

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Division des distributions. III : le théorème principal

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 23-24, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A23_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
III : LE THÉOREME PRINCIPAL

par Bernard MALGRANGE

Introduction.

Soit Ω un ouvert contenu dans $\mathbb{R}^n$; désignons par $\mathcal{O}_\Omega$ l'anneau des fonctions analytiques réelles dans Ω , et par $\mathcal{O}_a$ l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles en $a \in \Omega$; pour $f \in \mathcal{O}_\Omega$, nous noterons $f_a \in \mathcal{O}_a$ le germe de f au point a (quelquefois, nous omettons l'indice a si aucune confusion n'est possible).

Soient $f_{ij} \in \mathcal{O}_\Omega$ ($1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$) ; posons $F_i = (f_{i1} , \dots , f_{iq})$. Rappelons qu'une "relation (analytique) entre les F_i au point a " est un système $\Gamma = (\gamma_1 , \dots , \gamma_p)$ de germes appartenant à $\mathcal{O}_a$ tels qu'on ait : $\sum_i \gamma_i F_{ia} = 0$ ⁽¹⁾.

Puisque $\mathcal{O}_a$ est noethérien, le $\mathcal{O}_a$ -module $\mathcal{M}_a$ des relations entre les F_i en a possède un système fini de générateurs $\Gamma^1 , \dots , \Gamma^m$; soient $G^1 , \dots , G^m$ [$G^\ell = (g_1^\ell , \dots , g_p^\ell)$, $1 \leq \ell \leq m$] un système de fonctions analytiques au voisinage de a , tels qu'on ait : $G_a^\ell = \Gamma^\ell$. Rappelons le résultat suivant, que nous utiliserons (proposition 2) :

THÉOREME d'Oka (voir [1] ou [4]). - Pour tout $b \in \Omega$ assez voisin de a , les G_b^ℓ $\mathcal{O}_b$ -engendrent $\mathcal{M}_b$.

Cela rappelé, voici le théorème que nous allons démontrer :

THÉOREME 1 ("Division des distributions"). - Soient $T_1 , \dots , T_p$ des distributions appartenant à $\mathcal{O}'_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}'_\Omega$) ; pour qu'il existe $S_1 , \dots , S_q \in \mathcal{O}'_\Omega$ (resp. $\mathcal{E}'_\Omega$) vérifiant, $\forall i : \sum_j f_{ij} S_j = T_i$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(C ; f_{ij}) $\forall a \in \Omega$, pour toute relation $(g_1 , \dots , g_p)$ entre les F_i au voisinage de a , on a $\sum_i g_i T_i = 0$ au voisinage de a .

(1) Si les γ_i sont des fonctions analytiques dans un voisinage de a (resp. dans Ω) , on parlera de même de "relations au voisinage de a " (resp. "relations dans Ω ") .

REMARQUES.

1° Les énoncés relatifs à $\mathcal{E}'_\Omega$ et $\mathcal{Q}'_\Omega$ se ramènent immédiatement l'un à l'autre (partition de l'unité).

2° Les "théorèmes A et B" de la théorie des faisceaux analytiques cohérents montrent qu'il suffirait, à la place de (C), de la condition suivante, en apparence plus faible :

"Si $(g_1, \dots, g_p)$ est une relation entre $F_1, \dots, F_p$ dans Ω , on a
$$\sum g_i T_i = 0$$
".

Nous n'aurons pas à nous servir de ce fait.

1. Remarques sur la condition (C).

A. Munissons $\mathcal{Q}_\Omega$ de la topologie de limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans les voisinages ouverts complexes de Ω (ces derniers espaces étant, comme d'habitude, munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact), et désignons par $\mathcal{Q}'_\Omega$ le dual faible de $\mathcal{Q}_\Omega$. Evidemment, on a $\mathcal{E}'_\Omega \subset \mathcal{Q}'_\Omega$, et le théorème de Hahn-Banach entraîne immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Les systèmes $(\sum_j f_{ij} S_j)$, $S_j \in \mathcal{E}'_\Omega$ sont $[\mathcal{Q}'_\Omega]^p$ -denses dans les $(T_1, \dots, T_p) \in [\mathcal{E}'_\Omega]^p$ qui vérifient $(C; f_{ij})$.

