Séminaire Lelong.
Analyse

Yitzhak Katznelson

# Calcul symbolique et endomorphismes dans quelques algèbres de Banach

*Séminaire Lelong. Analyse*, tome 2 (1958-1959), exp. n° 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A3_0>

# CALCUL SYMBOLIQUE ET ENDOMORPHISMES DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

par Yitzhak KATZNELSON

Soit $\mathfrak{B}$ une algèbre de Banach avec unité. Supposons que $\mathfrak{B}$ est semi-simple et auto-adjointe (symétrique). Soit $\mathfrak{M}$ l'espace des idéaux maximaux de $\mathfrak{B}$ muni de la structure topologique induite par l'ensemble des transformées de Fourier-Gelfand des éléments de $\mathfrak{B}$. On sait que $\mathfrak{M}$ est alors un espace de Hausdorff compact.

La transformée d'un élément $f \in \mathfrak{B}$ sera notée $\hat{f}$, et l'ensemble $\hat{\mathfrak{B}}$ de toutes ces transformées est une algèbre de fonctions continues sur $\mathfrak{M}$.

DÉFINITION. - On dit que la fonction $F(Z)$, définie dans un ensemble $D$ du plan complexe, opère dans $\mathfrak{B}$, si l'on a $F(f) \in \hat{\mathfrak{B}}$ pour toute $f \in \hat{\mathfrak{B}}$, dont le spectre est contenu dans $D$.

Nous fixons $D = R$ (l'axe réel). L'ensemble des fonctions définies sur l'axe réel qui oprèrent dans $\mathfrak{B}$ est une algèbre $\mathfrak{F}_0$. Chaque élément $f \in \mathfrak{B}$, à spectre réel, engendre une application $F \rightarrow F(f)$ de $\mathfrak{F}_0$ dans $\mathfrak{B}$.

La topologie faible induite sur $\mathfrak{F}_0$ par l'ensemble de ces applications est localement multiplicativement convexe ; il est facile de voir que $\mathfrak{F}_0$ est complet.

Pour l'étude des proprietés locales des fonctions qui opèrent dans $\mathfrak{B}$, nous pouvons nous restreindre à la sous-algèbre $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}_0$ de toutes les fonctions $2\pi$-périodiques. On sait (théorème de Wiener - Lévy - Gelfand) que $\mathfrak{F}_0$ contient toutes les fonctions analytiques sur l'axe réel.

THÉORÈME 1. - S'il existe une fonction non continue dans $\mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{B}$ est de dimension finie.

DÉMONSTRATION. - Soit $F(x)$ non continue à l'origine ; il existe alors une suite $t_n \rightarrow 0$ telle que

$$\lim F(t_n) = t \neq F(0) .$$

Si $\mathfrak{M}$ est infini, il existe une suite $\{M_j\}$ qui converge dans $\mathfrak{M}$ vers $M_0$. On suppose ici que $\mathfrak{M}$ est métrisable,dans le cas général, il existe une sous-algèbre $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$, dont l'espace d'idéaux maximaux est métrisable et telle que toute fonction qui opère dans $\mathcal{B}$ opère dans $\mathcal{B}_0$. $\mathcal{B}_0$ peut être choisie de dimension infinie. On peut construire un élément $f \in \mathcal{B}$ tel que $\{\hat{f}(M_j)\}$ contienne une sous-suite infinie de $\{t_n\}$. $F(\hat{f}(M))$ n'est pas continue sur $\mathfrak{M}$ ; $F(x)$ n'opère donc pas dans $\mathcal{B}$.

Rappelons qu'une algèbre $\mathcal{B}$ est régulière si, pour tout fermé $G \subset \mathfrak{M}$ et $M_0 \notin G$, il existe $f \in \mathcal{B}$ tel que $\hat{f}(M) = 0$ pour $M \in G$, $\hat{f}(M_0) = 1$. ; $\mathcal{B}$ est alors normale c'est-à-dire : soient $G_1$, $G_2$ fermés disjoints dans $\mathfrak{M}$, il existe $f \in B$ tel que $\hat{f}(M) = 0$ pour $M \in G_1$, $\hat{f}(M) = 1$ pour $M \in G_2$.

Dans la suite nous supposons que $B$ est régulière.

THÉORÈME 2. - <u>Pour que $F \in \mathcal{F}_0$ soit bornée dans une boule $\|f\| < \delta$ dans $\mathcal{B}$ il faut et il suffit que pour chaque $M \in \mathfrak{M}$, il existe un voisinage $V_M$ tel que $F$ soit bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal</u> $\mathfrak{f}(\mathfrak{M} - V_M) = \cap M_\alpha$ pour $M_\alpha \in \mathfrak{M} - V_M$.

