

SÉMINAIRE SCHWARTZ

ANDRÉ MARTINEAU

**Troisième partie : fonctions analytiques et distributions.
Supports des fonctionnelles analytiques**

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 19, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A19_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Troisième partie : FONCTIONS ANALYTIQUES ET DISTRIBUTIONS

SUPPORTS DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES

par André MARTINEAU

1. Généralités et premières définitions.

Soit V une variété analytique complexe ; $H(V)$ désigne l'espace vectoriel topologique des fonctions holomorphes sur V muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

DÉFINITION 1. - On appelle fonctionnelle analytique sur V toute forme linéaire continue sur $H(V)$.

L'ensemble des fonctionnelles analytiques sur V sera noté $H'(V)$ et muni de la topologie $\mathcal{C}'_0$ ([6]) de la convergence uniforme sur les parties compactes de $H(V)$.

Soient V_1 et V_2 deux variétés analytiques complexes et h une application analytique de V_1 dans V_2 . L'application th de $H(V_2)$ dans $H(V_1)$ définie par ${}^th(f) = f \circ h$ ($f \in H(V_2)$) est continue donc admet une application transposée, que nous noterons h à nouveau, définie de $H'(V_1)$ dans $H'(V_2)$. Si $\psi \in H'(V_1)$, $h(\psi)$ sera dite, l'image de ψ par l'application analytique h .

DÉFINITION 2. - Soient Ω un ouvert de V , et i l'application identique de Ω dans V ; les éléments de $H'(V)$ image par i de quelque élément de $H'(\Omega)$ sont dits fonctionnelles analytiques sur V portables par Ω .

DÉFINITION 3. - Soient W une sous-variété de V , et i l'application identique de W dans V ; les éléments de $H'(V)$ image par i de quelque élément de $H'(W)$ sont dits fonctionnelles analytiques sur V strictement portables par W .

$H(V)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}(V)$ (ou de $\mathcal{C}'(V)$, ou de $\mathcal{D}'(V)$, etc.). Si π désigne ce plongement de $H(V)$ dans $\mathcal{C}(V)$, ${}^t\pi$ est un homomorphisme de $\mathcal{C}'(V)$ sur $H'(V)$ (resp. $\mathcal{C}'(V)$ sur $H'(V)$; $\mathcal{D}'(V)$ sur $H'(V)$; etc.). ψ étant une fonctionnelle analytique sur V , et μ une mesure à support compact telle que ${}^t\pi(\mu) = \psi_\mu = \psi$, on dira que μ représente ψ : si $f \in H(V)$, $\psi(f) = \int_V f d\mu$; alors

(2') : Pour que ψ soit portable par Ω , il faut et il suffit qu'il existe μ à support compact dans Ω telle que $\psi_\mu = \psi$.

(3') : Pour que ψ soit strictement portable par W , il faut et il suffit qu'il existe μ , mesure à support compact dans W , telle que $\psi(f) = \int_W f.d\mu$, (si $\text{rest } f$ désigne la restriction d'une fonction de $H(V)$ à W , on a aussi $\int_V f.d\mu = \int_W \text{rest } f.d\mu$).

DÉFINITION 4. - Soit K un compact de V , ψ sera dite portable par K si elle est portable par tous les voisinages de K dans V .

On dira aussi que K peut porter ψ . $H(K)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de K . Soit $\mathcal{F}$ la famille des ouverts contenant K (on dira $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subset \beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$) et soit $P_{\alpha, \beta}$ l'application de $H(\alpha)$ dans $H(\beta)$ définie par $P_{\alpha, \beta}(f) = \text{rest } f$. Les $H(\alpha)$ et les $P_{\alpha, \beta}$ forment un système inductif. On peut identifier $H(K)$ à la limite inductive de ce système. On munit alors $H(K)$ de la topologie localement convexe de la limite inductive des topologies des $H(\alpha)$. On sait ([4], chapitre 2, page 57) que $H(K)$ est un espace $\mathcal{D}, \mathcal{F}$ nucléaire. L'injection i de $H(V)$ dans $H(K)$ est par définition continue, donc ti peut être définie de $H'(K)$ dans $H'(V)$. On voit aisément que

(4') : Une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit portable par K est que $\psi \in {}^ti(H'(K))$; ou encore que ψ soit continue pour la topologie induite par $H(K)$ sur $H(V)$.