Nous aurons besoin d'une forme renforcée de cette proposition : donnons-nous, outre les F_i , des fonctions $h_\ell \in \mathcal{Q}_\Omega$ ($1 \leq \ell \leq m$), et envisageons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_j f_{ij} S_j = T_i, & \forall i \\ h_\ell S_j = 0, & \forall (j, \ell) \end{cases}.$$

Nous dirons que $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie la condition $(C'; f_{ij}; h_\ell)$ si le système formé de $T_1, \dots, T_p$ et qm fois 0 vérifie $(C; \text{nouveau système})$. Nous avons alors :

PROPOSITION 1 bis. - Les systèmes $(\sum_j f_{ij} S_j)$ avec $S_j \in \mathcal{E}'_\Omega$ et $h_\ell S_j = 0$ ($1 \leq j \leq q$, $1 \leq \ell \leq m$) sont $[\mathcal{Q}'_\Omega]^p$ -denses dans les systèmes $(T_1, \dots, T_p) \in [\mathcal{E}'_\Omega]^p$ qui vérifient $(C'; f_{ij}; h_\ell)$.

Pour ne pas alourdir les notations, nous supposons $m = 1$, et écrivons h pour h_1 . Raisonnons par dualité : Soit $(g_1, \dots, g_p)$ un système de fonctions $\in \mathcal{A}_\Omega$ telles que, $\forall (S_1, \dots, S_q) \in [\mathcal{E}_\Omega]^q$ vérifiant, $\forall (j, \ell)$, $h_\ell S_j = 0$, on ait : $\sum_{i,j} f_{ij} g_i S_j = 0$; tout revient à démontrer que l'on a $\sum g_i T_i = 0$

lorsque $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie $(C' ; f_{ij} ; h_\ell)$. Il suffit d'établir ce résultat au voisinage de tout point $a \in \Omega$; et, pour cela, d'établir qu'il existe $(\varphi_1, \dots, \varphi_q) \in \mathcal{A}_a$ tels que $(g_1, \dots, g_p, \varphi_1, \dots, \varphi_q)$ soit une relation en a entre $F_1, \dots, F_p, (h, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h)$; autrement dit que $\sum g_i F_i$ est dans le sous- $\mathcal{A}_a$ -module de $[\mathcal{A}_a]^q$ engendré par $(h, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h)$.

D'après un théorème classique de KRULL (voir par exemple [6]), il suffit, $\forall r \in \mathbb{N}$, d'établir la propriété précédente modulo les fonctions nulles ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq r$ en a , autrement dit dans l'espace des développements limités à l'ordre r en a . Or ce dernier espace est de dimension finie, et son dual est l'espace des distributions d'ordre $\leq r$ de support a : notre assertion résulte donc immédiatement, par dualité, de l'hypothèse (appliquée à des S_j , distributions d'ordre $\leq r$ de support a).

B. Reprenons les hypothèses du théorème 1 ; soit W un fermé $\subset \Omega$ et supposons que $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie la condition $(C ; f_{ij})$ dans $\Omega - W$; supposons en outre qu'il existe $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{A}_\Omega$ tels que, $\forall (i, \ell)$, on ait $h_\ell T_i = 0$.

PROPOSITION 2. - Ω_1 étant un ouvert relativement compact dans Ω , il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, dans $\Omega_1 - W$, $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie $(C' ; f_{ij} ; h_\ell^r)$. (Notons qu'en général, on ne peut pas prendre $r = 1$).

En raisonnant par récurrence sur m , on se ramène immédiatement à $m = 1$, et on écrit encore h pour h_1 . Par Borel-Lebesgue, il suffit, $\forall a \in \overline{\Omega}_1$, de démontrer le résultat dans un voisinage ouvert de a ; pour cela, établissons le lemme suivant :

LEMME 1. - Il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que les relations en a entre $F_1, \dots, F_p, (h^r, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, h^r)$ soient engendrées par

1° Les relations où les q derniers coefficients sont nuls (i. e. les relations entre $F_1, \dots, F_p$).

2° Les relations où les p premiers coefficients sont divisibles par h .

Le lemme 1 entraîne bien la proposition 2 puisque, d'après le théorème d'Oka il sera encore vrai avec le même r en tout point b d'un voisinage ouvert Ω_a de a ; et, pour un tel r , la proposition 2 est alors évidemment vraie dans $\Omega_a - W$.

