts sans intérieur, convenablement associés à Λ, permette de connaître son comportement dans tout l'espace. Il en est bien ainsi, comme le montrera l'exposé n° 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] INGHAM (A. E.). - Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, Math. Z., t. 41, 1936, p. 367-379.

[2] KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 293-314.

[3] MANDELBROJT (Szolem). - Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. - Paris, Gauthier-Villars, 1935 (Collection de Monographies sur la théorie des fonctions).

[4] PALEY (R.) and WIENER (N.). - Fourier transforms in the complex domain. - New York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc., Coll. Publ., 19).