Bernard Malgrange

Division des distributions. II : l'inégalité de Łojasiewicz

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 22, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A22_0>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
II : L'INÉGALITÉ DE ŁOJASIEWICZ

par Bernard MALGRANGE

INTRODUCTION. - Le but de cet exposé est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, f une fonction analytique réelle dans Ω , et V (supposé $\neq \emptyset$) l'ensemble des zéros de f . Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ tels que $\forall\ x \in K$, on ait

$$|f(x)| \geqslant C\ d(x\ ,\ V)^{\rho} \quad .$$

Si $V = \emptyset$, nous laissons une fois pour toutes au lecteur le soin de faire les modifications qui s'imposent !). Avec les notations de l'exposé précédent, ce théorème est équivalent au

COROLLAIRE 1. - Soit Ω_1 un ouvert relativement compact dans Ω ; on a : $f \in \mathcal{O}^*_{\Omega_1 - V}$.

Dans cet exposé et les suivants, les fonctions analytiques réelles seront supposées à valeurs réelles pour des raisons de commodité. Rappelons d'autre part qu'un sous-ensemble V d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dit "sous-ensemble analytique" si, au voisinage de chaque point de Ω , V est formé des zéros communs à un ensemble de fonctions analytiques (ensemble que l'on peut supposer fini, puisque l'anneau des germes de fonctions analytiques en un point est noethérien, et même réduit à une seule fonction, par exemple la somme de leurs carrés). Un tel V est nécessairement fermé dans Ω . Cela rappelé, nous pouvons énoncer le

COROLLAIRE 2. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, V et W deux sous-ensembles analytiques de Ω . Si K est un compact $\subset \Omega$, on a : " $V \cap K$, $W \cap K$ r. s. $V \cap W$ ".

Par BOREL-LEBESGUE, il suffit de démontrer le résultat au voisinage de tout point $a \in \Omega$; soit f (resp. g) analytique tel que V (resp. W) soit défini au voisinage de a par l'équation $f(x) = 0$ (resp. $g(x) = 0$) ; $V \cap W$ est alors défini par $f^2(x) + g^2(x) = 0$. On a donc, $\forall\ x$ voisin de a :

$$f^2(x) + g^2(x) \geqslant C\ d(x\ ,\ V \cap W)^{\rho} \qquad (\ C > 0\ ,\ \ \rho > 0\ ) \quad .$$

Pour $x \in V$, on a donc

$$g^2(x) \geqslant C\ d(x\ ,\ V \cap W)^{\rho} \quad ;$$

d'autre part, (formule des accroissements finis), $|g(x)| \leqslant C' \, d(x , W)$. D'où le résultat.

REMARQUE. - Si K est "suffisamment bon" (par exemple une boule, un cube ...) on voit facilement qu'on a même " $V \cap K$, $W \cap K$ r. s. $V \cap W \cap K$ " .

1. Préliminaires.

DÉFINITION 1. - Ω étant un ouvert $\subset R^n$, et α un nombre $0 < \alpha \leqslant 1$, une fonction f dans Ω est dite "quasi-holdérienne d'ordre α " (ou, si $\alpha = 1$, quasi-lipchitzienne) s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout segment fermé $[x' , x''] \subset \Omega$, on ait :

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant C \, d(x' , x'')^{\alpha}$$

(cette définition est plus faible que la définition classique des fonctions holdériennes où l'on exige que l'inégalité ait lieu pour tout couple $(x' , x'') \in \Omega \times \Omega$) .