(4) est a priori plus faible que (4'). Mais ces deux définitions sont équivalentes si V est une variété de Stein. On doit montrer que si ψ satisfait à (4), elle peut être prolongée par continuité à $H(K)$. Désignons par $\tilde{K}$ l'enveloppe de K par rapport à la famille $H(V)$. ψ étant portable par tout voisinage de K l'est par tout voisinage de $\tilde{K}$; mais dans ce dernier cas, il est clair que ψ peut être prolongée à $H(\tilde{K})$. Pour conclure, il suffit de voir que $H(\tilde{K})$ s'identifie à un sous-espace fermé de $H(K)$. Ce dernier point résulte du

LEMME. - Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes et bornées dans un voisinage fixe V de K , et prolongeables à $\tilde{K}$. Alors il existe un voisinage W de $\tilde{K}$, qui ne dépend que de V , dans lequel la famille $\mathcal{F}$ est prolongeable en restant bornée.

Ce lemme, dans C^N , résulte d'un argument classique de CARTAN-THULLEN, et s'étend par plongement d'un voisinage de $\tilde{K}$ dans un polydisque, dans le cas d'une variété de Stein.

Soit $\mathcal{O}$ une partie de l'ensemble des compacts de V telle que, si A_α est une sous-famille totalement ordonnée de $\mathcal{O}$ pour la relation d'ordre définie par l'inclusion $\bigcap_\alpha A_\alpha \in \mathcal{O}$.

DÉFINITION 5. - Un compact K de $\mathcal{O}$ est dit un $\mathcal{O}$ -support de ψ , si ψ est portable par K et si K est minimal dans la famille des éléments de $\mathcal{O}$ qui peuvent porter ψ .

Il est clair que si ψ est portable par un élément de $\mathcal{O}$, alors ψ admet au moins un $\mathcal{O}$ -support.

Si V_1 et V_2 sont deux variétés analytiques complexes, on peut identifier ([4], chapitre 2, page 81) $H(V_1 \times V_2)$ à $H(V_1) \hat{\otimes}_{E, \pi} H(V_2)$, donc, si $\psi_1 \in H'(V_1)$, $\psi_2 \in H'(V_2)$, $\psi_1 \circ \psi_2$ est identifié à une fonctionnelle analytique sur $V_1 \times V_2$. Il est clair que si $\psi_1 = \psi_{\mu_1}$, $\psi_2 = \psi_{\mu_2}$ on a $\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_{\mu_1 \otimes \mu_2}$. Si V est une variété de groupe, $H'(V)$ devient une algèbre à produit continu comme suit : soit $\Delta : f(\hat{z}) \rightarrow f(\hat{z} \cdot \hat{u})$ l'application diagonale de $H(V)$ dans

.../...

$H(V \times V) \simeq H(V) \hat{\otimes}_{\mathbb{E}, \pi} H(V)$ définie par la loi de groupe $\mathcal{S}: (V \times V) \rightarrow V$.

${}^t\Delta$ est une application linéaire continue de $H'(V) \hat{\otimes}_{\pi, \mathbb{E}} H'(V)$ dans $H'(V)$ donc définit une application bilinéaire continue

$$(\psi_1, \psi_2) \rightarrow \psi_1 * \psi_2,$$

appelée produit de composition, de $H'(V) \times H'(V)$ dans $H'(V)$. Le produit de composition est associatif, et commutatif si le groupe l'est.

2. La transformation de Fourier-Borel.

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n , E^* désigne son dual. Si ρ est une norme définie sur E , ρ^* désigne la norme duale. Si $z \in E$, $u \in E^*$, on note $u(z)$ par $\langle z, u \rangle$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E ; on notera par $e_1^*, \dots, e_n^*$ la base duale $[e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}]$. Les composantes de z seront notées $(z_1, \dots, z_n)$, celles de u $(u_1, \dots, u_n)$. $H'(E)$ muni de son produit de composition est une algèbre commutative.

