Séminaire Lelong.
Analyse

Jaak Peetre

Comparaison d'opérateurs différentiels

Séminaire Lelong. Analyse, tome 2 (1958-1959), exp. n° 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SL_1958-1959__2__A11_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire d'ANALYSE
(P. LELONG)
Année 1958/59

-:-:-:-

28 avril 1959

COMPARAISON D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

par Jaak PEETRE

Le but de cet exposé est de donner quelques compléments à un théorème de HÖRMANDER relatif à la comparaison d'opérateurs différentiels. Les résultats principaux ont été énoncés dans une note aux Comptes Rendus [7].

NOTATIONS. - Nous allons considérer des opérateurs différentiels P de la forme $P = \sum_{\alpha} a^{\alpha} D_{\alpha}$, où $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$ est un indice multiple,

$$D_{\alpha} = D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_k} \qquad (D_{\ell} = (\sqrt{-1})^{-1} \partial / \partial x^{\ell}) .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, désignons par a_x^{α} la valeur de a^{α} au point x.

Posons $P_x = \sum a_x^{\alpha} D_{\alpha}$. P_x est un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour $\varphi \in \mathcal{E}$, espace des fonctions indéfiniment dérivables, on a $P\varphi = \sum_{\alpha} (|\alpha| !)^{-1} D_{\alpha} \varphi P^{\alpha}$ (formule de LEIBNIZ), où les P^{α} sont définis par la relation $\widehat{P_x^{\alpha}} = (\partial / \partial \xi)^{\alpha} \widehat{P_x}$, $\widehat{P_x^{\alpha}}$ étant la transformée de FOURIER de P_x^{α}, $\widehat{P_x^{\alpha}} = \sum_{\beta} a_x^{\beta} \xi_{\beta - \alpha}$. Faisons en outre la convention d'écrire M, N, ... au lieu de P, Q, ... quand il s'agit d'opérateurs différentiels à coefficients constants.

1. Généralités sur la comparaison d'opérateurs différentiels.

Soient Ω, un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$, P et Q, des opérateurs différentiels sur Ω, et $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$, des espaces de distributions sur Ω, nous allons considérer des relations du type suivant :

$f \in \mathcal{X}$ et $Pf \in \mathcal{Y}$ entraînent $Qf \in \mathcal{Z}$.

Par abus de langage, nous dirons qu'une telle relation est une relation de comparaison pour les opérateurs P et Q. On sait que les relations de comparaison sont extrêmement importantes dans toutes les questions de régularité et d'existence de la théorie des opérateurs différentiels.

EXEMPLES. - Dans sa thèse [2], HÖRMANDER a étudié systématiquement des relations de comparaison dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients constants. En particulier, il traite les exemples suivants.

1° $\mathcal{X} = L^2_0(\Omega)$, $\mathcal{Y} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{Z} = L^2(\Omega)$: HÖRMANDER démontre que, pour que $f \in L^2_0(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour un ouvert Ω , il faut qu'il existe un nombre γ tel que

$$(1) \qquad |\hat{N}(\xi)|^2 < \gamma \sum_{\alpha} |\hat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in R^n$. Inversement, si cette relation est satisfaite $f \in L^2_0(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour <u>tout</u> ouvert Ω <u>relativement compact</u> de R^n .

2° $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = L^2(\Omega)$. Ici on peut démontrer que si $f \in L^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2(\Omega)$ pour un ouvert Ω , alors N est (sauf pour $n = 1$) nécessairement de la forme $aM + b$ avec a et b constants.

Le cas suivant est peu traité dans la littérature :

3° $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{Z} = L^2_{loc}(\Omega)$. Evidemment, pour $f \in L^2(\Omega)$ et $Mf \in L^2(\Omega)$ entraînent $Nf \in L^2_{loc}(\Omega)$, il faut que (1) soit satisfaite. HÖRMANDER a déterminé les M tels qu'il n'y ait pas d'autres N possédant cette propriété (ce problème est lié au problème de déterminer tous les opérateurs différentiels à coefficients constants <u>hypoelliptiques</u>).

Les considérations ci-dessus s'étendent immédiatement au cas de plusieurs opérateurs. Il faut alors remplacer $\mathcal{Y}$ par une suite $\{\mathcal{Y}_i\}$ d'espaces de distributions et P par une suite $\{P_i\}$ d'opérateurs différentiels.

