

SÉMINAIRE LELONG.

ANALYSE

PIERRE DOLBEAULT

Espaces analytiques

Séminaire Lelong. Analyse, tome 1 (1957-1958), exp. n° 4, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SL_1957-1958__1__A3_0>

© Séminaire Lelong. Analyse

(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Lelong. Analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES ANALYTIQUES

par Pierre DOLBEAULT

Les espaces analytiques ont été définis de façon différente par H. BEHNKE et K. STEIN [1] (α -espaces) d'une part, par H. CARTAN [8], J.-P. SERRE [10] (β -espaces) et CHOW d'autre part.

De nombreux problèmes ont été étudiés sur ces espaces. Par exemple, GRAUERT a défini les espaces holomorphiquement complets qui généralisent les variétés de Stein au cas où l'espace, au lieu d'être une variété, est un β -espace [2]. Un β -espace normal s'est introduit comme quotient d'une variété analytique complexe X par un groupe discontinu d'automorphismes analytiques de X (H. CARTAN [8]). Des α -espaces sont obtenus dans la théorie des décompositions analytiques des espaces analytiques complexes due à K. STEIN [11].

GRAUERT et REMMERT ont annoncé des résultats concernant les relations entre les deux notions ainsi définies [4] ; ces résultats sont démontrés dans [5].

Cet exposé a pour but de définir les notions de α -espace et de β -espace et d'énoncer leurs relations d'après Grauert-Remmert, en suivant le résumé d'un exposé récent de GRAUERT [3]. En outre un schéma détaillé du processus de normalisation d'un β -espace est exposé d'après [7] et [8].

I. Définition de Cartan-Serre : β -espaces [8], exposé 6, [10].

1. Ensembles analytiques d'un ouvert de l'espace numérique complexe C^n .

L'espace C^n est muni de la topologie usuelle. Soit G un ouvert de C^n . Un ensemble analytique E de G est un sous-ensemble fermé de G tel que, pour tout $x \in E$, il existe des fonctions en nombre fini f_i , $i = 1, \dots, k$, holomorphes dans un voisinage U de x dans C^n , et tel que

$$U \cap E = \{x \in U \mid f_i(x) = 0, i = 1, \dots, k\}.$$

Alors, E muni de la topologie induite par celle de C^n est localement compact.

Les notions de dimension, d'irréductibilité et de point régulier d'un ensemble analytique, ainsi que le résultat suivant, sont supposés connus :

PROPOSITION 1. - L'ensemble K des points non réguliers d'un ensemble analytique E d'un ouvert $G \subset \mathbb{C}^n$ est un ensemble analytique $K \subset G$; l'ensemble $E - K$ est une variété analytique complexe ; pour tout point $x \in E$, on a :
 $\dim_x K < \dim_x E$.

Un point $x \in E$ est dit point irréductible de E s'il existe des voisinages arbitrairement petits $U(x)$ de x dans $\mathbb{C}^n$ tels que $U(x) \cap E$ soit irréductible. Le germe d'ensemble analytique E_x défini par E en x est alors irréductible et réciproquement.

2. Faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E .

Si X est un espace topologique quelconque, soit $\mathcal{C}(X)$ le faisceau des germes de fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, alors $\mathcal{O}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$. Pour tout $x \in E$, il existe un homomorphisme de restriction :

$$\varepsilon_x : \mathcal{C}_x(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{C}_x(E) ;$$

l'image de $\mathcal{O}_x$ par ε_x est un sous-anneau $\mathcal{O}_x(E)$ de $\mathcal{C}_x(E)$ et l'ensemble des $\mathcal{O}_x(E)$ est un sous-faisceau $\mathcal{O}(E)$ de $\mathcal{C}(E)$ appelé le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur E .

Soit $I_x(E)$ le noyau de ε_x restreint à $\mathcal{O}_x$ (c'est l'idéal des germes de fonctions $f \in \mathcal{O}_x$ dont la restriction à E est nulle), on a :

$$\mathcal{O}_x(E) \approx \mathcal{O}_x / I_x(E) .$$

On dit encore que $\mathcal{O}_x(E)$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur le germe d'ensemble analytique E_x défini par E en x et on le note $A(E_x)$; le faisceau $\mathcal{O}(E)$ sera alors noté $A(E)$.

