

SÉMINAIRE SCHWARTZ

BERNARD MALGRANGE

Division des distributions. I : distributions prolongeables

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 21, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A21_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIVISION DES DISTRIBUTIONS
I : DISTRIBUTIONS PROLONGEABLES

par Bernard MALGRANGE

1. Ensembles régulièrement séparés.

Dans toute cette série d'exposés, si A et B désignent deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n , on notera $d(A, B)$ leur distance euclidienne.

On rappelle aussi qu'un ensemble A est dit "localement fermé" s'il est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé; on vérifie immédiatement qu'il faut et qu'il suffit pour cela que l'ensemble $\bar{A} - A$ (désigné dans la suite par : bA) soit fermé.

DÉFINITION 1. - A et B étant bornés et Λ étant un compact $\subset \mathbb{R}^n$ on dit que " A et B sont régulièrement séparés par Λ " et on écrit " A, B r. s. Λ " si $\Lambda = \emptyset$ et $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ou s'il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ tels que, $\forall x \in A$, on ait

$$d(x, B) \geq C d(x, \Lambda)^\rho .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette propriété est symétrique par rapport à A et B .

REMARQUES.

1° Lorsque " A, B r. s. Λ ", on a évidemment $\Lambda \supset \bar{A} \cap \bar{B}$. Mais on ne peut pas en général remplacer Λ par $\bar{A} \cap \bar{B}$ (contre-exemple : A, B deux courbes ayant un contact d'ordre infini en un point : on peut prendre $\Lambda = \bar{A}$ ou \bar{B} , mais non $\bar{A} \cap \bar{B}$!).

2° Si A, B sont deux ensembles quelconque $\subset \mathbb{R}^n$, et Λ un fermé $\subset \mathbb{R}^n$, il nous arrivera d'écrire " A, B r. s. Λ " lorsque, pour tout couple d'ouverts relativement compacts \emptyset et $\emptyset' \subset \mathbb{R}^n$, avec $\bar{\emptyset} \subset \emptyset'$, on a

$$"A \cap \emptyset, B \cap \emptyset \text{ r. s. } \Lambda \cap \bar{\emptyset}'"$$

Nous commencerons par donner un théorème de caractère technique, dont l'utilité apparaîtra au paragraphe 2.

THÉORÈME 1. - A, B et Λ étant bornés, si l'on a " A, B r. s. Λ ", il existe $\rho > 0$, une suite $\{M_p\}$ de nombres > 0 ($p = 1, 2, \dots$) et une fonction $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n - \Lambda}$ possédant les propriétés suivantes :

1° $f = 0$ (resp. 1) au voisinage de $A - \Lambda$ (resp. $B - \Lambda$).

2° Pour tout monôme de dérivation D^k , et tout $x \in \mathbb{R}^n - \Lambda$,

$$|D^k f(x)| \leq M_{|k|} d(x, \Lambda)^{-p|k|}$$

(on rappelle les notations suivantes : $k = (k_1, \dots, k_n)$, k_i entiers ≥ 0 ;
 $D^k = \prod (\frac{\partial}{\partial x_i})^{k_i}$; $|k| = \sum k_i$).

DÉMONSTRATION. - Si $\Lambda = \emptyset$, on a $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ et le théorème est trivial. Sinon supposons, pour fixer les idées, que $\forall x \in A$, on ait $d(x, \Lambda) \leq 1$. Soient ρ et C les constantes qui figurent dans la définition 1 ; nous supposerons (ce qu'on peut évidemment toujours faire $\rho \geq 1$, $C \leq 1$).

Introduisons les ensembles suivants (p entier > 0) :

$$A_p = \{x \in A ; \frac{1}{3^p} \leq d(x, \Lambda) \leq \frac{1}{3^{p-1}}\}$$

H_p (resp. H'_p , resp. H''_p) =

$$\{x \in \mathbb{R}^n - \Lambda ; d(x, A_p) \leq \varepsilon_p \text{ (resp. } \leq \frac{2\varepsilon_p}{3}, \text{ resp. } < \frac{\varepsilon_p}{3})\}$$

avec $\varepsilon_p = \frac{C}{3^{pp+1}}$ (donc $\varepsilon_p \leq \frac{1}{3^{p+1}}$) ; donc :

$$A - \Lambda = \bigcup_p A_p, \quad A_p \subset H''_p \subset H'_p \subset H_p.$$

Les H_p sont des compacts de $\mathbb{R}^n - \Lambda$, et l'on a, $\forall x \in H_p$

$$(1) \quad \frac{2}{3^{p+1}} \leq d(x, \Lambda) \leq \frac{10}{3^{p+1}}$$

De là résulte que, pour $q \geq 2$, on a

$$d(H_p, H_{p+q}) \geq \frac{1}{3^{p+2}} ;$$

donc un voisinage de H_p ne rencontre pas $\bigcup_{q \geq 2} H_{p+q}$.