REMARQUE utile. - Soit Ω un ouvert $\subset \underset{\sim}{R}^k$, $k < n$ et soient $(f_{k+1} , \dots , f_n)$ des fonctions quasi-holdériennes d'ordre α dans Ω . Posons,

$$\forall \; x = (x_1 , \dots , x_n) \in \underset{\sim}{R}^n : \mathrm{pr}\, x = (x_1 , \dots , x_k) \in \underset{\sim}{R}^k .$$

Considérons l'ensemble $V \subset \underset{\sim}{R}^n$ défini par $x_{k+i} = f_{k+i}(x_1 , \dots , x_k)$, $i = 1 , \dots , n - k$, $(x_1 , \dots , x_k) \in \Omega$. V est évidemment localement fermé, et l'on a, pour un $C > 0$ convenable :

$$\forall \; x \in V , \; d(x , bV) \leqslant C \, d(\mathrm{pr}\, x , b\Omega)^{\alpha} .$$

Voici un autre résultat, presque aussi trivial, et non moins utile :

PROPOSITION 1. - Ω étant un ouvert $\subset \underset{\sim}{R}^n$, soient $a_1 , \dots , a_p$ des fonctions bornées et quasi-lipchitziennes dans Ω . Soit f une fonction continue dans Ω (les a_i et f sont à valeurs réelles ou complexes), vérifiant

$$f^p + \sum a_i \, f^{p-i} = 0 .$$

Alors f est quasi-holdérienne (d'ordre $\frac{1}{p}$).

(Si les a_i étaient supposées bornées et quasi-holdériennes d'ordre α , f serait quasi-holdérienne d'ordre $\frac{\alpha}{p}$).

DÉMONSTRATION. - Faisons d'abord deux remarques :

1° Les racines Z_j ($1 \leqslant j \leqslant p$) du polynôme unitaire $Z^p + \sum C_i \, Z^{p-i}$ vérifient toutes $|Z_j| \leqslant 2 \max |C_i|^{1/i}$. (On se ramène immédiatement au cas où les $|C_i|$ sont

$\leqslant 1$; alors, si Z est un des Z_j :

$$|Z|^p \leqslant 1 + |Z| + \ldots + |Z|^{p-1}$$

d'où, si $|Z| \geqslant 1$:

$$|Z|^{p+1} - |Z|^p \leqslant |Z|^p \quad \text{et} \quad |Z| \leqslant 2 \quad) .$$

2° Soient $Z^p + \sum C_i Z^{p-i}$ et $Z^p + \sum C_i' Z^{p-i}$ deux polynômes unitaires vérifiant $|C_i| \leqslant K$, $|C_i' - C_i| \leqslant \delta$ avec $K \geqslant 1$; et soient $\{Z_j\}$ et $\{Z_k'\}$ les racines de ces polynômes. Pour chaque j , il existe un k tel que $|Z_j - Z_k'| \leqslant 2K\delta^{1/p}$ (d'après la remarque précédente, on a $\forall\ j$, $|Z_j| \leqslant 2K$. Par suite :

$$|\prod_k (Z_j - Z_k')| = |Z_j^p + \sum C_j' Z_j^{p-i}| = |\sum (C_j' - C_j)\, Z_j^{p-j}| \leqslant \delta \sum_{j=0}^{p-1} (2K)^j \leqslant (2K)^p\, \delta \quad ,$$

d'où immédiatement le résultat).

Démontrons maintenant la proposition 1. Il suffit pour cela d'établir le résultat suivant : <u>soient</u> $b_1 , \ldots , b_p$ <u>des fonctions d'une variable</u>

$$t \in [t_1 , t_2] = I \quad ,$$

<u>vérifiant,</u>

$$\forall\ t \in I ,\quad |b_i(t)| \leqslant K \quad (K \geqslant 1)$$

<u>et</u>

$$\forall\ t' \in I ,\quad |b(t) - b(t')| \leqslant L|t - t'| \quad .$$

<u>Soit</u> g <u>une fonction continue de</u> $t \in I$ <u>vérifiant</u>

$$g^p + \sum b_i\, g^{p-i} = 0 \quad .$$

<u>Alors</u>

$$|g(t_2) - g(t_1)| \leqslant 4p\, K[L|t_2 - t_1|]^{1/p} \quad .$$

Soient, en effet $Z_1 , \ldots , Z_p$ les racines du polynôme $Z^p + \sum b_i(t_1)\, Z^{p-i} = 0$, et supposons, par exemple que $Z_1 = f(t_1)$. Posons $A = 2K[L|t_2 - t_1|]^{1/p}$. D'après la remarque 2° , $\forall\ t \in I$, il existe un Z_i tel que $|f(t) - Z_i| \leqslant A$.