Une fonction holomorphe sur un ouvert u de E est une section du faisceau $A(E)$ au-dessus de u . Remarquons qu'une fonction holomorphe est toujours continue.

3. Espaces annelés.

Soient X un espace topologique et $\mathcal{S}$ un sous-faisceau d'anneaux commutatifs unitaires de $\mathcal{C}(X)$, alors, le couple $(X, \mathcal{S})$ (ou, pour abréger X) est appelé un espace annelé ; $\mathcal{S}$ est appelé faisceau structural de X .

Morphismes. - Soient $(X_1, \mathcal{S}_1)$ et $(X_2, \mathcal{S}_2)$ deux espaces annelés, alors, une application

$$\varphi: X_1 \rightarrow X_2$$

est appelée un morphisme si :

1° φ est continue ;

2° U_2 étant un ouvert de X_2 et f_2 une section de $\mathcal{S}_2$ au-dessus de U_2 , alors :

$$f_1 = f_2 \circ \varphi$$

est une section de $\mathcal{S}_1$ au-dessus de l'ouvert $U_1 = \varphi^{-1}(U_2)$.

Un morphisme φ est appelé un bimorphisme (ou isomorphisme) si φ et φ^{-1} sont des morphismes.

En particulier, si E est un ensemble analytique d'un ouvert G de $\mathbb{C}^n$, le couple $(E, \mathcal{A}(E))$ est un espace annelé.

4. β -espace.

Un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ est β -espace analytique ou β -espace si :

1° X est séparé ;

2° pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ qui, muni de la topologie de X et du faisceau induit par $\mathcal{O}$, soit isomorphe à l'espace annelé $(E, \mathcal{A}(E))$ où E est un ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Le faisceau $\mathcal{O}$ sera appelé le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X .

Si X et Y sont deux espaces analytiques, tout morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ sera appelé une application holomorphe de X dans Y .

Si V est un ouvert de X on appelle carte de V tout isomorphisme de V sur un ensemble analytique E d'un ouvert G d'un espace numérique complexe.

D'après la définition d'un β -espace, tout point $x \in X$ appartient à un ouvert V ayant une carte.

Si X est un β -espace, un sous-ensemble Y de X est dit analytique si, pour toute carte $\varphi: V \rightarrow E \subset G$, l'image $\varphi(Y \cap V)$ est un ensemble analytique de G contenu dans E ; alors, Y est muni d'une structure de β -espace induite.

$\varphi: V \rightarrow E$ étant une carte au voisinage d'un point $x \in X$, alors, par définition :

- la dimension de X en x ($\dim_x X$) est égale à $\dim_{\varphi(x)} E$;
- le point $x \in X$ est régulier si $\varphi(x)$ est un point régulier de E ;
- le point $x \in X$ est irréductible si $\varphi(x)$ est un point irréductible de E ;

cela équivaut au fait que O_x est un anneau d'intégrité. Un β -espace dont tous les points sont irréductibles est dit β_1 -espace.

Il résulte alors de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. - L'ensemble K des points non réguliers d'un β -espace X est un sous-ensemble analytique de X . En tous les points $x \in K$, on a : $\dim_x K < \dim_x X$, et l'ensemble $X - K$ est une variété analytique complexe.

5. Espaces normaux.

Le β -espace X est dit normal en x si l'anneau O_x est intégralement clos dans son anneau de fractions.

PROPOSITION 3. - Si un β -espace X est normal en un point x , alors x est un point irréductible de X .

DÉMONSTRATION (communiquée par R. REMMERT). - En utilisant une carte, il suffit de démontrer la proposition lorsque X est un ensemble analytique d'un ouvert G de C^n . Si $x \in E$ est un point non irréductible, il existe un élément z de l'anneau des fractions de $A(E_x)$, entier sur $A(E_x)$ qui n'appartient pas à $A(E_x)$, donc E n'est pas normal en x . En effet, soit $E_x = E_1 \cup E_2$, où E_1 et E_2 sont deux germes d'ensembles analytiques distincts de E_x . Le germe de fonction z égal à 1 sur E_1 et à 0 sur E_2 n'appartient pas à $A(E_x)$ puisque, en x , il a deux valeurs distinctes, cependant :

1° z satisfait à $z^2 - z = 0$, donc est entier sur $A(E_x)$;

2° soit f_1 (resp. f_2) $\in \mathcal{O}_x$ qui s'annule sur E_1 (resp. sur E_2), alors la restriction de $f_2/(f_1 + f_2)$ appartient à l'anneau des fractions de $A(E_x)$, et définit le germe z .