Soit ρ^* une norme sur E^* ; une fonction F entière sur E^* est dite de type exponentiel s'il existe une majoration

$$(1) \quad |F(u)| \leq K \exp [A \rho^*(u)]$$

Toutes les normes sur E^* étant équivalentes, cette définition ne dépend pas de la norme choisie. Si ρ^* est choisi, la borne inférieure des nombres A tels que (1) ait lieu est dite le ρ^* -type exponentiel de F . L'ensemble des fonctions de type exponentiel forme un espace vectoriel topologique, noté $\text{Exp}(E^*)$, de la façon suivante : une norme ρ^* étant fixée, soit Exp_A l'ensemble des F telles que :

$$\|F\|_A = \sup_{u \in E^*} |F(u) \exp(-A \rho^*(u))| < +\infty.$$

C'est un espace de Banach quand on le munit de la norme $\|F\|_A$. On munit $\text{Exp}(E^*)$ de la topologie localement convexe de la limite inductive des $\text{Exp}_A \subset \text{Exp}(E^*)$.

Soit $\psi \in H'(E)$: pour tout $u \in E^*$, on peut calculer

$$\psi(\exp(\langle \hat{z}, u \rangle)) = \mathcal{F}\psi(u).$$

$\mathcal{F}\psi(\hat{u})$ est dite la transformée de Fourier-Borel de ψ . E étant muni d'une base, on désigne par $\mathcal{P}_1$ la famille des compacts de la forme

$$|z_e| \leq a_e, \quad (e = 1, 2, \dots, n) \quad (a_e \in \mathbb{R}^+).$$

THÉOREME 1.([5]) - Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction F soit la transformée $\mathcal{F}\Psi$ de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique de $\mathcal{P}_1$ -support ($|z_1| \leq A_1, \dots, |z_n| \leq A_n$) est que, quel que soit ϵ , on ait une majoration

$$(2) \quad |F(u)| \leq K(\epsilon) \exp [(A_1 + \epsilon) |u_1| + \dots + (A_n + \epsilon) |u_n|]$$

aucun des A_i ne pouvant être diminué.

DÉMONSTRATION. - Si Ψ est portable par le compact K ,

$$K = (|z_1| \leq A_1, \dots, |z_n| \leq A_n) \quad ,$$

alors, quel que soit ϵ , d'après la définition 4, il existe une mesure à support compact dans l'ouvert $K_\epsilon (|z_i| < A_i + \epsilon) (i = 1, 2, \dots, n)$ telle que

$\Psi(f) = \int f d\mu$. Donc $\mathcal{F}\Psi(u) = \int_E \exp(\langle z, u \rangle) d\mu_z$. On a

$$\langle z, u \rangle = \sum_{e=1}^n z_e \cdot u_e$$

d'où

$$\sup_{z \in K_\epsilon} |\langle z, u \rangle| \leq \sum_{e=1}^n |A_e + \epsilon| \cdot |u_e| \quad .$$

Si $\|\mu\|$ est la masse totale de μ , on a :

$$|\mathcal{F}\Psi(u)| \leq \|\mu\| \cdot \exp \left(\sum_{e=1}^n |A_e + \epsilon| \cdot |u_e| \right)$$

qui est (2). Réciproquement, supposons (2) vrai. Soit $f \in H(E)$. E étant muni d'une base, on peut identifier f à une fonction des n variables

$z_1, z_2, \dots, z_n$. $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$ avec les notations $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$ et $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq n} a_{\alpha} \cdot z^{\alpha}$. Donc

$$\Psi(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq n} a_{\alpha} \cdot b^{\alpha}$$

où $b^{\alpha} = \Psi(z^{\alpha})$. D'autre part $\exp \langle z, u \rangle = \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha} \cdot u^{\alpha}}{\alpha!}$ ($\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$).
D'où

$$\mathcal{F}\Psi(u) = \sum_{\alpha} \frac{b^{\alpha} \cdot u^{\alpha}}{\alpha!} \quad .$$

Si on a la majoration (2), comme par la formule de Cauchy :

$$\frac{b^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{F}\psi(u)}{u^{(\alpha+1)}} du \quad \begin{cases} du = du_1 \cdot du_2 \cdot \dots \cdot du_n \\ (\alpha + 1) = (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_n + 1) \\ \Gamma = \prod_{j=1}^n \Gamma_j \end{cases}$$

Γ_j étant un cercle centré à l'origine et de rayon R_j ; on en déduit

$$\frac{|b^\alpha|}{\alpha!} \leq \frac{K(\varepsilon) \exp \left(\sum_{j=1}^n (A_j + \varepsilon) R_j \right)}{R^\alpha}$$