Considérons alors dans C l'ensemble Δ, réunion des disques fermés de centres Z_i et de rayon A , et soit Δ' la composante connexe de Z_1 dans Δ ; on a, $\forall\ t \in I$: $f(t) \in \Delta'$; et le diamètre de Δ' est évidemment $\leqslant 2p\,A$. D'où le résultat.

2. <u>Rappels sur les germes analytiques réels</u>.

Par définition, deux ensembles analytiques réels au voisinage de a définissent le même germe en a (d'ensemble analytique réel) s'ils coïncident dans un voisinage de a. Les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection <u>finies</u> de germes en a se définissent de façon évidente. Si $\mathfrak{a}_n$ désigne l'anneau des séries entières (à coefficients réels) des indéterminées $x_1, \ldots, x_n$, convergentes au voisinages de 0, l'ensemble des $f \in \mathfrak{a}_n$ qui s'annulent sur le germe E (lorsqu'on y remplace x_i par $x_i - a_i$) forme un idéal, noté $I(E)$. E est dit <u>irréductible</u> si $E = E_1 \cup E_2$ entraîne $E = E_1$ ou $E = E_2$. Tout germe E se décompose en une réunion finie de germes irréductibles $E = \bigcup_i E_i$ (parce que l'anneau $\mathfrak{a}_n$ est noethérien) ; si l'on suppose que $\forall\, i, j$, on a $E_i \not\subset E_j$, cette décomposition est unique, et les E_i ainsi obtenus s'appellent "composantes irréductibles de E". Enfin, pour que E soit irréductible, il faut et il suffit que $I(E)$ soit <u>premier</u> (i. e. que $\mathfrak{a}_n/I(E)$ soit intègre). Pour étudier la structure d'un germe irréductible, on commence par étudier celle d'un idéal premier. Pour simplifier, supposons $a = 0$, et soit p un idéal premier de $\mathfrak{a}_n$. A l'aide du "Vorbereitungssatz" et de quelques propositions élémentaires d'algèbre, on démontre ceci : on peut faire une transformation linéaire sur les x_i et trouver un entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, de manière que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1° Aucune $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ n'appartient à p ; et par conséquent l'application $f \to \bar{f} : \mathfrak{a}_n \to \mathfrak{a}_n/p$ est injective sur $\mathfrak{a}_k$ (que nous identifierons donc à $\bar{\mathfrak{a}}_k$).

2° Le corps des quotients de $\mathfrak{a}_n/p$ est engendré sur le corps des quotients de $\mathfrak{a}_k$ par $\bar{x}_{k+1}$, et le polynôme minimal de $\bar{x}_{k+1}$ a ses coefficients dans $\mathfrak{a}_k$ et est un polynôme distingué (i. e., le coefficient dominant étant 1, les autres coefficients sont nuls à l'origine) et irréductible que nous noterons dans la suite $P(x_{k+1} ; x_1, \ldots, x_k)$; nous poserons $\deg(P) = p$.

3° Les polynômes minimaux des $\bar{x}_{k+\ell}$ $(\ell = 2, \ldots, n-k)$ sur le corps des quotients de $\mathfrak{a}_k$ sont également à coefficients dans $\mathfrak{a}_k$, distingués et irréductibles ; nous les noterons $R_{k+\ell}(x_{k+\ell} ; x_1, \ldots, x_k)$.

(Rappelons que, pour un polynôme distingué, appartenant à $\in \mathfrak{a}_k[x]$, les notions d'irréductibilité dans $\mathfrak{a}_k[x]$, dans $\mathfrak{a}_{k+1}$, ou dans (corps des quotients de $\mathfrak{a}_k$) $[x]$ coïncident).