Un β -espace est dit normal (ou β_n -espace) s'il est normal en chacun de ses points. Ainsi tout β_n -espace est un β_1 -espace.

6. Normalisation d'un β -espace [6], [8].

Soit X un β -espace et soit K l'ensemble des points non réguliers de X . Un couple $(\hat{X}, \mu)$ est appelé revêtement canonique d'un β -espace X si :

1° $\hat{X}$ est un espace topologique séparé ; $\mu: \hat{X} \rightarrow X$ est une application continue propre (i.e. : l'image réciproque, par μ , de tout compact est un compact), non dégénérée (i.e. : telle que, pour $x \in X$, l'ensemble $\mu^{-1}(x)$ soit discret) ;

2° $\mu: \hat{X} - \mu^{-1}(K) \rightarrow X - K$ est un homéomorphisme surjectif ;

3° $\mu^{-1}(K)$ est partout non dense dans $\hat{X}$ et ne sépare nulle part $\hat{X}$ (i.e. si D est un ouvert connexe contenu dans $\hat{X}$, alors $D - \mu^{-1}(K)$ est connexe).

PROPOSITION 4. - Pour chaque β -espace X , il existe un revêtement canonique (X, μ) qui est déterminé de façon unique à un homéomorphisme près ; l'application $\mu: \hat{X} \rightarrow X$ est un homéomorphisme si et seulement si X est un β_1 -espace.

THÉOREME 1. - Soit $(\hat{X}, \mu)$ le revêtement canonique d'un β -espace ; alors $\hat{X}$ possède un faisceau structural et un seul $\hat{\mathcal{O}}$, tel que $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ soit un β_n -espace et que $\mu: \hat{X} \rightarrow X$ soit une application holomorphe. L'espace $\hat{X} - \mu^{-1}(K)$ est une variété analytique complexe ; l'application $\mu: \hat{X} - \mu^{-1}(K) \rightarrow X - K$ est biholomorphe.

Le β -espace $(\hat{X}, \hat{\mathcal{O}})$ est appelé la normalisation de $(X, \mathcal{O})$.

Il suffit de démontrer la proposition 4 et le théorème 1 sur une carte, donc de supposer que X est un ensemble analytique d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les numéros 7, 8 et 9 ont pour objet de donner le schéma des démonstrations.

7. Construction du revêtement canonique. Cas d'un ensemble analytique principal ([8], exposés 7, 8, 8 bis).

Soit X une variété analytique complexe ; soit $\mathcal{G}(X)$ l'ensemble de tous les germes d'ensembles analytiques irréductibles en tous les points de X muni de la topologie suivante : dans un ouvert de X , soit E un ensemble analytique et soit $\tilde{E}$ l'ensemble de toutes les composantes irréductibles des germes E_x définis par E aux points $x \in E$; par définition, les parties $\tilde{E}$ de $\mathcal{G}(X)$ constituent un système fondamental d'ouverts de la topologie de $\mathcal{G}(X)$.

En particulier, si E est un ensemble analytique de X , l'ensemble $\tilde{E}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{G}(X)$ est tel que la projection canonique $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ qui applique une composante irréductible d'un germe E_x sur le point x soit continue.

Supposons, d'abord, que E soit un ensemble analytique principal (i.e. défini au voisinage de chaque point par une seule équation), on montre facilement que $\tilde{E}$ a une topologie séparée, et que l'application $\pi : \tilde{E} \rightarrow E$ est propre, en particulier, $\tilde{E}$ est localement compact ; d'après la définition de $\tilde{E}$, l'application π est non dégénérée. Si K est l'ensemble des points non réguliers de E , alors, la restriction de π à $\tilde{E} - \pi^{-1}(K)$ est biunivoque puisque tout point régulier est irréductible et, puisque $\tilde{E}$ est localement compact, c'est un homéomorphisme surjectif.