$\frac{\exp (A_i + \varepsilon) R_i}{R_i^{\alpha_i}}$ est minimum pour $R_i = \left(\frac{\alpha_i}{A_i + \varepsilon} \right)$, d'où

$$\frac{|b^\alpha|}{\alpha!} \leq K(\varepsilon) \cdot \left[\frac{(e \cdot A + \varepsilon)}{\alpha} \right]^\alpha.$$

Si $f(z)$ est holomorphe au voisinage du polydisque de rayon $(A_1, \dots, A_n)$, on a

$$a_\alpha = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_H \frac{f(z) \cdot dz}{z^{(\alpha+1)}} \quad H = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$$

où H_i est un cercle de rayon S_i , $S_i > (A_i + \varepsilon)$ $dz = dz_1 dz_2 \dots dz_n$. D'où :

$$|a_\alpha| \leq \frac{M_f}{S^\alpha}, \quad \text{où} \quad M_f = \sup_{z \in H} |f(z)|,$$

alors

$$|a_\alpha \cdot b^\alpha| \leq \frac{\alpha! e^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\frac{A + \varepsilon}{S} \right)^\alpha \cdot M \cdot K(\varepsilon)$$

et si $\left(\frac{A + \varepsilon}{S} \right) < (1, 1, \dots, 1)$ la série de terme général $a_\alpha \cdot b^\alpha$ converge. La convergence étant uniforme pour les fonctions holomorphes au voisinage de H et bornées par M sur H ,

$$(3) \quad f \rightarrow \sum_{\alpha} a_\alpha \cdot b^\alpha$$

va définir une fonctionnelle analytique ψ , de transformée de Fourier-Borel $\mathcal{F}\psi(u) = \sum_{\alpha} \frac{b^\alpha \cdot u^\alpha}{\alpha!}$, prolongeable par continuité à K (par la formule (3)).

COROLLAIRE. - $\psi \leftrightarrow \mathcal{F}\psi$ est un isomorphisme vectoriel topologique entre $H'(E)$ et $\text{Exp}(E^*)$.

DÉMONSTRATION. - Elle résulte de la démonstration du théorème 1, $\text{Exp}(E^*)$ étant défini à partir de

$$\rho^* : (u \rightarrow \rho^*(u) = \sum_{i=1}^n |u_i|)$$

(la topologie de $\text{Exp}(E^*)$ est indépendante de la norme choisie; mieux, toute topologie du type $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ comparable à la topologie définie à partir du ρ^* ci-dessus lui est identique ([4], introduction, page 17, théorème B)).

3. Eléments de géométrie des $\mathcal{P}$ -supports.

Si $n = 1$, et si $\mathcal{P}_C$ désigne la famille des compacts convexes, toute fonctionnelle analytique admet un $\mathcal{P}_C$ -support unique, qui est, on le vérifie aisément, le compact dont la frontière est l'indicatrice de croissance de Polya ([2], page 74) de sa transformée de Fourier-Borel.

Dès que $n = 2$, il n'en est plus rien, mais par analogie on pourrait dire qu'"une indicatrice de croissance" d'une fonction de type exponentiel est donnée par la frontière d'un $\mathcal{P}_C$ -support de la fonctionnelle qu'elle définit..

EXEMPLE. - E est un espace vectoriel complexe à deux dimensions, E^* son dual, (e_1, e_2) une base dans E . Considérons la courbe

$$\Gamma : (x_1^2 + x_2^2 = 1) \quad (x_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, 2)$$

et

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} f(x_1, x_2) \, ds \quad (ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2).$$

Alors,

$$\mathcal{F}\psi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2) \, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1^2 + u_2^2)^n}{(n!)^2} = J_0(ir)$$

si $r^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Effectuons dans E le changement de base :

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(e_1 + ie_2) \\ f_2 = \frac{1}{2i}(e_1 - ie_2) \end{cases} \quad \begin{cases} f_1^* = e_1^* - ie_2^* \\ f_2^* = ie_1^* - e_2^* \end{cases}$$

Les nouvelles composantes d'un point de E sont notées (y_1, y_2) , d'un point de E^* (t_1, t_2) . D'où :

$$\mathcal{F}\psi(t) = \sum_n \frac{(4it_1 t_2)^n}{(n!)^2}.$$

Donc Ψ est portable, d'une part, par la courbe Γ , d'autre part, par les produits de disques :

$$|y_1| \leq \rho, \quad |y_2| \leq \frac{1}{4\rho} \quad (0 < \rho < +\infty)$$

comme il résulte des calculs du théorème 1.