4° Il existe des polynômes $Q_{k+\ell} \in \mathfrak{a}_k[x_{k+1}]$, $\deg(Q_{k+\ell}) < p$, uniques, tels que :

$$P'(\bar{x}_{k+1} ; x_1, \ldots, x_k)\, \bar{x}_{k+\ell} = Q_{k+\ell}(\bar{x}_{k+1} ; x_1, \ldots x_k) \quad .$$

5° Pour tout idéal $q \supset p$, $q \neq p$, il existe $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$, $f \in q$. Evidemment, les polynômes P, $R_{k+\ell}$, $P'(x_{k+1} ; \ldots)x_{k+\ell} - Q_{k+\ell}(x_{k+1} ; \ldots)$ appartiennent à p (mais, en général, ils n'engendrent pas p).

On démontre alors ceci. Soit $\Delta(x_1, \dots, x_k)$ le discriminant (qui n'est pas $= 0$, P étant irréductible) de P, et soit E, le germe défini par l'idéal p (i. e. par l'annulation d'un système de générateurs de p). Au voisinage de 0, l'ensemble $E \cap \{x ; \Delta(x) \neq 0\}$ coïncide avec l'ensemble des zéros communs à P et aux $P' x_{k+\ell} - Q_{k+\ell}$ qui vérifient $\Delta(x) \neq 0$ (pour parler plus correctement, il faudrait prendre un "représentant" de E ...). Lorsque cet ensemble est vide, Δ s'annule sur E et par conséquent $p \neq I(E)$. Dans le cas contraire (i. e. s'il n'est vide dans aucun voisinage de zéro), c'est une <u>variété</u> analytique réelle (sans singularités) de dimension p, et (sa projection dans R^k étant l'ensemble des $(x_1, \dots, x_k)$ pour lesquels P a une racine réelle) en utilisant 5°, on voit qu'on a : $p = I(E)$.

On déduit facilement de là la notion de dimension d'un germe analytique réel. Elle possède la propriété suivante : E est, au voisinage de 0, réunion d'un ensemble analytique F, $\dim F < \dim E$ et d'une variété analytique réelle de dimension (au sens des variétés) égale à $\dim E$. Si E est irréductible et si $p = I(E)$ on déduit facilement des considérations précédentes ceci :

a. L'entier k introduit ci-dessus est égal à $\dim E$.

b. Si F est un germe contenu dans E, $F \neq E$, on a $\dim F < \dim E$ (en particulier, $\dim[E \cap \{x ; \Delta(x) = 0\}] < \dim E$).

Pour ces question, voir [1], chapitres 9 et 10, (les auteurs cités se placent dans le cas complexe, mais l'adaptation est immédiate) ; voir aussi [4], où un exposé est donné, mais qui s'appuie sur des résultats d'algèbre beaucoup moins élémentaires.

3. <u>Démonstration du théorème 1.</u>

Nous démontrerons le théorème par récurrence sur n, et nous procederons en deux étapes.

a. <u>Si le théorème est vrai pour</u> $0, 1, \dots, n-1$, <u>et si</u> E <u>est un sous-ensemble analytique de</u> Ω, <u>de dimension</u> $< n$ (i. e. $\forall a \in V$, <u>le germe défini par</u> E <u>en</u> a <u>est de dimension</u> $< n$), <u>on a, pour</u> $C > 0$, $\rho > 0$ <u>convenables</u> : $|f(x)| \geq C\, d(x, V \cap E)^\rho$, $\forall x \in E \cap K$.

b. <u>Si (a) est vrai, le théorème est vrai pour</u> n.

DÉMONSTRATION de (a). - Par BOREL-LEBESGUE, il suffit de démontrer ceci : si $a \in V \cap E$, pour tout $x \in E$ suffisamment voisin de a, on a :

$$|f(x) \geq C\, d(x , V \cap E)^{\rho} \qquad (C > 0 , \quad \rho > 0 \quad \text{convenables}) \quad .$$