Dans tout ouvert U de $\tilde{E}$, on appelle fonction holomorphe toute fonction f définie et continue dans U qui, en tout point x de $U \cap (\tilde{E} - \pi^{-1}(K))$ induit un germe égal à $g \cdot \pi$ où g est un germe de fonction holomorphe sur E en x . Les fonctions holomorphes dans U constituent un anneau commutatif unitaire $A(\tilde{E}_U)$. Etant donné un point $\tilde{a} \in \tilde{E}$, la limite inductive des $A(\tilde{E}_U)$ où les U sont les voisinages ouverts de $\tilde{a}$ est, par définition, l'anneau $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ des germes de fonctions holomorphes en $\tilde{a}$. On voit que l'ensemble des anneaux $A(\tilde{E}_{\tilde{a}})$ constitue un faisceau $A(\tilde{E})$, que le couple $(\tilde{E}, A(\tilde{E}))$ est un espace annelé et que $\tilde{E} - \pi^{-1}(K)$ est une variété analytique complexe.

On appelle point régulier de $\tilde{E}$ un point au voisinage duquel l'espace annelé $(\tilde{E}, A(\tilde{E}))$ est une variété analytique complexe ; alors, l'ensemble des points non réguliers est contenu dans $\pi^{-1}(K)$.

PROPOSITION 5. - Tout point de l'espace $\tilde{E}$ possède un système fondamental de voisinages ouverts dont l'intersection avec l'ensemble des points réguliers est connexe.

Cela résulte du fait que E possède aussi cette propriété puisque l'ensemble des points non réguliers de E dans un voisinage U de chaque point $x \in E$ est contenu dans l'ensemble des zéros du discriminant du polynôme distingué dont U est le lieu des zéros.

PROPOSITION 6. - L'anneau $A(\tilde{E}_a)$ est un anneau d'intégrité.

En effet, en un point régulier $\tilde{a} \in \tilde{E}$, l'anneau $A(\tilde{E}_a)$ est d'intégrité ; la propriété reste vraie en un point quelconque à cause de la proposition 5.

On appelle composé direct des anneaux $A_1, \dots, A_p$ l'anneau dont les éléments sont les p -tuples $(u_1, \dots, u_p)$ ($u_i \in A_i$), et dont les lois de composition sont définies ainsi : u_i et v_i étant des éléments de A_i :

$$(u_1, \dots, u_p) + (v_1, \dots, v_p) = (u_1 + v_1, \dots, u_p + v_p) ;$$

$$(u_1, \dots, u_p) \cdot (v_1, \dots, v_p) = (u_1 v_1, \dots, u_p v_p) .$$

Soit $a \in E$, l'ensemble $\pi^{-1}(a)$ se compose d'un nombre fini de points $\tilde{a}_i \in \tilde{E}$; appelons $\tilde{A}(E_a)$ l'anneau composé direct des anneaux $A(\tilde{E}_{\tilde{a}_i})$, en particulier, si a est un point irréductible de E , on a : $\tilde{A}(E_a) = A(\tilde{E}_a)$.

THÉOREME 2 ([8], exposé 7). - L'anneau $\tilde{A}(E_a)$ est la clôture intégrale de $A(E_a)$; c'est un anneau noethérien et un module de type fini sur $A(E_a)$. Si le germe E_a est irréductible, il existe un entier m et un idéal J de l'anneau H_m des séries à m variables convergentes en 0 tels que $\tilde{A}(E_a) \approx H_m/J$.

La démonstration repose, en particulier, sur le lemme suivant :

LEMME 1. - Après une éventuelle transformation linéaire de coordonnées en a , le germe E_a étant défini par l'équation $P(z ; x_1, \dots, x_k) = 0$, où P est un polynôme distingué en z , tout élément $f \in \tilde{A}(E_a)$ satisfait à une relation $(\partial P(z)/\partial z)f = \overline{Q(z)}$ où $\partial P(z)/\partial z$ est la restriction à $\tilde{E}$ du polynôme $\partial P/\partial z$ et où $\overline{Q(z)}$ est la restriction à $\tilde{E}$ d'un polynôme de degré $\leq \deg P(z) - 1$, à coefficients holomorphes en $x_1, \dots, x_k$ au voisinage de l'origine.