Pour démontrer le lemme, introduisons, $\forall s \in \mathbb{N}$ le sous $\mathcal{O}_a$ -module $\mathcal{M}_s$ de $[\mathcal{O}_a]^q$ formé des $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ tels que $(\varphi_1 h_a^s, \dots, \varphi_q h_a^s)$ soit dans le $\mathcal{O}_a$ -module engendré par $F_1, \dots, F_p$; on a évidemment $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_{s+1}$; comme $\mathcal{O}_a$ est noethérien, la suite des $\mathcal{M}_s$ est stationnaire, d'où l'existence d'un entier r tel qu'on ait $\mathcal{M}_{r-1} = \mathcal{M}_r$: et r répond à la question, comme on le vérifie aussitôt.

2. Distributions portées par une sous-variété.

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$ ($0 \leq k \leq n$), et X_{k+l} des fonctions continues dans U ($1 \leq l \leq n-k$); considérons la sous-variété localement fermée V de $\mathbb{R}^n$ définie par les équations:

$$x_{k+l} = X_{k+l}(x_1, \dots, x_k) \quad .$$

Nous utiliserons les notations suivantes $x = (x_1, \dots, x_n)$,
 pr $x = x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, $X = (X_{k+1}, \dots, X_n)$,
 $\tilde{U} = U \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Supposons les X_{k+l} bornées et appartenant $\mathcal{O}_U$ (cf. exposé 21), et soit T une distribution d'ordre fini dans $\tilde{U}$, de support contenu dans V ; on sait que T se décompose en une somme finie de dérivées par rapport à x'' d'extensions à $\tilde{U}$ de distributions appartenant à $\mathcal{O}_V^!$ [5]; plus précisément (en prenant $x_1, \dots, x_k$ comme coordonnées sur V): il existe des distributions $\Theta_s \in \mathcal{O}_U^!$ ($s \in \mathbb{N}^{n-k}$), nulles sauf un nombre fini, telles que, si l'on définit $\tilde{\Theta}_s \in \mathcal{O}_U^!$ par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}_{\tilde{U}}, \quad \langle \tilde{\Theta}_s, \varphi \rangle = \langle \Theta_s, \varphi(x'), X(x'') \rangle$$

on ait

$$(1) \quad T = \sum_s D_{x''}^s \tilde{\Theta}_s \quad .$$

On vérifie facilement que les Θ_s sont uniques, et sont donnés par

$$(2) \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_U, \quad \langle \Theta_s, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{s!} [X(x') - x'']^s \varphi(x') \rangle$$

Si maintenant f est une fonction appartenant à $\mathcal{E}_U$, la décomposition de fT résulte immédiatement des formules suivantes :

$$(3) \quad f \tilde{\Theta}_s = \overbrace{f(x', X(x'))} \Theta_s \quad (\text{évident})$$

$$(4) \quad f(D_{x''}^r \tilde{\Theta}_s) = \sum_{\ell} (-1)^{|\ell|} \binom{r}{\ell} D_{x''}^{r-\ell} [(D_{x''}^{\ell} f) \cdot \tilde{\Theta}_s] \quad (r, \ell \in \mathbb{N}^{n-k}) .$$

(Conséquence facile de la formule de Leibniz, voir dans [3] le détail des calculs).

Supposons en outre $T \in \mathcal{O}'_U$ (cf. exposé 21) ; comme V est borné, T est nécessairement d'ordre fini, et le résultat précédent s'applique. De plus, des formules (1) et (2), on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 3. - " $T \in \mathcal{O}'_U$ " $\iff$ " $\forall s, \Theta_s \in \mathcal{O}'_U$ ".

(Pour démontrer cette proposition, on utilise le critère d'appartenance à $\mathcal{O}'_U$, exposé 21, page 4. Nous laissons les détails au lecteur).

REMARQUE importante. - Si l'on suppose en outre les X_{k+l} quasi-hölderiennes, tout $T \in \mathcal{O}'_U$, à support dans V , admet un prolongement $\bar{T} \in \mathcal{O}'_{\mathbb{R}^n}$ à support dans $\bar{V}$. En effet, on sait que T admet un prolongement à support dans $\bar{V} \cup b\tilde{U}$; la dernière hypothèse impliquant que $\bar{V}$ est régulièrement séparé de $b\tilde{U}$, il suffit d'appliquer le théorème 2, exposé 21.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous allons établir un résultat un peu plus fort (en apparence ; il résulterait facilement du théorème 1 et de la proposition 2) :

THÉORÈME 1 bis. - Conservons les notations du théorème 1 ; soient V et W deux sous-ensembles analytiques de Ω , et supposons ceci :

1° $(T_1, \dots, T_p) \in [\mathcal{O}'_{\Omega}]^p$ à son support dans V .

