SÉMINAIRE LELONG.
ANALYSE

PAUL J. KOOSIS

Les sous-espaces intérieurement compacts de $L_2(0,\infty)$

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. nº 9, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A6_0>

LES SOUS-ESPACES INTÉRIEUREMENT COMPACTS DE $L_2(0, \infty)$

par Paul J. KOOSIS

1. *Notations et définitions.*

Pour $f \in L_2(0, \infty)$ et $h \geqslant 0$, f^h désigne la fonction définie par

$$f^h(x) = \begin{cases} f(x+h), & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

T_h est la transformation de $L_2(0, \infty)$ en lui-même déterminée par $T_h f = f^h$.

DÉFINITION. - Un sous-espace E de $L_2(0, \infty)$ est dit *intérieurement compact* si :

1° $T_h E \subset E$ pour tout $h \geqslant 0$,

2° Pour chaque $h > 0$, T_h est complètement continue comme application linéaire de E en lui-même.

Remarquons que les sous-espaces de $L_2(0, \infty)$ engendrés par des exponentielles réelles qui ont été étudiés par L. SCHWARTZ sont des exemples de sous-espaces intérieurement compacts.

Notre problème est de déterminer tous les sous-espaces intérireurement compacts de $L_2(0, \infty)$.

2. *Résultats préliminaires.*

LEMME (dû à P. LAX). - *Les fonctions non-identiquement nulles appartenant à un sous-espace E intérieurement compact ne s'annulent sur aucun sous-intervalle, si petit qu'il soit, de* $(0, \infty)$.

(Soit en effet $a > 0$, et soit H le sous-espace de E formé des g identiquement nulles sur $[0, a]$; alors $T_a : H \to H$ est une isométrie. H aura donc un nombre de dimensions fini, soit N. Si $f \in E$ et $f = 0$ sur $[0, 2a]$, ses translatées $f = f^{h_0}, f^{h_1}, \dots, f^{h_N}$ avec $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_N = a$

appartiendront à H ; il existera donc une relation linéaire entre elles. De cette relation, on déduit facilement par récurrence que $f \equiv 0$ identiquement).

COROLLAIRE. - Soit E un sous-espace intérieurement compact de $L_2(0, \infty)$ et soit f_n une suite de fonctions de E. La convergence des f_n dans $L_2(0, \infty)$ équivaut à la convergence dans $L_2(0, a)$, $a > 0$.

COROLLAIRE. - Soit E un sous-espace intérieurement compact, et soit $a > 0$. Les restrictions des $f \in E$ à $[0, a]$ ne forment pas une famille totale dans $L_2(0, a)$.

DÉFINITION. - Soit $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$, les λ_n étant des nombres complexes avec $\Im \lambda_n > 0$, et les p_n étant des entiers ≥ 0. Par $L_2(\Lambda)$ nous désignerons le sous-espace de $L_2(0, \infty)$ engendré par les monômes exponentiels $x^r e^{i\lambda_n x}$, $r = 0, \ldots, p_n$; $n = 1, 2, \ldots$

Des résultats ci-dessus on déduit, par les méthodes connues de la théorie des fonctions moyenne-périodiques, (voir KOOSIS [1]):

THÉORÈME 1. - Tout sous-espace intérieurement compact E est un $L_2(\Lambda)$ avec $\sum_1^\infty (p_n + 1) \Im \lambda_n / |\lambda_n|^2 < \infty$.

Ensuite, une application facile du lemme de Riemann-Lebesgue donne :

THÉORÈME 2. - $L_2(\Lambda)$ avec $\Lambda = \{(\lambda_n, p_n + 1)\}$ n'est un sous-espace intérieurement compact que si $\Im \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$.

3. Caractérisation des $L_2(\Lambda)$ qui sont intérieurement compacts.

Soit $h > 0$, et soit T_h^* l'adjointe de la transformation T_h de $E = L_2(\Lambda)$ en lui-même. Si P est la projection de $L_2(0, \infty)$ sur E, T_h^* est donnée par la formule $T_h^* f = P f_h$, où $f_h(x) = f(x - h)$. Evidemment, T_h est complètement continue si et seulement si T_h^* l'est, mais on a plus : en effet, la formule ci-dessus pour T_h^* permet de l'étendre de façon qu'elle devienne une application de tout l'espace $L_2(0, \infty)$ dans E, et l'on voit que, pour que T_h soit complètement continue, il faut et il suffit que T_h^* ainsi étendue le soit. Les raisonnements qui suivent se rapportent non aux T_h, mais uniquement aux T_h^*, l'extension indiquée étant supposée faite. Ils reposent sur une formule particulière pour $\|T_h^* f\|$, qu'on peut obtenir par deux procédés différents ; soit par la théorie des déterminants, (cf. KOOSIS [2]), soit en utilisant la théorie des fonctions analytiques, procédé plus simple (cf. LAX [3]). On a :

$$\|T_h^* f\| = \sup_{\substack{g \in L_2(0\ ,\ \infty) \\ \|g\| = 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda h} f(\lambda)\, \hat{g}(\lambda)}{B(\lambda)}\, d\lambda \quad .$$