Pour simplifier, nous supposerons $a = 0$; nous pouvons évidemment nous contenter de faire la démonstration lorsque le germe de E en 0 est irréductible et $\not\subset V$; soit k sa dimension ; par hypothèse, $k \leq n - 1$. Nous démontrerons alors le résultat par récurrence sur k, en établissant ceci : il existe un ensemble analytique $F \subset E$ au voisinage de 0, avec $\dim(\text{germe en } 0 \text{ de } F) < k$, tel que $\forall\ x \in E$, assez voisin de 0, on ait :

$$(1) \qquad |f(x)| \geq C\, d(x , F)^{\rho} \quad .$$

[(a) en résulte bien ; en effet, par hypothèse de récurrence, $\forall\ y \in F$, assez voisin de 0, on a : $C_1 |f(y)|^{r_1} \geq d(y ; V \cap F)$. Soit alors $x \in V$ et $y \in F$ tel que $d(x , y) = d(x , F)$: un tel y existe certainement pour x assez voisin de 0 ; on a :

$$d(x , V \cap E) \leq d(x , y) + d(y , V \cap F)$$

et (théorème des accroissements finis)

$$|f(x) - f(y)| \leq C_2\, d(x , y)$$

d'où

$$d(x , V \cap E) \leq d(x , y) + C_1 |f(y)|^{r_1} \leq d(x , y) + C_3 |f(x)|^{r_1} + C_4\, d(x , y)^{r_1} \quad .$$

Ceci, joint à $d(x , y) \leq C_5 |f(x)|^{r_2}$, inégalité équivalente à (1), donne le résultat].

Utilisons pour cela les résultats du paragraphe 2, en en reprenant les notations après avoir fait éventuellement un changement linéaire de coordonnées. Tout d'abord, nous savons, (5°), qu'il existe $h \in \mathfrak{a}_n$ tel qu'on ait

$$hf \equiv f_1(x_1 , \dots , x_k) \qquad (\text{mod } p) \quad ;$$

on vérifie tout de suite que l'on peut alors remplacer f par f_1 et V par l'ensemble V_1 des zéros de f_1 (dans la suite, nous omettrons les indices 1).

Posons pour $x = (x_1 , \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\mathrm{pr}(x) = (x_1 , \dots , x_k)$. Posons $\hat{V} = V \cap \mathbb{R}^k$, $\{ x \in \mathbb{R}^k ; \Delta(x) = 0 \} = \hat{W}$, $\mathrm{pr}^{-1}(\hat{W}) = W$; puisque f ne dépend que de $x_1 , \dots , x_k$, on a $V = \mathrm{pr}^{-1}(\hat{V})$. Montrons que l'on peut prendre $F = E \cap (W \cup V)$.

Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, assez petit pour que tout ce qu'on va dire soit vrai ; il existe $\mathcal{U}'$, voisinage de zéro dans $\mathbb{R}^{n-k}$ tel que $\forall\ (x_1 , \dots , x_k) \in \mathcal{U}$, on ait, x_{k+1} (resp. x_{k+i}) désignant n'importe quelle racine réelle de $P(z ; x_1 , \dots , x_k)$ (resp. R_{k+i}) : $(x_{k+1} , \dots , x_n) \in \mathcal{U}'$.

Soit Ω_i $(i = 1, \dots, p)$ l'ensemble des $(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U} - \hat{W}$ tels que l'équation $P(Z ; x_1, \dots, x_k) = 0$ ait au moins i racines réelles (qui sont nécessairement distinctes; on sait d'ailleurs que Ω_1 n'est pas vide) ; évidemment, Ω_i est ouvert et fermé dans $\mathcal{U} - \hat{W}$, et si l'on désigne par f^i_{k+1} la i-ième racine réelle (on les range par ordre croissant, par exemple), $f^i_{k+1}(x_1, \dots, x_k)$ est une fonction continue de $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i$, donc (proposition 1) une fonction quasi-holdérienne de $x_1, \dots, x_k$; posons maintenant :

$$f^i_{k+\ell} = \frac{Q_{k+\ell}(f^i_{k+1} ; x_1, \dots, x_k)}{P'(f^i_{k+1} ; x_1, \dots, x_k)} \quad ;$$

$f^i_{k+\ell}$ est encore continue, et elle est quasi-holdérienne puisqu'elle vérifie : $R_{k+\ell}(f^i_{k+\ell} ; x_1, \dots, x_k) = 0$. En outre, on a

$$(f^i_{k+1}, \dots, f^i_n) \in \mathcal{U}', \quad \forall \ (x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i \quad .$$