2° $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie $(C ; f_{ij})$ dans $\Omega - W$.

Alors, il existe $(S_1, \dots, S_q) \in [\mathcal{O}'_{\Omega}]^q$, à support dans V , tel que, dans $\Omega - W$, on ait $\sum_j f_{ij} S_j = T_i$.

Il suffit de démontrer ce théorème au voisinage de tout point de Ω ; nous nous placerons donc dans la suite dans un voisinage ouvert de 0 , que nous noterons encore Ω et que nous restreindrons (explicitement ou non) chaque fois que cela sera nécessaire.

Soit V_0 le germe de V en 0 , et posons $\dim V_0 = k$. Si $k = -1$, i. e. si $V_0 = \emptyset$, le théorème est trivial ; nous allons donc le démontrer par récurrence, en le supposant acquis pour $0, \dots, k-1$.

On peut évidemment, en remplaçant au besoin W par $V \cap W$, supposer qu'on a $W \subset V$; montrons qu'on peut aussi supposer $\dim W_0 < k$: soit en effet V'_0 la réunion des composantes irréductibles de V_0 qui sont contenues dans W_0 , et V''_0 la réunion des autres composantes irréductibles de V_0 ; et soit V' (resp. V'') un représentant de V'_0 (resp. V''_0) dans Ω ; on peut écrire :

$$(T_1, \dots, T_p) = (T'_1, \dots, T'_p) + (T''_1, \dots, T''_p),$$

les T' (resp. les T'') ayant leur support dans V' (resp. V'') [exposé 21, théorème 2, et exposé 22, corollaire 2]. Il suffit de remplacer V par V'' , W par $W \cap V''$, et les T par les T'' pour se ramener à la situation cherchée.

Ceci posé, nous allons établir le résultat suivant :

(R) Il existe un ensemble analytique $U \subset V$, avec $W \subset U$, $\dim U_0 < k$ et $(S_1, \dots, S_q) \in [\mathcal{O}'_\Omega]^q$ tel que, dans $\Omega - U$, on ait : $\sum_j f_{ij} S_j = T_i$. Alors, nous serons ramenés au théorème 1 bis pour U , lequel est vrai par hypothèse de récurrence, et le théorème sera démontré.

Pour établir (R), nous pouvons supposer V_0 irréductible, par un raisonnement de décomposition des T analogue à celui qui vient d'être fait ; reprenons alors, après avoir fait éventuellement un changement linéaire de coordonnées, les notations de l'exposé 22, paragraphe 2 (sauf que E est noté ici V_0 et $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_0$). Soit Ω' un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$; si Ω' est assez petit, il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{n-k}$, soit Ω'' tel qu'on ait $\Omega' \times \Omega'' \subset \Omega$ et que l'ensemble des $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, solution de

$$P(x_{k+1} ; x_1, \dots, x_k) = 0 ;$$

$$R_{k+\ell}(x_{k+\ell} ; x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \text{avec} \quad (x_1, \dots, x_k) \in \Omega'$$

soit contenu dans Ω'' et y soit relativement compact ; dans la suite, nous restreindrons Ω en le prenant égal à $\Omega' \times \Omega''$.

Soit D' l'ensemble des zéros de Δ (= discriminant de P) dans Ω' , et soit Ω'_α ($1 \leq \alpha \leq \deg P$) l'ensemble (ouvert et fermé dans $\Omega' - D'$) des $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega' - D'$ tels que l'équation

$$P(z; x_1, \dots, x_k) = 0$$

ait $\geq \alpha$ racines réelles (qui seront nécessairement distinctes) ; posons, comme au paragraphe 2, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$:

$$x' = \text{pr} x = (x_1, \dots, x_k), \quad x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n);$$

posons encore

$$D = \text{pr}^{-1}(D') \cap V, \quad \Omega_\alpha = \Omega'_\alpha \times \Omega''.$$

Soit X_{k+1}^α la fonction qui, à $x' \in \Omega'_\alpha$, fait correspondre la α -ième racine de $P(z; x')$ (on les range, par exemple, par ordre croissant), et posons

$$X_{k+l}^\alpha(x') = \frac{Q_{k+l}(X_{k+1}^\ell(x'); x')}{P'(X_{k+1}^\alpha(x'); x')} \quad (2 \leq l \leq n-k).$$

Soit V_α l'ensemble des $x \in \Omega$ vérifiant $x' \in \Omega'_\alpha$ et $x_{k+l} = X_{k+l}^\alpha(x')$ pour $1 \leq l \leq n-k$ [en abrégé : $x'' = X^\alpha(x')$].