La norme est prise dans l'espace $L_2(0\ ,\ \infty)$; pour $g \in L_2(0\ ,\ \infty)$, $\hat{g}(\lambda)$ est sa transformée de Fourier

$$\hat{g}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x}\, g(x)\, dx \ ;$$

et $B(\lambda)$ est le produit de Blaschke

$$B(\lambda) = \prod_1^{\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n} \cdot \frac{\bar{\lambda}_n}{\lambda_n}\right)^{p_n + 1} \quad .$$

L'expression de $B(\lambda)$ dans les deux travaux cités plus haut est incorrecte, le facteur $\bar{\lambda}_n / \lambda_n$ y étant omis.

Cet oubli n'influe pas sur les raisonnements faits.

On déduit de cette formule le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - $L_2(\Lambda)$ <u>avec</u> $\Lambda = \{(\lambda_n\ ,\ p_n + 1)\}$ <u>n'est intérieurement compact que si</u> $|B(is + t)| \to 1$, $t \to \pm\infty$, <u>uniformément pour</u> $0 \leqslant s \leqslant c$, c <u>arbitraire</u>.

Supposons enfin un $L_2(\Lambda)$ avec Λ satisfaisant aux conclusions des théorèmes 2 et 3. Dans ces conditions, on montre que, dans la formule ci-dessus, on peut remplacer l'intégrale de $-\infty$ à ∞ par une intégrale prise le long d'un chemin empruntant une parallèle à l'axe réel d'ordonnée positive quelconque quand $x \to -\infty$, et quand $x \to +\infty$.

On a alors :

THÉORÈME 4. - <u>Soit</u> $E = L_2(\Lambda)$ <u>avec</u> $\Lambda = \{(\lambda_n\ ,\ p_n + 1)\}$. E <u>sera intérieurement compact dès que</u>

a. $\Im \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$

b. $B(is + t) \to \infty$, $t \to \pm\infty$, uniformément pour $0 \leqslant s \leqslant c$, c arbitraire.

REMARQUE. - Si (a) est satisfait, il faut et il suffit que (b) le soit aussi, pour qu'on ait :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} \to 0 \ , \quad t \to \pm \infty \quad .$$

On arrive ainsi au résultat principal :

THÉORÈME 5. - Chaque sous-espace intérieurement compact de $L_2(0 , \infty)$ est un $L_2(\Lambda)$ où $\Lambda = \{(\lambda_n , p_n + 1)\}$ remplit les conditions

1° $\Im \lambda_n \to \infty$;

2° $\sum_{1}^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} \to 0 \ , \quad t \to \pm \infty$.

D'autre part, chaque $L_2(\Lambda)$, avec un Λ satisfaisant à (1°) et à (2°), est intérieurement compact.

Remarquons que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les transformations $T_h : E \to E$ soient complètement continues, pour tous les h assez grands, sont voisines : (1°) reste la même et (2°) est remplacée par

$$\limsup_{t \to \pm \infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{(p_n + 1) \Im \lambda_n}{|\lambda_n - t|^2} < \infty \quad .$$

Le fait que les deux conditions du théorème 5 sont suffisantes a été d'abord trouvé par l'auteur à partir de la formule donnée plus haut ; en revanche, P. LAX a, le premier, montré la nécessité de la deuxième, et cela par une méthode tout à fait différente. La nécessité de cette condition résulte de la même formule, comme l'auteur l'a établi postérieurement.

Remarquons enfin qu'il résulte du théorème 5 que la somme directe de deux sous-espaces intérieurement compacts est intérieurement compacte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOOSIS (Paul J.). - On functions which are mean periodic on a half-line, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 133-149.

[2] KOOSIS (Paul J.). - Interior compact spaces of functions on a half-line, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 583-615.

[3] LAX (P. D.). - Remarks on the preceding paper, Comm. pure and appl. Math., t. 10, 1957, p. 617-622.