DÉMONSTRATION. - La condition étant trivialement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Pour chaque $M \in \mathfrak{M}$, soit $\bar{W}_M$ un voisinage fermé de $M$, contenu dans $V_M$ ; soit $W_M$ l'intérieur de $\bar{W}_M$ ; $\{W_M\}$ est un recouvrement de $\mathfrak{M}$ dont on choisit un sous-recouvrement fini $W_{M_1}, \ldots, W_{M_n}$.

Soit $\{g_j\}$ une partition de l'unite dans $\mathcal{B}$, subordonnée à $\{W_{M_j}\}$ et soit

$\varphi_j \in \hat{\mathcal{B}}$, $\varphi_j(M) = 1$ pour $M \in \bar{W}_{M_j}$, $\varphi_j(M) = 0$ pour $M \in \mathfrak{M} - V_{M_j}$.

Pour tout $f \in \hat{\mathcal{B}}$, on a

$$F(f) = \sum_j g_j\ F(f) = \sum g_j\ F(\varphi_j\ f)$$

et le théorème résulte du fait que $\varphi_j f \in \mathfrak{f}(\mathfrak{M} - V_M)$.

DÉFINITION. - $M$ est régulier par rapport à $F \in \mathcal{F}_0$ s'il existe un voisinage $V_M$ de $M$ tel que $F$ soit bornée dans une boule centrée à l'origine dans l'idéal

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{M} - V_M).$$

LEMME. - Soit $F \in \mathcal{F}_0$, il n'y a qu'un nombre fini de points non-réguliers par rapport à $F$.

DÉMONSTRATION. - Supposons le contraire ; soit $\{M_j\}$ une suite infinie de points non-reguliers ayant des voisinages $V_{M_j}$ deux à deux disjoints. Pour chaque $j$ soit $\bar{W}_{M_j}$ un voisinage fermé de $M_j$, contenu dans $V_{M_j}$ et soit $\varphi_j \in \hat{\mathcal{B}}$, avec $\varphi_j(M) = 1$ sur $W_{M_j}$, $\varphi_j(M) = 0$ hors de $V_{M_j}$.

D'après l'hypothèse, nous pouvons choisir $f_j \in f(\mathcal{M} - W_{M_j})$, $\|f_j\| < 2^{-j}$ tel que $\|F(f_j)\| \geqslant 2^j \|\varphi_j\|$.

Posons $f = \sum_j f_j$ ; on a $F(f) \in \hat{\mathcal{B}}$ et

$$2^j \|\varphi_j\| \leqslant \|\varphi_j\ F(f)\| \leqslant \|\varphi_j\|\ \|F(f)\|$$

soit $\|F(f)\| \geqslant 2^j$, pour tout $j$, d'où contradiction.

Il est clair que la propriété d'être régulier par rapport à une $F \in \mathcal{F}_0$ donnée, est invariante par antomorphisme. Un idéal $M$ qui a une infinité d'images par l'ensemble des automorphismes de $\mathcal{B}$ est donc automatiquement régulier. Si tous les points de $\mathcal{M}$ ont cette propriété (auquel cas nous dirons que $\mathcal{B}$ admet suffisamment d'automorphismes), tous les points de $\mathcal{M}$ sont réguliers.

THÉORÈME 3. - Si $\mathcal{B}$ admet suffisamment d'automorphismes toute fonction $F \in \mathcal{F}_0$ est bornée au voisinage de l'origine dans $\mathcal{B}$.

EXEMPLE. - Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre des restrictions des fonctions dérivables à une suite $\{a_n\}$ convergente vers zéro. Pour qu'une fonction $F(x)$ opère dans $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que $F$ soit dérivable en tout point. Ainsi, la fonction $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ opère dans $\mathcal{B}$ mais n'est bornée dans aucune boule centrée à l'origine.

Lorsque l'on veut étudier les rapports qui existent entre la structure de $\mathcal{B}$ et l'ensemble des fonctions qui opèrent dans $\mathcal{B}$ il est plus commode d'étudier l'algèbre $\mathcal{F}$, dont l'espace d'idéaux maximaux est compact plutôt que $\mathcal{F}_0$ dont la structure est toujours plus compliquée. Nous donnons quelques résultats concernant le cas où $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach. Cette structure n'est pas nécessairement celle induite sur $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_0$ .

Posons $\omega_n = \|e^{inx}\|$ , la norme étant prise dans $\mathcal{F}$ , $\mathcal{F}$ contient comme sous-algèbre l'ensemble $A\{\omega_n\}$ des fonctions $F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$ telles que

$$\sum |a_n| \omega_n < \infty .$$

THÉORÈME 4. - Si $\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Banach il existe un entier $p$ tel que $\mathcal{F}$ contient toute fonction $p$ fois dérivable.

DÉMONSTRATION. - Pour tout $f \in \mathcal{B}$ à spectre réel, soit $K_f$ la norme de l'application $F \to F(f)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.