Si on appelle "réel" l'ensemble des z de la forme $x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2$ ($x_i \in \mathbb{R}$), la trace d'un tel polycylindre sur le réel est $|x_1^2 + x_2^2| \leq \inf [\rho^2, (\frac{1}{4\rho})^2]$ donc peut être arbitrairement petite. Même quand Ψ provient d'une mesure réelle, il n'existe pas de plus petit $\mathcal{P}_C$ -support (sinon, toujours d'après le théorème 1, le $\mathcal{P}_C$ -support de Ψ devant être réduit à $\{0\}$, $J_0(ir)$ serait de type exponentiel 0). Par régularisation, on pourrait même supposer que Ψ provient d'une fonction indéfiniment dérivable. Mais on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient, (pour fixer les idées), V une variété de Stein, et Ψ une fonctionnelle analytique sur V portable par les compacts K_1 et K_2 ; si $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$ -convexe, alors Ψ est portable par $K_1 \cap K_2$.

DÉMONSTRATION. - Pour la notion de $\mathcal{F}$ -convexité, où $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes, et pour les résultats de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes que nous utilisons, nous nous référons essentiellement à [7], exposés n° 8, 9, 19. On a le lemme suivant :

LEMME 1. - Sous les hypothèses du théorème 2, une fonction holomorphe au voisinage de $K_1 \cap K_2$ est différence d'une fonction holomorphe au voisinage de K_1 et d'une fonction holomorphe au voisinage de K_2 .

Soit $\mathcal{Q}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $K_1 \cup K_2$; d'après [3] (pages 219-220), il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow H^1(K_1 \cup K_2 ; \mathcal{Q}) \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow 0$$

où $E_2^{1,0}$ est le quotient de $H^0(K_1 \cap K_2 ; \mathcal{Q})$ par le sous-groupe formé des classes de cohomologie qui sont différence de deux classes induites par des classes de cohomologie de K_1 et de K_2 . Mais ([7], exposé 19), $H^1(K_1 \cup K_2 ; \mathcal{Q}) = 0$ puisque $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$ -convexe. Donc $E_2^{1,0} = 0$, ce qui est le lemme.

REMARQUE. - On a facilement plus. Dans $H(K_1 \cap K_2)$, toute suite convergente est l'image par $d : (f_1, f_2) \rightarrow (f_1 - f_2)$ d'une suite convergente de $H(K_1) \times H(K_2)$.

Soit maintenant Ψ_1 (resp. Ψ_2) un prolongement par continuité de Ψ à $H(K_1)$ (resp. à $H(K_2)$). Si $f \in H(K_1 \cap K_2)$, nous définissons $\Psi(f)$ par

$\Psi(f) = \Psi_1(f_1) - \Psi_2(f_2)$ où $f_1 \in H(K_1)$, $f_2 \in H(K_2)$, $f_1 - f_2 = f$ au voisinage de $K_1 \cap K_2$. Cette définition est cohérente. En effet, si on a $f = g_1 - g_2$, alors :

$$\Psi_1(f_1) - \Psi_2(f_2) - \Psi_1(g_1) + \Psi_2(g_2) = \Psi_1(f_1 - g_1) - \Psi_2(f_2 - g_2)$$

et

$$(f_1 - g_1) - (f_2 - g_2) = 0$$

dans $H(K_1 \cap K_2)$; il reste à montrer que si h_1 et h_2 sont tels que $h_1 - h_2 = 0$ dans $H(K_1 \cap K_2)$ on a :

$$\Psi_1(h_1) - \Psi_2(h_2) = 0.$$

Mais h_1 et h_2 définissent par recollement une fonction h de $H(K_1 \cup K_2)$ et comme $K_1 \cup K_2$ est $H(V)$ -convexe, $H(V)$ est dense dans $H(K_1 \cup K_2)$ ([7] (exposé 19)). Donc il existe une suite ℓ_i de fonctions de $H(V)$ telle que $\ell_i \rightarrow h$ dans $H(K_1 \cup K_2)$. Alors $\ell_i \rightarrow h_1$ dans $H(K_1)$ et $\ell_i \rightarrow h_2$ dans $H(K_2)$, d'où :

$$\Psi_1(h_1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Psi(\ell_i) = \Psi_2(h_2).$$

$H(K_1 \cap K_2)$ est bornologique, aussi pour vérifier la continuité de Ψ , il suffit de la vérifier avec des suites, ce qui se fait avec la remarque suivant le lemme et termine la démonstration.