2. <u>Généralisation d'un théorème de HÖRMANDER. Cas des coefficients constants.</u>

Dans ce numéro et le suivant, nous étudierons une généralisation du théorème de HÖRMANDER, cité au 1° d'abord pour le cas des coefficients constants, puis pour le cas des coefficients "variables".

Soit s un nombre réel, nous désignerons par H^s l'espace des distributions telles qu'on ait à la fois $f \in \mathcal{S}'$ et $(1+\Delta)^{s/2} f \in L^2$; ($\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2$ = Laplacien). Nous désignerons par $f \longrightarrow ||f||_s$ la norme :

$$||f||_s = \left(\int |(1+\Delta)^{s/2} f|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Pour $s = 0$, nous écrirons $||f||$ au lieu de $||f||_0$.

On a alors le

THÉORÈME 1. - Soient M et N, des opérateurs différentiels à coefficients constants ; les conditions suivantes sont équivalentes :

i. Il existe un nombre s, tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^s$ entraînent $Nf \in H^s$.

ii. Pour tout s, $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^s$ entraînent $Nf \in H^s$.

iii. Il existe un nombre γ tel que

$$|\hat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma \sum_{\alpha} |\hat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in R^n$.

Plus généralement, on a le

THÉORÈME 2. - Etant donnés M et N, des opérateurs différentiels à coefficients constants, et ρ et σ, des nombres réels, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

i. Il existe un nombre s, tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$.

ii. Pour tout s, $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$.

iii. Il existe un nombre γ tel que

$$(1 + |\xi|^2)^{\sigma} |\hat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma (1 + |\xi|^2)^{\rho} \sum_{\alpha} |\hat{M}^{\alpha}(\xi)|^2$$

pour tout $\xi \in R^n$.

Suivant HÖRMANDER [2], nous dirons, dans le cas du théorème 1, que M est plus fort que N et, dans le cas du théorème 2, que (M, ρ) est plus fort que (N, σ).

DÉMONSTRATION du théorème 2. -

ii. $\longrightarrow$ i. évident.

i. $\longrightarrow$ ii. Soit s un nombre tel que $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{s+\sigma}$ et soit t un nombre autre que s. Nous allons démontrer qu'alors $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{t+\rho}$ entraînent $Nf \in H^{t+\sigma}$. Posons $g = (1 + \Delta)^{(t-s)/2} f$. Soit w une fonction dans $\mathcal{D}$ qui équivaut à 1 dans un voisinage du support de f. On écrit

$$Mg = Mwg + M(1 - w)g .$$

On a $Mg \in H^{s+\rho}$ et g est indéfiniment différentiable en dehors du support de f ; on en déduit $Mwg \in H^{s+\rho}$, d'où $Nwg \in H^{s+\sigma}$. Or on a

$$Nf = (1+\Delta)^{(s-t)/2}\, Nwg + (1+\Delta)^{(s-t)/2}\, N(1-w)g\ .$$

Le premier terme appartient à $H^{t+\sigma}$; le deuxième est indéfiniment différentiable dans un voisinage du support de f. Donc on a $Nf \in H^{t+\sigma}$.

ii. $\longrightarrow$ iii. - En appliquant le théorème du graphe fermé, on voit qu'il existe, pour tout ouvert Ω relativement compact de $\mathbb{R}^n$ et tout s, un nombre C tel que

$$||Nf||_{s+\sigma} \leq C(||Mf||_{s+\rho} + ||f||_{s+\rho}$$

pour toute $f \in \mathcal{D}_\Omega$. Prenons s tel que $s+\rho \geq 0$ et $s+\sigma \geq 0$. Remplaçons f par $e^{\sqrt{-1}x\xi} f$ où $f \neq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$. Un calcul facile montre alors qu'on a

$$C_1(1+|\xi|^2)^{s+\sigma}\int_{|\xi'|\leq 1} |\sum_\alpha (|\alpha|!)^{-1}\hat{N}^\alpha(\xi)\xi'_\alpha|^2\ |\hat{f}(\xi')|^2\, d\xi' \leq$$

$$\leq C_2\, C^2(1+|\xi|^2)^{s+\rho}\int_{|\xi'|\leq 1}(1+|\xi'|^2)^{s+\rho}|\sum_\alpha (|\alpha|!)^{-1}\hat{M}^\alpha(\xi)\,\xi'_\alpha|^2$$