LEMME 2. - Les V_α sont régulièrement séparés les uns des autres par D au voisinage de 0 ⁽²⁾.

Prenons en effet $x \in V_\alpha$, $y \in V_\beta$, avec $\beta < \alpha$; supposons que le segment $[x', y']$ est contenu dans Ω_β (on se ramène facilement à ce cas) ; il existe alors $C > 0$, $0 < \rho < 1$, tels qu'on ait :

$$|X_{k+1}^\beta(x') - X_{k+1}^\beta(y')| \leq C d(x', y')^\rho \quad (\text{exposé 22, paragraphe 1})$$

De là, et de

$$2 d(x, y) \geq d(x', y') + |X_{k+1}^\alpha(x') - X_{k+1}^\beta(y')|,$$

on déduit

⁽²⁾ En un sens évident, qu'on laisse au lecteur le soin de préciser.

$$d(x, y)^{\rho} \geq C' |x_{k+1}^{\alpha}(x') - x_{k+1}^{\beta}(x')| \quad (C' > 0)$$

En appliquant l'inégalité de Łojasiewicz à Δ , on trouve que le second membre de notre inégalité est $\geq C'' d(x', D')^{\rho'}$ ($C'' > 0$, $\rho' > 0$) ; comme les x_{k+l}^{α} sont quasi-höldériens, le lemme s'ensuit.

On peut supposer que, dans $\Omega - D$, on a $V = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$; en décomposant les T en une somme de distributions à support dans les divers $V_{\alpha} \cup D$ (ce qui est possible d'après le lemme précédent, en restreignant au besoin Ω), on voit qu'on peut les supposer tous à support dans $V_{\alpha} \cup D$, pour un α fixé, à condition de remplacer W par $W_1 = W \cup D$, ce qui est permis puisque $\dim D_0 < k$. En outre, on peut supposer les T d'ordre fini, et même appartenant à $\mathcal{O}'_{\Omega}$; si, pour simplifier, nous posons $P = R_{k+1}$, il existe alors un entier $\rho \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait, pour $1 \leq \ell \leq n - k$, et $1 \leq i \leq p$: $R_{k+\ell}^{\rho} T_i = 0$ ⁽³⁾ ; d'après la proposition 2, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que (en restreignant au besoin Ω), $(T_1, \dots, T_p)$ vérifie $(C' ; f_{ij} ; R_{k+\ell}^r)$ dans $\Omega - W_1$.

Pour démontrer (R), il nous suffira d'établir le résultat suivant :

(R') Il existe un sous-ensemble analytique U de Ω , avec $W_1 \subset U \subset V$, $\dim U_0 < k$, et $S_1, \dots, S_q \in \mathcal{O}'_{\Omega} - U$ tels qu'on ait, dans $\Omega - U$

$$\begin{cases} \sum f_{ij} S_j = T_i & (1 \leq i \leq p) \\ R_{k+\ell}^r S_j = 0 & (1 \leq j \leq q ; 1 \leq \ell \leq n - k) \end{cases} .$$

En raisonnant comme dans l'exposé 22, on peut supposer (en l'agrandissant au besoin) que W_1 (resp. U) est l'intersection de V avec l'ensemble des zéros d'une fonction φ (resp. ψ) $\in \mathcal{O}_{\Omega}$, non identiquement nulle ; soit alors $Y' \subset \Omega'$ (resp. $U' \subset \Omega'$) la réunion de $\text{pr}(W_1)$ et des zéros des discriminants des $R_{k+\ell}$ (resp. $U' = \text{pr } U = \{x' ; \psi(x') = 0\}$) et soit $Y = V \cap \text{pr}^{-1}(Y')$. Puisque Ω'_{α} est ouvert et fermé dans $\Omega' - D'$, (et d'après la remarque du paragraphe 2) il revient au même de travailler dans $\Omega - Y$ ou dans $\Omega_{\alpha} - Y$ ou même dans $\Omega_{\alpha} - \text{pr}^{-1}(Y')$; dans ce dernier ensemble, on a, d'une manière unique, (avec les notations du paragraphe 2)

$$T_i = \sum_{x''} D_{x''}^S \tilde{\Theta}_{s,i}, \quad \text{avec } \Theta_{s,i} \in \mathcal{O}'_{\Omega'_{\alpha} - Y'} .$$