Soit E_i l'ensemble des points $x \in \underset{\sim}{R}^n$ vérifiant : $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_i$, $x_{k+\ell} = f^i_{k+\ell}(x_1, \dots, x_k)$; si $\mathcal{U}'$ a été choisi assez petit, on sait qu'on a $[E - W] \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{U}') = \bigcup\limits_i E_i$. Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$|f(x)| \geqslant C\, d(x ; E \cap W)^\rho$$

lorsque $x \in E_i$ est assez voisin de zéro. Mais, si x est assez voisin de zéro, on a évidemment :

$$d(x, F) = d(x, b(E_i - V)) \qquad \text{et} \qquad d(\mathrm{pr}\, x, \hat{V} \cup \hat{W}) = d(\mathrm{pr}\, x, b(\Omega_i - \hat{V})) \quad ;$$

d'après la remarque du paragraphe 1, il suffit donc de démontrer :

$$|f(x)| \geqslant C_1\, d(\mathrm{pr}\, x, \hat{V} \cup \hat{W})^{\rho_1} \quad ,$$

ce qui résulte immédiatement du fait que f ne dépend que de $\mathrm{pr}\, x$ et de l'hypothèse que le théorème est vrai pour k.

DÉMONSTRATION de (b). - En raisonnant comme en (a), il suffit de se placer au voisinage de l'origine et de trouver un sous-ensemble analytique F, de dimension $< n$ tel que :

$$|f(x)| \geqslant C\, d(x, F)^\rho \qquad (C > 0, \ \rho > 0) \quad .$$

On peut, d'après le "Vorbereitungssatz", supposer que f est un polynôme distingué x_n : $f(x) = x_n^p + \sum a_i(x_1, \dots, x_{n-1})\, x_n^{p-i}$; soit W l'ensemble des zéros de f'_{x_n} ; montrons que $F = V \cup W$ répond à la question.

Soit en effet $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ un point voisin de 0 et soit d le nombre > 0 le plus grand, tel que f et f'_{x_n} ne s'annulent pas sur l'intervalle ouvert $(x_1, \dots, x_{n-1}) \times]x_n - d, x_n + d[$; on a évidemment $d \geqslant d(x, F)$; et si l'on pose $I' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \times [x_n - d, x_n]$,

$$I'' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \times [x_n, x_n + d] \quad ,$$

on a :

$$|f(y)| \leq |f(x)| \ , \quad \forall\ y \in I' \quad \text{ou} \quad \forall\ y \in I'' \ .$$

Le théorème résulte alors du lemme trivial suivant, appliqué pour $i = 0$.

LEMME 1. - <u>Il existe</u> $C > 0$ <u>tel que, pour tout polynôme</u> $P = a_0 x^p + \sum_1^p a_i x^{p-i}$ <u>on ait</u>

$$\forall\ x \in R\ , \quad |a_i| \leq C\, d^p \max_{x \leqslant y \leqslant x+d} |P(y)| \qquad (i = 0, \dots, p)$$

(on se ramène immédiatement à $x = 0$, $d = 1$; alors, le lemme résulte du fait que l'espace des polynômes de degré p est de dimension finie et que $\max_{0 \leqslant y \leqslant 1} |P(y)|$ est une norme sur cet espace).

Le théorème 1 a été démontré par ŁOJASIEWICZ dans [3] (voir en particulier p. 121-129) ; j'ai suivi cet article, en y apportant quelques simplifications.

Dans le cas où f est un polynôme, une démonstration, fondée sur une méthode d'élimination algébrique réelle a été donnée par HÖRMANDER [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (S.) and MARTIN (T.). - Several complex variables. - Princeton Princeton University Press, 1948 (Princeton mathematical Series, 10).

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv for Mathematik, t. 3, 1958, p. 555-569.

[3] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Math., t. 18, 1959, p. 87-136.

[4] SAMUEL (Pierre). - Algèbre locale et ensembles analytiques, Séminaire Lelong : Analyse, t. 1, 1957/58, n° 2, 12 p.