$$|\hat{f}(\xi')|^2\, d\xi' + \int_{|\xi'|\leq 1}(1+|\xi'|^2)^{s+\rho}\ |\hat{f}(\xi')|^2\, d\xi')\ ,$$

d'où on déduit l'inégalité désirée :

$$(1+|\xi|^2)^\sigma\ |\hat{N}(\xi)|^2 \leq \gamma\,(1+|\xi|^2)^\rho \sum_\alpha |\hat{M}^\alpha(\xi)|^2\ .$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Nous allons nous appuyer sur le lemme suivant.

LEMME 1. - (Inégalités de HÖRMANDER-LERAY). - <u>Soit</u> M <u>un opérateur différentiel à coefficients constants. Pour tout ouvert</u> Ω <u>relativement compact de</u> $\mathbb{R}^n$, <u>il existe un nombre</u> C <u>tel que</u>

$$||M^\alpha f|| \leq C||Mf||$$

<u>pour toute</u> $f \in \mathcal{D}_\Omega$, <u>quel que soit</u> α.

Autrement dit, $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in L^2$ entraînent $M^\alpha f \in L^2$. En appliquant la partie (i) $\Longrightarrow$ (ii) du théorème 2 (déjà connue), on arrive ainsi au

LEMME 2. - <u>Soit</u> M <u>un opérateur différentiel à coefficients constants. Alors,</u>

<u>pour tout</u> s , $f \in \mathcal{E}'$ <u>et</u> $Mf \in H^s$ <u>entraînent</u> $M^\alpha f \in H^s$, <u>quel que soit</u> α .

, Soit maintenant $f \in \mathcal{E}'$ et $Mf \in H^{s+\rho}$. On a donc aussi $M^\alpha f \in H^{s+\rho}$. L'hypothèse (iii) , combinée avec le théorème de PLANCHEREL, montre alors qu'on a $Nf \in H^{s+\sigma}$.

Il nous reste à démontrer les inégalités de HÖRMANDER-LERAY.

DÉMONSTRATION du lemme 1. - Nous nous appuyerons sur le résultat suivant, pour la première fois utilisée par MALGRANGE [5] , conséquence du principe de maximum pour les fonctions holomorphes. (Pour la démonstration, voir par exemple HÖRMANDER [3] .)

LEMME 3. - <u>Soit</u> $\varphi(t)$ <u>une fonction holomorphe et</u> $p(t)$ <u>un polynôme de degré</u> m . <u>Alors, on a</u>

$$|p^k(0)\,\varphi(0)| \leq (m!/(m-k)!)((2\pi)^{-1} \int_{|t|=1} |p(t)\,\varphi(t)|^2\, |dt|)^{1/2}$$

($p^k(t)$ est la dérivée d'ordre k de $p(t)$) .

Nous appliquons le lemme 3 avec

$$p(t) = \hat{M}(\xi + te_1)$$

et

$$\varphi(t) = \hat{f}(\xi + te_1)$$

($e_1 = (1 , 0 , \ldots , 0)$) . On obtient alors

$$|\hat{M}^1(\xi)\,\hat{f}(\xi)|^2 \leq (m!/(m-k)!)^2\, (2\pi)^{-1} \int_{|t|=1} |\hat{M}(\xi + te_1)|^2\, |\hat{f}(\xi + te_1)|^2\, |dt|$$

d'où d'après le théorème de PLANCHEREL

$$||M^1 f|| \leq (m!/(m-k)!) \sup_{|t|=1} || e^{\sqrt{-1}\, tx^1} Mf|| .$$

Parce que Ω est relativement compact par hypothèse, ceci entraîne l'inégalité :

$$||M^1 f|| \leq C||Mf|| ,$$

d'où le lemme par récurrence sur l'ordre de dérivation.

3. <u>Généralisation d'un théorème de HÖRMANDER</u>. <u>Cas des coefficients "variables"</u>.

Nous allons maintenant formuler, pour un cas d'opérateurs différentiels à coefficients "variables", un théorème de comparaison qui généralise, dans une certaine mesure, les résultats du numéro précédent. Nous allons considérer des opérateurs différentiels P de la forme

$$P = \sum_j a^j M_j \quad ,$$

où les M_j (en nombre fini) sont des opérateurs à coefficients constants et a^j des fonctions indéfiniment differentiables.