⁽³⁾ En effet, il existe $\rho_1 \in \mathbb{N}$ tel que $R_{k+\ell}^{\rho_1} T_i = 0$ en dehors de D , puisque $V - D$ est une variété [6] ; on recommence alors sur la "partie régulière" de D et ainsi de suite.

On cherche de même les S_j (qu'on peut supposer à support dans V_α) sous la forme :

$$\sum D_{x''}^s \sum_{s,j} \tilde{}, \quad \text{avec } \sum_{s,j} \in \mathcal{P}_{\Omega'_\alpha - U}^1.$$

Comme les T (resp. les S) sont annulés par les R_{k+l}^r , on voit facilement que les $\Theta_{s,i}$ sont nuls (resp. que les $\sum_{s,j}$ doivent être nuls) dès que $s = (s_{k+1}, \dots, s_n)$ vérifie $\|s\| = \max |s_i| \geq r$.

En utilisant les formules (3) et (4), on ramène alors (R') au problème suivant :

(R) Trouver U' , ensemble analytique dans Ω' , avec $Y' \subset U'$, $\dim U'_0 \leq k$ et des $\sum_\mu \in \mathcal{P}_{\Omega'_\alpha - U}^1$ tels qu'on ait, dans $\Omega'_\alpha - U'$

$$\sum \varphi_{\lambda\mu} \sum_\mu = \Theta_\lambda$$

où $\varphi_{\lambda\mu}(x') = \Phi_{\lambda\mu}(x', X^\alpha(x'))$, les $\Phi_{\lambda\mu}(x)$ étant les f_{ij} , les R_{k+l}^r et un nombre fini de leurs dérivées en x'' (convenablement réindexés), les Θ_λ (resp. $\sum_\mu$) étant les $\Theta_{s,i}$ (resp. $\sum_{s,j}$) avec $\|s\| \leq r$, également réindexés.

Les $\Phi_{\lambda\mu}$ ne sont pas toutes identiquement nulles sur V (donc les $\varphi_{\lambda\mu}$ sur Ω'_α) : sinon, la proposition 1 bis montrerait que tous les $(T_1, \dots, T_p) \in \mathcal{P}_{\Omega - Y}^1$ vérifiant $(C^1; f_{ij}; R_{k+l}^r)$ dans $\Omega - Y$ sont nuls, cas trivial que nous excluons ⁽⁴⁾.

Soit alors $\delta(x)$ un déterminant d'ordre le plus grand possible non $\equiv 0$ sur V extrait de la matrice $(\Phi_{\lambda\mu})$, et soit $\delta'(x') \in \mathcal{Q}_\Omega$, tel qu'on ait

$V \cap \{x; \delta(x) = 0\} \subset V \cap \{x; \delta'(x') = 0\}$ (cf. exposé 22, paragraphe 2, 5°); prenons $U' = \{x'; \delta'(x') = 0\} \cup Y'$ [et, évidemment, $U = V \cap \text{pr}^{-1}(U')]$; montrons que U' répond à la question.

En restreignant au besoin Ω , on a : $\forall \lambda, \mu : \Phi_{\lambda\mu} \in \mathcal{Q}_\Omega$, d'où résulte facilement qu'on a : $\varphi_{\lambda\mu} \in \mathcal{Q}_{\Omega'_\alpha - Y'}$, et, a fortiori $\in \mathcal{Q}_{\Omega'_\alpha - U'}$ de là, et de l'inégalité de Łojasiewicz, on déduit facilement :

$$\frac{1}{\delta(x', X^\alpha(x'))} \in \mathcal{Q}_{\Omega'_\alpha - U'};$$

⁽⁴⁾ Si nous avions opéré directement avec les T , sans les décomposer, l'assertion analogue relative aux f_{ij} aurait pu être fautive (tout le problème de la division est là!); d'autre part, si nous n'avions pas rajouté les conditions $R_{k+l}^r S_i = 0$, nous aurions eu un système d'une infinité d'équations et d'inconnues, beaucoup moins maniable.