Posons $L = \bigcup_p H_p$; il est immédiat de voir que L est fermé dans $\mathbb{R}^n - \Lambda$, (mais non dans \mathbb{R}^n !) et que c'est un voisinage de $A - \Lambda$ (et de même, $L'' = \bigcup_p H''_p$ est un voisinage ouvert de $A - \Lambda$) ; de plus, dans $\mathbb{R}^n - \Lambda$, L est un voisinage de B : il suffit pour cela de montrer que, $\forall p$, $H_p \cap B = \emptyset$; or, $\forall x \in H_p$, on a

$$d(x, B) \geq \inf_{y \in A_p} d(y, B) - d(x, A_p) \geq \inf_{y \in A_p} C d(y, \Lambda)^p - d(x, A_p) \geq \frac{C}{3^{pp+1}} .$$

Soit maintenant $\beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, à support dans la boule $d(x, 0) \leq 1$, et vérifiant : $\int \beta(x) dx = 1$; posons $\tilde{\beta}_p = \left(\frac{3}{\varepsilon_p}\right)^n \beta\left(\frac{3x}{\varepsilon_p}\right)$; soit χ_p la fonction caractéristique de H_p' et soit $f_p = 1 - \beta_p * \chi_p$. La fonction f_p est indéfiniment dérivable dans \mathbb{R}^n , égale à 1 dans CH_p , et à 0 dans H_p'' . Donc, tout $x \in \mathbb{R}^n - \Lambda$ possède un voisinage dans lequel tous les f_p sont $\equiv 1$, sauf pour deux consécutifs au plus. Le produit $f = \prod_{p=1}^{\infty} f_p$ définit donc une fonction indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}^n - \Lambda$; je dis qu'elle répond à la question.

Tout d'abord il est évident qu'elle vérifie le 1°, et qu'elle est bornée ; il suffit donc d'établir 2°, pour $|k| > 0$. Il suffit pour cela de se placer en un point $x \in H_p$; au voisinage de x , on a $f = f_{p-1} f_p f_{p+1}$. Majorons par exemple $D^k f_p(x)$: on a évidemment $|D^k f_p(x)| \leq \left(\frac{3}{\varepsilon_p}\right)^{-|k|} M_k'$, avec $M_k' = \int |D^k \beta| dx$; par suite, d'après (1) et la définition de ε_p :

$$|D^k f_p(x)| \leq C_1 M_k' d(x, \Lambda)^{-\rho|k|} \quad (C_1 \text{ indépendant de } k \text{ et } p) .$$

En majorant de même f_{p+1} et f_{p-1} et en appliquant la formule de Leibniz, on trouve le résultat cherché.

C. Q. F. D.

2. Distributions prolongeables.

DÉFINITION 2. - Soit Ω un ouvert relativement compact $\subset \mathbb{R}^n$.

1° On désigne par \mathcal{O}_Ω l'espace des fonctions $f \in \mathcal{E}_\Omega$ telles qu'il existe deux suites $\{C_p\}$ et $\{\rho_p\}$ de nombres > 0 vérifiant, pour tout monôme de dérivation D^k , et tout $x \in \Omega$: $|D^k f(x)| \leq C_{|k|} d(x, b_\Omega)^{-\rho|k|}$.

2° On désigne par \mathcal{O}_Ω^* l'ensemble des $f \in \mathcal{O}_\Omega$, partout $\neq 0$, et vérifiant $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_\Omega$.

3° On désigne par \mathcal{O}'_Ω l'espace des distributions $T \in \mathcal{O}'_\Omega$ qui peuvent être prolongées en une distribution $\bar{T} \in \mathcal{O}'_{\mathbb{R}^n}$ (i. e. la restriction de \bar{T} à Ω est égale à T).