8. Cas d'un ensemble analytique quelconque ([8], exposés 8, 8 bis).

Soit E_a un germe d'ensemble analytique irréductible, de dimension q , d'une variété analytique complexe de dimension n (ou, ce qui revient au même, de $\mathbb{C}^n$). On sait, qu'après une éventuelle transformation linéaire de coordonnées, il existe

un polynôme distingué irréductible $P(z_{q+1}; z_1, \dots, z_q)$ de degré h et des polynômes $Q_i(z_{q+1}; z_1, \dots, z_q)$ distingués de degré $\leq h-1$ tels que E_a soit l'adhérence, dans C^n , du lieu des zéros des polynômes $P(z_{q+1}; z_1, \dots, z_q)$ et $(\partial P / \partial z_{q+1})z_i - Q_i$, pour $i = q+2, \dots, n$.

Soit V_v le germe d'ensemble analytique principal défini, dans C^{q+1} , par $P(z_{q+1}; z_1, \dots, z_q) = 0$ et soit p l'application qui envoie le point de coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ de E_a sur le point de coordonnées $(z_1, \dots, z_{q+1})$ de V_v .

THEOREME 3. - Il existe un germe d'homéomorphisme $\tilde{p}$ du germe d'ensemble analytique irréductible $\tilde{E}_a$ sur $\tilde{V}_v$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_a & \xrightarrow{\tilde{p}} & \tilde{V}_v \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ E_a & \xrightarrow{p} & V_v \end{array}$$

où π_1 et π_2 désignent les projections canoniques, soit commutatif.

DEMONSTRATION abrégée. - D'après le lemme 1, les clôtures intégrales de $A(E_a)$ et de $A(V_v)$ sont identiques, donc la clôture intégrale $\tilde{A}(E_a)$ de $A(E_a)$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{A}(\tilde{V}_v)$. Les fonctions $z_1, \dots, z_n$ sont holomorphes sur $\tilde{V}_v$, on définit un germe d'application $\varphi: \tilde{V}_v \rightarrow E_a$ en faisant correspondre à tout point M de $\tilde{V}_v$ le point de C^n dont les coordonnées sont les valeurs de $z_1, \dots, z_n$ en M .

L'image réciproque, par p , de l'ensemble des points singuliers de V_v dans E_a est contenue dans l'ensemble des points où $\partial P / \partial z_{q+1} \neq 0$, donc est dense; on montre alors qu'il existe une application continue $\tilde{p}$ et une seule telle que le diagramme de l'énoncé soit commutatif.

L'image réciproque, par φ , de l'ensemble des points réguliers de E_a étant dense dans $\tilde{V}_v$, on montre qu'il existe une application continue $\tilde{\varphi}$ déterminée de façon unique telle que $\varphi = \pi_1 \circ \tilde{\varphi}$. Alors, $\tilde{\varphi} \circ \tilde{p}$ (resp. $\tilde{p} \circ \tilde{\varphi}$) est l'application identique de $\tilde{E}_a$ (resp. $\tilde{V}_v$) sur lui-même, donc $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{p}$ sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre.

Le théorème 3 et les propriétés de E établies au n° 7 lorsque E est principal montrent que $\tilde{E}$ et la projection $\tilde{E} \rightarrow E$ définie en chaque point a par π_1 constituent un revêtement canonique de E et établissent la proposition 4

pour E .

9. Normalisation d'un ensemble analytique d'un ouvert de C^n [8].

Un faisceau d'anneaux $\mathcal{F}$ défini sur une variété analytique complexe M est dit analytique si, désignant par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur M , pour tout point $x \in M$, l'anneau $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$ -module.

Soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux commutatifs unitaires sur M et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{A}$ -modules sur M ; soient $s_1, \dots, s_p$ des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, soit φ l'homomorphisme $\mathcal{A}^p(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ qui applique $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{A}_x^p$ ($x \in U$) dans $\sum_{i=1}^p f_i s_i(x) \in \mathcal{F}_x$. Le noyau $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ de l'homomorphisme φ est une sous-faisceau de $\mathcal{A}^p$ appelé le faisceau des relations entre les s_i (sur U).

