

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

La méthode de Calderón (suite)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 9, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A9_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

12 janvier 1960

LA MÉTHODE DE CALDERÓN (suite)

par Bernard MALGRANGE

Soit $P(x, t, Dx, Dt)$ un opérateur différentiel linéaire homogène d'ordre m

$$P(x, t, Dx, Dt) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{j=1}^m Q_j(x, t, Dx) \frac{\partial^{m-j}}{\partial t^{m-j}}$$

avec

$$Q_j(x, t, Dx) = \sum_{|k|=j} a_{j,k}(x, t) D_x^k \quad t \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad n \neq 2$$

les coefficients $a_{j,k}(x, t)$ étant définis au voisinage de zéro et étant $1 + s$ ($s > 0$) fois continuellement différentiables, (i. e. les dérivées premières vérifient les conditions de Holder d'ordre s).

On se propose de démontrer dans cet exposé certaines inégalités portant sur $P(x, t, Dx, Dt)$ analogues à celles obtenues dans l'exposé précédent.

$$\text{On pose } Q_j(x, t, \xi) = (-1)^j \sum_{|k|=j} a_{j,k}(x, t) \xi^k \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

On sera amené à faire les hypothèses suivantes :

1° Hypothèse (S) : Pour tout $\xi \neq 0$ et (x, t) voisin de zéro, les racines de

$$(1) \quad \tau^m + \sum_j Q_j(x, t, \xi) \tau^{m-j} = 0$$

sont distinctes ([1]).

2° L'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

Hypothèse (R) : les $a_{j,k}$ sont à valeurs réelles.

Hypothèse (E) : $P(x, t, Dx, Dt)$ est elliptique (i. e. les racines de l'équation (1) ne sont jamais réelles ([2]).

REMARQUE. - Les coefficients $a_{j,k}$ étant continus, P vérifie les hypothèses (S) ou (E) s'il les vérifie pour $(x, t) = 0$.

Diagonalisation. - On va se ramener aux inégalités de l'exposé 8 par une "diagonalisation approximative". Pour cela, on considère a priori la matrice $m \times m$.

$$h(x, t, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ & & & & 0 \\ (-1)^m \zeta_m(x, t, \xi) |\xi|^{-m} & \dots & 0 & & -1 \\ & & & & \zeta_1(x, t, \xi) |\xi|^{-1} \end{pmatrix}$$

Le lecteur vérifiera aisément que le polynôme caractéristique de la matrice h est le polynôme (1). Si l'on suppose que $P(x, t, Dx, Dt)$ vérifie l'hypothèse (S), les hypothèses faites sur les coefficients $a_{j,k}$ impliquent qu'il existe m fonctions $\lambda_j(x, t, \xi)$ homogènes de degré zéro en ξ , définies pour (x, t) voisin de $(0, 0)$, $1 + s$ fois continuellement différentiables en (x, t) à valeur dans $\hat{\Sigma}$ telles que $\lambda_j(x_0, t_0, \xi_0)$ soient les m valeurs propres de la matrice $h(x_0, t_0, \xi_0)$ (Pour $n = 2$ on ne peut rien dire car $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ n'est pas simplement connexe. On verra dans l'exposé suivant comment **sa lève** cette restriction). L'hypothèse (S) nous affirme de plus que les $\lambda_j(x_0, t_0, \xi_0)$ sont distinctes, donc la matrice $h(x, t, \xi)$ est diagonalisable.

Il existe alors une matrice $m \times m$, $n(x, t, \xi)$ homogène de degré 0 en ξ telle que

$$nhn^{-1} = \mathcal{S}$$

avec

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, t, \xi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m(x, t, \xi) \end{pmatrix}$$

il est d'ailleurs facile de calculer n

$$n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ (-\lambda_1) & \dots & (-\lambda_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (-\lambda_1)^{m-1} & \dots & (-\lambda_m)^{m-1} \end{pmatrix}$$

$n(x, t, \xi)$ est donc $1 + s$ fois continuellement différentiable en (x, t) à valeurs dans les matrices continuellement différentiables en ξ .