On appellera \mathcal{O}_Ω l'espace des "fonctions dans Ω (indéfiniment dérivables) à croissance lente". \mathcal{O}_Ω est évidemment une algèbre pour la multiplication ordinaire. Pour que $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $f \neq 0$ partout, vérifie : $f \in \mathcal{O}_\Omega^*$, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ et $\rho > 0$ avec $\forall x \in \Omega$,

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq C d(x, b\Omega)^{-\rho} .$$

Posons maintenant :

$$\forall m \text{ entier } > 0, \forall \varphi \in \mathcal{O}_\Omega : \|\varphi\|_m = \sup_{x \in \Omega} \sum_{|k| \leq m} |D^k \varphi(x)| .$$

D'après le théorème de Hahn Banach, pour qu'on ait $T \in \mathcal{O}'_\Omega$ (on dira " T est une distribution prolongeable"), il faut et il suffit qu'il existe un m et un $C > 0$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{O}_\Omega$, on ait

$$| \langle T, \varphi \rangle | \leq C \|\varphi\|_m .$$

On déduit aussitôt de là : tout $T \in \mathcal{O}'_\Omega$ possède un prolongement \bar{T} à support dans $\bar{\Omega}$ (prolonger la distribution égale à T sur Ω et à 0 sur $\mathbb{C}\bar{\Omega}$; on se ramène immédiatement au cas d'ouverts bornés).

REMARQUE. - Il nous arrivera quelquefois, pour Ω ouvert non borné, d'écrire $f \in \mathcal{O}_\Omega$ (resp. \mathcal{O}_Ω^* , resp. \mathcal{O}'_Ω) si, $\forall U$ ouvert relativement compact $\subset \mathbb{R}^n$ on a, $f \in \mathcal{O}_{\Omega \cap U}$ (resp. ...). Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, et que l'on considère \mathbb{R}^n comme plongé dans $\mathbb{P} \cap (\mathbb{R})$ (l'extension de ces définitions aux variétés différentiables est immédiate), $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ coïncide avec l'espace \mathcal{O}_M de SCHWARTZ, et $\mathcal{O}'_{\mathbb{R}^n}$ avec \mathcal{S}' .

PROPOSITION 1. - On a : $\mathcal{O}_\Omega \mathcal{O}'_\Omega = \mathcal{O}'_\Omega$.

On se ramène immédiatement au cas où Ω est borné ; soit alors $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $T \in \mathcal{O}'_\Omega$; il s'agit de démontrer que l'on a : $f T \in \mathcal{O}'_\Omega$.

D'après le critère précédent, il suffit de montrer ceci : $\forall m$ entier ≥ 0 , il existe m_1 , et $C > 0$ tels que, $\forall \varphi \in \mathcal{O}_\Omega$ on ait

$$\|f\varphi\|_m \leq C \|\varphi\|_{m_1} .$$

Or cela résulte immédiatement de la formule de Leibniz et du résultat élémentaire suivant (dont la démonstration est laissée au lecteur) : $\forall m$ entier ≥ 0 , il existe $C_m > 0$ tel que tout $\varphi \in \mathcal{O}_\Omega$, $\|\varphi\|_m < 1$, on ait

$$|D^k \varphi(x)| \leq C_m d(x, b\Omega)^{m-|k|}$$

lorsque $|k| \leq m$ et $x \in \Omega$.

THÉOREME 2. - Si A et B sont deux compacts $\subset \mathbb{R}^n$ régulièrement séparés par le compact $A \cap B$, on a : $\mathcal{E}'_{A \cap B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$ (autrement dit : toute distribution T à support dans $A \cup B$ est de la forme $T_1 + T_2$, T_1 à support dans A, T_2 à support dans B) .

DÉMONSTRATION. - Posons $\Omega = \mathbb{R}^n - (A \cap B)$, et soit \hat{T} la restriction de T à Ω ; on a évidemment : $\hat{T} \in \mathcal{D}'_{\Omega}$; d'après le théorème 1, il existe $f \in \mathcal{D}_{\Omega}$, avec $f = 0$ (resp. 1) au voisinage de A (resp. B); d'après la proposition 1, on a $f\hat{T} \in \mathcal{D}'_{\Omega}$; il suffit alors de prendre pour T_2 un prolongement de $f\hat{T}$, et de poser $T_1 = T - T_2$.

REMARQUES.

1° L'énoncé reste évidemment vrai si l'on suppose seulement A et B fermés au lieu de "compacts".

2° Le théorème 2 admet une réciproque. Si les compacts A et B vérifient $\mathcal{E}'_{A \cup B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$, on a "A, B r. s. $A \cap B$ ".

(Facile : supposer le contraire, et prendre une suite $(x_p, y) \in A \times B$ telle que $d(x_p, y_p)$ tende "très vite" vers zéro, mais non $d(x_p, A \cap B)^p$, et prendre T de la forme $\sum_p \alpha_p [\delta(x - x_p) - \delta(x - y_p)]$, les α_p étant des scalaires convenables. Voir les détails dans [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, *Studia Math.* t. 18, 1959, p. 87-136.

(Pour cet exposé, voir les pages 87 à 99).