Un faisceau de $\mathcal{A}$ -modules $\mathcal{F}$ est dit de type fini s'il est localement engendré par un nombre fini de ses sections ([9], p.207).

Un faisceau de $\mathcal{A}$ -modules $\mathcal{F}$ est dit cohérent ([9], p. 207) si :

- a. $\mathcal{F}$ est de type fini ;
- b. si $s_1, \dots, s_p$ sont des sections de $\mathcal{F}$ au-dessus d'un ouvert $U \subset M$, le faisceau des relations entre les s_i est un faisceau de type fini.

Etant donné un ensemble analytique W d'une variété analytique complexe M on lui associe le faisceau $I(W)$ défini ainsi :

- pour $z \notin W$, soit $I_z(W) = \mathcal{O}_z(M)$;
- pour $z \in W$, soit $I_z(W)$ l'idéal des éléments de $\mathcal{O}_z(M)$ qui s'annulent identiquement sur le germe W_z , alors, on a :

THEOREME 4. - Le faisceau $I(W)$ est un faisceau cohérent.

Pour la démonstration, voir [7], exposé 16.

CONSEQUENCE. - Le faisceau $A(W) = \mathcal{O}(M)/I(W)$ est un faisceau cohérent.

Soit E un ensemble analytique d'un ouvert U de C^n . Utilisant les notations du n° 8, on appellera germe de fonction holomorphe sur $\tilde{E}_a$ tout germe $g = f.\tilde{p}$, où $f \in A(\tilde{V}_v)$; les germes de fonctions holomorphes sur $\tilde{E}_a$ ont donc la même définition que lorsque E_a est principal. L'ensemble des germes g est un anneau isomorphe à $A(\tilde{V}_v)$ qu'on notera $A(\tilde{E}_a)$.

Pour tout $x \in U$, on pose :

$$\tilde{\Lambda}_x(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E, \\ \tilde{\Lambda}(E_x) & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

$\tilde{\Lambda}_x(E)$ est un $\mathcal{O}_x(C^n)$ -module ; la réunion $\tilde{\Lambda}(E)$ des $\tilde{\Lambda}_x(E)$ a une structure de faisceau analytique sur U , la topologie sur $\tilde{\Lambda}(E)$ étant définie de la façon suivante : pour tout ouvert u de U et toute fonction holomorphe f sur l'ouvert de $\tilde{E}$ image réciproque de $E \cap u$ pour la projection canonique $\tilde{E} \rightarrow E$, l'ensemble des éléments induits par f sur chacun des $\tilde{\Lambda}_x(E)$ pour $x \in u$ définit un ouvert de la topologie de $\tilde{\Lambda}(E)$; les ouverts ainsi définis constituent un système fondamental d'ouverts de cette topologie.

THÉOREME 5 (OKA). - Le faisceau $\tilde{\Lambda}(E)$ est un faisceau analytique cohérent.

Pour la démonstration, voir [8], exposé 10 et 11.

Soit $x \in E$ et soit $\tilde{x}_1$ un point de $\tilde{E}$ qui se projette sur x , de sorte que $\tilde{E}_{\tilde{x}_1}$ est une composante irréductible de E_x ; l'anneau $\tilde{\Lambda}(E_x)$ est le composé direct des anneaux intégralement clos $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}_{\tilde{x}_1})$; à chaque composante irréductible $\tilde{E}_{\tilde{x}_1}$ est associée, dans le théorème 3, une composante irréductible $\tilde{V}_{\tilde{v}_1}$ de V_v ; d'après le théorème 2, il existe un entier m_1 et un idéal J_1 de H_{m_1} tel que l'anneau $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}_{\tilde{x}_1}) \approx \tilde{\Lambda}(\tilde{V}_{\tilde{v}_1})$ soit isomorphe à H_{m_1}/J_1 . Soit $\tilde{E}^i$ un ensemble analytique d'un ouvert U^i de C^{m_i} définissant le germe $\tilde{E}_{y_1}^i$ de l'idéal J_1 ; l'anneau H_{m_1}/J_1 est l'anneau $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}_{y_1}^i)$ des germes de fonctions holomorphes sur $\tilde{E}_{y_1}^i$.