En remplaçant au besoin $P(x, t, Dx, Dt)$ par

$$\beta(x, t) P(x, t, Dx, Dt) + (1 - \beta(x, t)) P(0, 0, Dx, Dt),$$

où $\beta(x, t) \in \mathcal{O}_{x,t}$ de support assez petit et égal à 1 dans un voisinage V

de $(0, 0)$ (ce changement permet d'avoir un opérateur égal à P au voisinage de l'origine et défini partout. Le lecteur vérifiera aisément que les hypothèses (S), (R) ou (E) sont encore vérifiées par le nouvel opérateur) on a les propriétés suivantes :-

a. Les constructions précédentes peuvent être faites pour $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$;
 b. $h, \mathcal{S}, n$ sont les symboles d'opérateurs intégraux singuliers (matriciels). En effet, les coefficients des matrices $h, \mathcal{S}, n$ sont bien dans l'espace $\mathcal{B}_{x,t}^{1+s}(\hat{\Sigma})$ (exposé 6, paragraphe 2). Nous désignerons ces opérateurs respectivement par H, Δ, N ;

c. Si de plus, $P(x, t, Dx, Dt)$ vérifie l'hypothèse (E) ou (R) les opérateurs singuliers dont les symboles sont les parties imaginaires des λ_j sont, ou bien inversibles (i. e. leurs prolongements à H^0 sont inversibles), ou bien nuls. En effet, les hypothèses (E) ou (R) impliquent que les racines λ_j de l'équation (1) ont leurs parties imaginaires identiquement nulles ou partout différentes de zéro et dans ce dernier cas, les opérateurs λ_j sont inversibles. En effet, les opérateurs obtenus en remplaçant dans leurs symboles x, t par $(0, 0)$ sont visiblement inversibles. En choisissant $\beta(x, t)$ à support suffisamment petit, il est facile de voir qu'ils sont aussi voisins qu'on veut des précédents.

d. Pour les mêmes raisons, l'opérateur N est inversible.

Nous sommes alors en mesure de démontrer les théorèmes suivants ([3]).

THÉOREME 1. - Dans les hypothèses (S) et "(E) ou (R)", il existe des constantes $> 0 : \tau_0, k_0, C$, et un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}^n$, tels que, pour tout $\tau \in [0, \tau_0]$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$, à support dans $V \times [0, \tau]$, on ait pour $k \geq k_0$:

$$\iint e^{k(t-\tau)^2} |P\varphi|^2 dx dt \geq Ck \iint e^{k(t-\tau)^2} \left\{ \sum_{|j| \leq m-1} |D_{x,t}^j \varphi|^2 \right\} dx dt .$$

THÉOREME 2. - Dans l'hypothèse "(S) et (E)", il existe des fonctions strictement positives, définies pour $\tau \in [0, \tau_1]$, $\tau_1 > 0 : C_1(\tau), C_2(\tau), k_0(\tau)$, avec $C_1(\tau) \rightarrow +\infty$ si $\tau \rightarrow 0$, et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{x,t}$, à support dans $V \times [0, \tau]$ on ait pour $k \geq k_0(\tau)$

$$\begin{aligned} \iint e^{k(t-\tau)^2} |P\varphi|^2 dx dt &\geq \frac{C_1(\tau)}{k} \iint e^{k(t-\tau)^2} \left\{ \sum_{|j|=m} |D_{x,t}^j \varphi|^2 \right\} dx dt \\ &+ C_2(\tau) k \iint e^{k(t-\tau)^2} \left\{ \sum_{|j| \leq m-1} |D_{x,t}^j \varphi|^2 \right\} dx dt . \end{aligned}$$

Démontrons par exemple, le théorème 1. Le théorème 2 se démontre de manière tout à fait analogue en utilisant le théorème 2, 2°, exposé 8.