Posons

$$K^*(f) = \sup_{-\infty < n < +\infty} \left( \frac{\|e^{inf}\|}{\omega_n} \right) \leq K_f .$$

$K^*(f)$ est une fonction de Baire sur l'algèbre, et reste donc bornée dans une boule $\|f - f_0\| < N$ .

$$\|e^{in(f-f_0)}\| \leq K^*(f_0)\ K^*(f)\, \omega_n\ \omega_{-n} \leq C\, \omega_n^1$$

pour $\|f - f_0\| < N$ .

Il est évident, d'autre part, que $F(x) \to F(2x)$ est un opérateur continu dans $\mathcal{F}$ , ce qui implique

$$\omega_{2n} < K\,\omega_n \quad \text{et par conséquent} \quad \omega_{2^n} \leq K^n$$

On a :

$$\|e^{ing}\| = \|e^{i2^m tg}\| \leq C\,\omega_{2^m}^2 \leq c\, K^{2m}$$

avec

$$\frac{1}{2} < t \leq 1 \ , \quad m \sim \log n/\log 2$$

Ce qui implique

$$\|e^{ing}\| \leq C(g)\ n^{(2 \log K)/\log 2}$$

et il suffit de prendre

$$p > \frac{2 \log K}{\log 2} + 1 .$$

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses précédentes, $\mathcal{F}$ est régulière, donc $\mathcal{B}$ est régulière.

Remarque. - $\mathcal{F}$ opère aussi dans elle-même. Comme elle admet suffisamment d'automorphismes chaque fonction de $\mathcal{F}$ reste bornée dans un voisinage de zéro dans $\mathcal{F}$. Il résulte du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe un voisinage de zéro dans $\mathcal{F}$ sur lequel toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont bornées. Comme, du fait que $F(nx)$ reste bornée pour $\|f\| < \varepsilon$ il resulte que $F(x)$ est bornée pour $\|f\| < n\varepsilon$ ; alors toute fonction de $\mathcal{F}$ est bornée sur toute partie bornée de $\mathcal{F}$, et il existe alors un $R$ tel que

$$\|F\| \sim \sup_{\|F_0\| \leq R} \|F(F_0)\| \qquad \text{(équivalence des normes)}$$

Ceci implique que la suite $\{\omega_n\}$ est équivalente à une suite croissante.

Si l'on pouvait établir d'abord la régularité de $\mathcal{F}$, on pourrait simplifier la démonstration précédente du théorème 4 et prendre $p > (\log K/\log 2) + 1$ au lieu de $2 \log K/\log 2 + 1$.

COROLLAIRE 3. - Si $\mathcal{B}$ admet suffisamment d'automorphismes tpute partie bornée de $\mathcal{B}$ se plonge dans une partie bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$. Si on désigne par $\mathcal{F}'$ l'adhérence de l'ensemble des fonctions analytiques dans $\mathcal{F}$, toute fonction de $\mathcal{F}'$ opère continuement dans $\mathcal{B}$.

Il est naturel de se demander s'il est possible que $\mathcal{F}$ soit égale à $A\{\omega_n\}$.

La réponse est négative : $\mathcal{F}$ a une propriété qui n'appartient a aucune algèbre du type $A\{\omega_1\}$, à savoir $\mathcal{F}$ admet beaucoup d'endomorphismes. Pour chaque $F_0 \in \mathcal{F}$ ; $F \to F(F_0)$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$. Le théorème suivant qui généralise des résultats connus de Beurling-Helson et de Leibenson montre que ce n'est pas le cas dans les algèbres $A\{\omega_n\}$.

THÉORÈME 5. - Si $F(x) \in A\{\omega_n\}$ implique $F(2x) \in A\{\omega_n\}$ et si $\alpha(x)$ est deux fois continuement dérivable et telle que $F(x) \in A\{\omega_n\}$ implique $F(\alpha(x)) \in A\{\omega_n\}$ alors

$$\alpha(x) = nx + \alpha_0 .$$

Nous terminerons en mentionnant quelques résultats sur la structure de $\mathcal{B}$ à partir de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 6. - Si $\mathcal{F} = C(T)$, $C(T)$ désigne l'algèbre de toutes les fonctions continues, $2\pi$-périodiques alors $\mathcal{B} = C(\mathfrak{M})$, $C(\mathfrak{M})$ étant l'algèbre de toutes les fonctions continues sur $\mathfrak{M}$.

On dit qu'un élément $f \in \mathcal{B}$ est un élément de synthèse spectrale s'il est contenu dans chaque idéal $I$ tel que

$$I \subseteq M \Rightarrow f \in M \text{ pour tout } M \in \mathfrak{M} .$$

THÉORÈME 7. - Si $\mathcal{F} \supseteq D_n(T)$ et si $f \in \mathcal{B}$, $f$ réel, $f^n$ est un élément de synthèse spectrale.