Soit $\tilde{\Lambda}^i(E)$ le sous-faisceau de $\tilde{\Lambda}(E)$ dont les seuls éléments non nuls sont les germes de fonctions holomorphes sur une composante de $\tilde{E}$ induisant le seul germe irréductible E_{x_1} . Le faisceau $\tilde{\Lambda}(E)$ étant cohérent (théorème 5), il en est de même de son sous-faisceau de type fini $\tilde{\Lambda}^i(E)$ ([9], p 208).

Considérons le faisceau $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}^i) = \mathcal{O}(U^i)/I(\tilde{E}^i)$ dans les notations de la conséquence du théorème 4 ; on a : $I_{y_1}(\tilde{E}^i) \approx J_1$. Le faisceau $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}^i)$ est cohérent d'après la conséquence du théorème 4 et $\tilde{\Lambda}_x^i(E) \approx \tilde{\Lambda}(\tilde{E}_{\tilde{x}_1}) \approx \tilde{\Lambda}_{y_1}(\tilde{E}^i)$, donc les deux faisceaux cohérents $\tilde{\Lambda}^i(E)$ et $\tilde{\Lambda}(\tilde{E}^i)$ sont isomorphes sur tout un voisinage de x .

L'isomorphisme ci-dessus définit un isomorphisme d'un voisinage de $\tilde{x}_i$ de l'espace annelé $(\tilde{E}^i, \tilde{A}^i(E))$ sur un voisinage de y_i de l'espace annelé $(\check{E}^i, A(\check{E}^i))$; ce dernier est un ensemble analytique d'un ouvert de C^{n_i} muni du faisceau de ses germes de fonctions holomorphes.

L'espace annelé $(\tilde{E}, \tilde{A}(E))$ est donc un β -espace ; de plus, comme $A(\tilde{E}_{\tilde{x}})$ est intégralement clos en tout point $\tilde{x} \in \tilde{E}$, c'est un espace normal.

Enfin, l'application de $\tilde{E}$ sur E définie par π_1 en tout point de $\tilde{E}$ est un morphisme, donc définit une application holomorphe de $\tilde{E}$ sur E .

Cela établit le théorème 1 pour E , donc pour tout β -espace.

II. Définition de Behnke-Stein : α -espaces [1].

1. Revêtements analytiques [3], [4].

Soit Y un domaine connexe de C^n (ou plus généralement une variété analytique complexe connexe de dimension n). Un triple $\mathcal{U} = (\hat{Y}, \hat{\Phi}, Y)$ est appelé un revêtement analytique de Y si :

a. $\hat{Y}$ est un espace séparé, localement compact ; $\hat{\Phi} : \hat{Y} \rightarrow Y$ est une application continue et propre de $\hat{Y}$ sur Y ; tout ensemble $\hat{\Phi}^{-1}(y_0)$, $y_0 \in Y$ est fini ;

b. Il existe un ensemble analytique $A \subset Y$ de dimension complexe $\leq n-1$ tel que :

$$\hat{\Phi} : \hat{Y} - \hat{\Phi}^{-1}(A) \rightarrow Y - A$$

soit un homéomorphisme local ; tout point $y_1 \in \hat{\Phi}^{-1}(A)$ possède une base de voisinages connexes V_L tels que $V_L - (\hat{\Phi}^{-1}(A) \cap V_L)$ soit non vide et connexe.

Il résulte de la définition que le revêtement, au-dessus de $Y - A$, est non ramifié et que le nombre de points de $\hat{\Phi}^{-1}(y_0)$ pour $y_0 \in Y - A$ est fixe ; on l'appelle le nombre de feuillets du revêtement. Les points $y \in \hat{Y}$ en lesquels $\hat{\Phi}$ n'est pas un homéomorphisme local sont appelés les points de ramification de $\mathcal{U}$; soit B l'ensemble de ces points, alors, $\hat{\Phi}(B) \subset A$.

On démontre [3] :

PROPOSITION 7. - $\hat{\Phi}(B)$ est un ensemble analytique de dimension $n-1$.