Soit E_R un espace vectoriel réel, et E_C son complexifié. Nous dirons d'un compact de E_C qu'il est réel s'il est inclus dans E_R . $\mathcal{P}_R$ va désigner la famille des compacts réels.

COROLLAIRE 1. - Si Ψ est portable par un compact réel, Ψ admet un seul $\mathcal{P}_R$ -support. (Nous appellerons ce $\mathcal{P}_R$ -support le support réel de Ψ).

DÉMONSTRATION. - Ψ admet des $\mathcal{P}_R$ -supports. Soient K_1 et K_2 deux tels $\mathcal{P}_R$ -supports. Si nous montrons que Ψ est portable par $K_1 \cap K_2$ nous aurons montré que $K_1 = K_1 \cap K_2 = K_2$. Pour cela, nous appliquerons le théorème 2, grâce au lemme 3 qui va suivre.

LEMME 2. - Tout compact convexe est polynomialement convexe.

Il résulte, par exemple de [2], que si F est un hyperplan complexe de E , et si Ω est l'ouvert étoilé maximal par rapport à un point $\omega \notin F$, ne contenant pas F , Ω est un ouvert de Runge (approximation par les polynômes).

En conséquence, pour montrer qu'un compact étoilé est polynomialement convexe, il suffira de montrer que par tout point extérieur à ce compact, on peut faire passer un hyperplan complexe ne le rencontrant pas. Si K_3 est un compact convexe, et si $z_0 \notin K_3$, il existe un hyperplan réel passant par z_0 et ne rencontrant pas K_3 , et cet hyperplan contient un hyperplan complexe ; le lemme 2 est démontré.

LEMME 3. - Tout compact réel est polynomialement convexe.

DÉMONSTRATION. - Soit K_4 un compact réel. Si $z_0 \notin E_R$, alors z_0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de K_4 , donc d'après le lemme 2, il existe un polynôme $P(z)$ tel que $|P(z_0)| > \sup_{z \in K_4} |P(z)|$. Si $z_0 \in E_R$, $z_0 \notin K_4$, il existe une fonction continue f qui vaut 1 en z_0 et 0 sur K_4 . Le théorème d'approximation de Weierstrass assure qu'il existe un polynôme Q tel que

$$|Q - f| < \frac{1}{2} \quad \text{sur } K_4 \cup \{z_0\},$$

donc

$$|Q(z_0)| > \sup_{z \in K_4} |Q(z)|.$$

Le lemme 3 est démontré.

Soit $E_R = \mathbb{R}^n$, alors $E_C = \mathbb{C}^n$. Nous dirons qu'un compact K_0 du corps des complexes C est R -saturé si : $(K_0 \cap R) \supset (\text{projection sur } R \text{ de } K_0)$. Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, nous noterons sa projection sur la i -ième composante réelle par $\text{pr}_i K$.

LEMME 4. - Soit K un compact convexe de $\mathbb{C}^n$ produit de compacts K_i R -saturés
 L un compact réel de $\mathbb{C}^n$ produit de segments L_i , tels que $L_i \supset [\text{pr}_i K]$,
alors $K \cup L$ est polynomialement convexe.

DÉMONSTRATION. - Si $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \notin K \cup L$, alors z_0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $K \cup L$. On peut donc appliquer le lemme 2. Soit $z_0 \notin \mathbb{R}^n$, $z_0 \notin K \cup L$. Il existe un indice ℓ tel que $z_{0,\ell} \notin K_\ell$ et un indice k tel que $z_{0,k} \notin L_k$. Si $z_{0,\ell}$ n'est pas réel, l'hyperplan d'équation $z_\ell - z_{0,\ell} = 0$ ne rencontre pas $K \cup L$. Si $z_{0,\ell}$ est réel, on considère l'hyperplan F d'équation

$$a(z_k - z_{0,k}) + b(z_\ell - z_{0,\ell}) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Soit, en équations réelles,

$$(F) \begin{cases} a(x_k - x_{0,k}) + b(x_\ell - x_{0,\ell}) = 0 \\ a(y_k - y_{0,k}) + b(y_\ell - y_{0,\ell}) = 0 \end{cases} \quad (z_h = x_h + iy_h) .$$