En outre, nous faisons l'hypothèse suivante :

<u>Pour tout</u> $x \in \mathbb{R}^n$, <u>l'opérateur</u> P_x <u>est plus fort que chacun des</u> M_j .

Alors on a le

THÉORÈME 3. - <u>Tout</u> $x \in R^n$ <u>admet un voisinage ouvert</u> Ω_x <u>tel que, quel que soit</u> s , $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ <u>et</u> $Pf \in H^s$ <u>entraînent</u> $M_i f \in H^s$ <u>pour tout</u> i .

Supposons maintenant que Q soit un opérateur différentiel de la forme

$$Q = \sum_j b^j N_j \quad ,$$

où les N_j sont tels que chaque (N_j , Θ) est moins fort que le M_j correspondant, pour un Θ convenable, et les b^j sont des fonctions indéfiniment différentiables. Alors, le résultat suivant découle aisément du théorème 3.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ <u>et</u> $Pf \in H^s$, <u>alors</u> $Qf \in H^{s+\Theta}$.

<u>Principe de démonstration du théorème</u> 3. Le plan de démonstration est classique :

a. <u>On fabrique des inégalités "a priori"</u>. On prend $s \geqslant 0$.

Tout $x \in R^n$ admet un voisinage ouvert Ω_x tel qu'il existe des constantes C et C_s (C ne dépend pas de s) pour lesquelles,

$$\sum_j \| M_j f \|_s \leq C \| Pf \|_s + C_s \sum_j \| M_j f \|_{\sup(s-1 , 0)} \quad .$$

Il s'agit de faire une étude assez fine des multiplicateurs de H^s et des inégalités de HÖRMANDER-LERAY .

b. <u>On effectue une régularisation</u>. Etant donnée $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ avec $Pf \in H^s$ et $M_j f \in H^{\sup(s-1 , 0)}$, on remplace f par $\delta_i * f$, où (δ_i) est une suite de fonctions dans $\mathcal{D}$ qui converge vers δ (fonction de Dirac) d'une manière convenable. En appliquant un lemme (classique) de FRIEDRICHS [1] , on déduit $M_j f \in H^s$.

(a) et (b) donnent le théorème 3 pour le cas des distributions d'ordre suffisamment grand. Il nous reste donc à passer aux distributions d'ordre quelconque.

c) <u>On fait un relèvement sur l'exposant</u> s . - Supposons que $f \in \mathcal{E}'_{\Omega_x}$ et $Pf \in H^s$ et $M_j f \in H^t$. Prenons un nombre entier <u>pair</u> N avec $t + N \geq 0$ et posons $g = (1 + \Delta)^{-N/2} f$. On peut maintenant raisonner comme dans la démonstration du théorème 2 , sauf qu'il faut faire plus attention au fait que P n'est pas invariant par les translations de R^n (d'où la nécessité de prendre N pair!) .

APPLICATION : <u>Hypoellipticité</u>. - Si les M_j sont tels qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que, pour chaque j et chaque $\alpha \neq 0$, (M_j^α , k) est moins fort que $\{M_j\}$, alors le théorème 3, combiné avec la formule de LEIBNIZ, montre que P est hypoelliptique.

On retrouve ainsi un théorème de HÖRMANDER [4] et MALGRANGE [6] (voir aussi l'exposé de ZERNER [8]) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRIEDRICHS (K. O.). - On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 6, 1953, p. 299-326.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the theory of general partial differential operators, Acta Math., t . 94, 1955, p. 161-248 (Thèse Sc. math.).

[3] HÖRMANDER (Lars). - Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand., t. 5, 1957, p. 27-39.

[4] HÖRMANDER (Lars). - On interior regularity of the solutions of partial differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 11, 1958, p. 197-218.

[5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[6] MALGRANGE (Bernard). - Plongement des variétés analytiques réelles, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 101-112.

[7] PEETRE (Jaak). - Une classe d'opérateurs différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248, 1959, p. 1102-1103.

[8] ZERNER (Martin). - Equations aux dérivées partielles dont les solutions sont indéfiniment dérivables (hypoellipticité), Séminaire Lelong, t. 2, 1958/59, n° 12.