PROPOSITION 8. - Soit $\mathcal{Y}' = (\hat{Y}', \bar{\Phi}', Y - A)$ un revêtement analytique non ramifié, où A est un ensemble analytique de Y de dimension $< \dim Y$; alors $\mathcal{Y}'$ peut être prolongé en un revêtement analytique de Y, de façon unique, à un isomorphisme près.

2. Fonctions holomorphes [3].

Soient $\mathcal{Y} = (\hat{Y}, \bar{\Phi}, Y)$ un revêtement analytique de Y, B l'ensemble des points de ramification, D un ouvert de $\hat{Y}$, f une fonction à valeurs complexes dans D ; f est dite holomorphe dans D si :

1° f est continue dans D ;

2° si $y_0 \in D - B$ et si $U(y_0)$ est un voisinage de y_0 appliqué homéomorphiquement sur un voisinage V de $z_0 = \bar{\Phi}(y_0)$, alors $f \bar{\Phi}^{-1}(z)$ est holomorphe dans V.

L'ensemble des germes de fonctions holomorphes sur $\hat{Y}$ constitue un faisceau $\mathcal{O}$ et $(\hat{Y}, \mathcal{O})$ est un espace annelé.

3. α -espace.

Un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ est un α -espace si :

1° X est séparé ;

2° en chaque point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ qui, muni de la topologie de X et du faisceau induit par $\mathcal{O}$ soit isomorphe à l'espace annelé constitué par l'espace de revêtement d'un revêtement analytique muni du faisceau des germes de fonctions holomorphes.

PROPOSITION 9. - Le théorème de prolongement de Riemann est valable pour les α -espaces [3], [1].

III. Relations entre les α -espaces et les β -espaces [3], [4], [5].

D'après le théorème d'immersion de Remmert-Stein [6] et le théorème de prolongement de Riemann, on a :

PROPOSITION 10. - Tout β_n -espace est un α -espace.

Un revêtement analytique $(\hat{Y}, \bar{\Phi}, Y)$ est appelé un revêtement de Cartan si, en chaque point $z_0 \in Y$, il existe un voisinage $V(z_0) \subset Y$ et, dans $U = \bar{\Phi}^{-1}(V)$, une fonction holomorphe g telle que $A(V)$ désignant l'anneau des

fonctions holomorphes sur V , le degré $(g : \Lambda(V))$ soit égal au nombre b de feuilletts du revêtement (i.e. que g soit définie par un polynôme unitaire irréductible de degré b à coefficients dans $\Lambda(V)$).

Un α -espace qui est localement isomorphe à un revêtement de Cartan est appelé un α_c -espace.

On démontre [3] :

PROPOSITION 11. - Tout β_n -espace est un α_c -espace.

Inversement, en utilisant le théorème 5, on prouve :

PROPOSITION 12. - Tout α_c -espace est un β_n -espace.

GRAUERT et REMMERT ont montré :

THÉOREME 6. - Tout revêtement analytique est un revêtement de Cartan [4], [5].

D'où, à l'aide des propositions 11 et 12 :

THÉOREME 7. - Les classes des α -espaces et des β_n -espaces sont identiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHNKE (H.) und STEIN (K.). - Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Annalen, t. 124, 1951, p. 1-16.
- [2] GRAUERT (Hans). - Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Annalen, t. 129, 1955, p. 233-259.
- [3] GRAUERT (Hans). - Complex spaces, Seminar on complex analysis (Octobre 1957). - Princeton, Institute for advanced Study.
- [4] GRAUERT (H.) et REMMERT (R.). - Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 918-921.
- [5] GRAUERT (H.) und REMMERT (R.). - Über den Begriff des komplexen Raumes, Math. Annalen, 1958 (à paraître).
- [6] REMMERT (R.) und STEIN (K.). - Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Annalen, t. 126, 1953, p. 263-306.
- [7] Séminaire H. CARTAN, Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, t. 4, 1951/52.
- [8] Séminaire H. CARTAN, Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, t. 6, 1953/54.
- [9] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., t. 61, 1955, p. 197-278.
- [10] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.
- [11] STEIN (Karl). - Analytische Zerlegungen komplexer Räume, Math. Annalen, t. 132, 1956, p. 63-93.