Soit $U = (u_1, \dots, u_n)$ les $u_j(x, t)$ étant des fonctions une fois continuellement dérivables de t à valeurs dans H_x^1 . En posant $V = NU$ on applique les théorèmes 1 et 2, 1° de l'exposé 8, à l'opérateur diagonal

$$\frac{dV}{dt} + i \Delta \wedge V$$

ce qui est possible, car les parties imaginaires des symboles ne s'annulent jamais ou sont identiquement nulles. On a donc

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\| \frac{dV}{dt} + i \Delta \wedge V \right\|^2 dt \geq k \int e^{k(t-\tau)^2} \|V\|^2 dt$$

en posant

$$\|V\|^2 = \sum \|v_j\|^2 \text{ et de même pour } \left\| \frac{dV}{dt} + i \Delta \wedge V \right\|^2.$$

Mais on a :

$$N \left(\frac{dU}{dt} + iH \wedge U \right) = \left(\frac{dV}{dt} + i \Delta \wedge V \right) - i(\Delta \wedge N - NH \wedge) U - \frac{dN}{dt} \cdot U.$$

De plus, on a (exposé 7, théorème 3)

$$NH \wedge - \Delta N \wedge = \begin{cases} \text{Opérateur continu dépendant continuellement} \\ \text{de } t \text{ de } L_x^2 \rightarrow L_x^2. \end{cases}$$

On a de même (exposé 7, théorème 3)

$$\Delta \wedge N - \Delta NH \wedge = \begin{cases} \text{Opérateur continu dépendant continuellement} \\ \text{de } t \text{ de } L_x^2 \rightarrow L_x^2. \end{cases}$$

Comme N est inversible, il existe alors une constante C' telle que

$$\|(\Delta \wedge N - \Delta NH \wedge) U\|^2 \leq C' \|NU\|^2.$$

On a donc

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \left\| N \left(\frac{dU}{dt} + iH \wedge U \right) \right\|^2 dt \geq k \left(C - \frac{C'}{k} \right) \int e^{k(t-\tau)^2} \|NU\|^2 dt.$$

En augmentant au besoin la constante k_0 et en modifiant C , on a bien

$$(2) \quad \int e^{k(t-\tau)^2} \left\| \frac{dU}{dt} + iH \wedge U \right\|^2 dt \geq kC \int e^{k(t-\tau)^2} \|U\|^2 dt.$$

On prend alors ψ à support compact $\subset V \times [0, \tau]$ et on pose

$$u_j = (i\Lambda)^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \psi.$$

Alors le premier membre de l'inégalité (2) devient

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \|P\psi\|^2,$$

et le deuxième membre

$$\int e^{k(t-\tau)^2} \sum_j \|\Lambda^{m-j} \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} \psi\|^2 dt.$$

Ce résultat joint à l'inégalité (immédiate par transformée de Fourier)

$$\|\Lambda^{m-j} \psi\|^2 \geq c \sum_{|K|=m-j} \|D_x^K \psi\|^2$$

et à l'inégalité de Trèves à une variable (exposé 8, paragraphe 1) démontre le théorème 1.

REMARQUE. - Le théorème 1 est une variante que l'on trouvera dans [3] d'un théorème de CALDERÓN [1].

Le théorème 2 dans le cas particulier où P est d'ordre 2 (et où $e^{k(t-\tau)^2}$ est remplacé par $(t + \frac{1}{k})^k$) est dû à MIZOHATA [4]. Il a été démontré dans le cas général par une autre méthode par HÖRMANDER [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERÓN (A. P.). - Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.
- [2] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.
- [3] MALGRANGE (Bernard). - Unicité du problème de Cauchy, d'après A. P. Calderón, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 178.
- [4] MIZOHATA (Sigeru). - Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre, Proc. Japan Acad., t. 34, 1958, p. 687-692.