Les points réels de F satisfont à $-ay_{0,k} = 0$. Donc, comme le cas ($y_{0,k} = 0$ pour tout k) a été éliminé, nous pouvons supposer $y_{0,k} \neq 0$, et F n'a pas de points réels si $a \neq 0$. On peut maintenant choisir a et b en sorte que $a \neq 0$, et que la droite d'équation $a(x_k - x_{0,k}) + b(x_\ell - x_{0,\ell}) = 0$ ne rencontre pas le convexe $M = (\text{pr}K) \times (\text{pr}_\ell K)$ dans le plan des (x_k, x_ℓ) , car K_k et K_ℓ étant R -saturés ${}^k(x_{0,k}, x_{0,\ell}) \notin M$. Enfin $K \cup L$ est étoilé par rapport à tout point de $K \cap L$.

Soit $\mathcal{P}_\delta$ la famille des polydisques centrés dans R^n .

COROLLAIRE 2. - Soit ψ une fonctionnelle analytique définie sur C^n , portable par un compact réel. Alors ψ a un plus petit $\mathcal{P}_\delta$ -support : sa trace sur R^n est le plus petit pavé contenant le support réel de ψ .

DÉMONSTRATION. - Si ψ a un support réel, alors ψ est portable par un produit L de segments choisis assez grands. Si K est un $\mathcal{P}_\delta$ -support de ψ , $K \cup L$ est polynomialement convexe d'après le lemme 4, donc ψ est portable par $K \cap L = K \cap R^n$. $K \cap R^n$ contient donc le support réel de ψ , donc aussi le plus petit pavé P contenant ce support. Mais le compact de $\mathcal{P}_\delta$ de trace P sur R^n peut porter ψ . Donc il est identique à K ,

C. Q. F. D.

Ce corollaire admet la conséquence suivante :

THÉOREME 3. - Soit ψ définie sur C^n portable par une suite décroissante de bandes d'intersection R^n , alors ψ admet un support réel.

DÉMONSTRATION. - Nous désignons par bande un ensemble ouvert défini par des inégalités $|y_e| < a_e$ ($e = 1, 2, \dots, n$), $0 < a_e < +\infty$. Par hypothèse, ψ est portable par une bande B_0 définie par $(|y_e| < a_{0,e}, a_{0,e} < +\infty, (e = 1, 2, \dots, n))$.

Considérons l'application analytique I de C^n dans C^n définie par (les nouvelles variables sont notées par w) :

$$w_e = \text{th} \left(\frac{\pi i}{4a_{0,e}} z_e \right) \quad (e = 1, 2, \dots, n) .$$

Elle transforme la bande B_0 dans le polydisque $|w_1| < 1, \dots, |w_n| < 1$. Si B_n est une suite de bandes $\dots \subset B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_0$, $\bigcap_i B_i = R^n$, alors $\overline{I(B_n)} = \beta_n$ est un compact dans $\overline{I(B_0)}$ et $\bigcap_n \beta_n = K_0$ où K_0 est défini par $|Rw_1| \leq 1, \dots, |Rw_n| \leq 1$, $\text{Im } w_1 = \dots = \text{Im } w_n = 0$. Donc $I(\psi)$ est portable dans l'espace des w par le compact réel K_0 , mais aussi $I(\psi)$ est portable par un produit de disques $|w_e| \leq r < 1$ ($e = 1, 2, \dots, n$) par hypothèse, donc d'après le corollaire 2, $I(\psi)$ est portable par le compact réel $\text{Im } w_1 = \dots = \text{Im } w_n = 0$

$$|Rw_1| \leq r < 1, \dots, |Rw_n| \leq r < 1,$$

donc ψ par l'image réciproque, dans B_0 , de ce compact réel,

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHNKE (H.). - Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]; p. 81-96. - Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [2] BOAS (Ralph Philip). - Entire functions. - New York, Academic Press, 1954 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks; 5).
- [3] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).
- [4] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc., 16).
- [5] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 274-355 (Thèse Sc. math. Paris, 1955).
- [6] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141.
- [7] Séminaire Cartan, t. 4, 1951/52 : Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. - Paris, École Normale Supérieure (multigraphié).