en appliquant alors les résultats de l'appendice (avec $A = \mathcal{O}_{\Omega-U}$, $M = \mathcal{P}_{\Omega-U}$), et en remarquant que tout ce qui précède ne dépend pas du système (T_i) choisi [pourvu que les T_i soient dans $\mathcal{P}_{\Omega}$, à support dans V_{α} , et vérifiant

$(C' ; f_{ij} ; R_{k+l}^r)$ dans $\Omega - U$, conditions que nous noterons $(C'')]$:

Il existe des $\psi_{\lambda\nu}(x')$, polynômes par rapport aux $\varphi_{\lambda\mu}$ tels que (P) ait une solution si et seulement si, dans $\Omega' - U'$, on a, $\forall \nu$

$$(\Gamma) \quad \sum \psi_{\lambda\nu} \Theta_{\lambda} = 0 \quad .$$

Pour achever la démonstration, il suffit d'établir que (Γ) est toujours vérifié lorsque (T_i) vérifie (C'') ; par une partition de l'unité, on peut se ramener au cas où les T_i sont à support compact dans $V_{\alpha} - U$; en appliquant alors la proposition 1 bis à $\Omega - U$, on trouve que les $(T_i) \in [\mathcal{E}_{V_{\alpha}-U}]^P$ vérifiant (Γ) sont $[\mathcal{O}'_{\Omega-U}]^P$ -denses dans ceux qui vérifient (C'') ; compte tenu de la formule 2, notre assertion résulte de là par passage à la limite, et le théorème est démontré.

APPENDICE.

Équations linéaires sur un anneau.

Soient A un anneau commutatif avec élément unité, et M un A -module unitaire ; soit $(a_{\lambda\mu})$ ($1 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $1 \leq \mu \leq \mu_0$) une matrice à coefficients dans A , et r son rang, i. e. l'ordre maximum d'un déterminant non nul, extrait de $(a_{\lambda\mu})$. Soit δ un tel déterminant, que nous supposons, pour fixer les idées, égal à

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} ,$$

et posons $a_{\lambda} = (a_{\lambda 1}, \dots, a_{\lambda \mu_0})$. D'après la théorie classique des équations linéaires, il existe des $b_{\lambda\mu}$, polynômes par rapport aux a ($1 \leq \lambda \leq r$, $r+1 \leq \mu \leq \lambda_0$) tels qu'on ait

$$\delta a_{\mu} = \sum_{\lambda=1}^r b_{\lambda\mu} a_{\lambda} \quad .$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante : δ est un élément inversible de A . On obtient alors facilement ceci :

Étant donnés $m_1, \dots, m_{\lambda_0} \in M$, il existe $n_1, \dots, n_{\mu_0} \in M$ vérifiant
 $\sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} n_{\mu} = m_{\lambda}$ si et seulement si l'on a, pour $r+1 \leq \mu \leq \lambda_0$: $\delta m_{\mu} = \sum_{\lambda} b_{\lambda\mu} m_{\lambda}$.

N. B. - Dans le cas où $p = 1$, $q = 1$ (ou, ce qui revient au même, quand la condition $(C; f_{ij})$ est vide), HÖRMANDER [2] et ŁOJASIEWICZ [3] ont montré que le théorème 1 est conséquence de l'inégalité de Łojasiewicz. La méthode suivie ici est une variante de [3] (la méthode suivie dans [2] est assez différente, puisqu'on travaille sur $\mathcal{E}$ et qu'on obtient par dualité les résultats relatifs à $\mathcal{O}'$; je ne sais pas si cette méthode peut se généraliser au cas traité ici).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARTAN (Henri). - Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 28-64.
- [2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv für Math., t. 3, 1958, p. 555-568.
- [3] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.
- [4] OKA (Kiyoshi). - Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Bull. Soc. math. France, t. 78, 1950, p. 1-27.
- [5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, t. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1950 et 1951 (Act. scient. et ind., 1091 et 1122; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).
- [6] ZARISKI (Oscar) and SAMUEL (Pierre). - Commutative algebra. - Princeton, Van Nostrand, 1958 (The University Series in higher Mathematics).