Martin Zerner

Inégalités du type Harnack

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A16_0>

1er mars 1960

INÉGALITÉS DU TYPE HARNACK

par Martin ZERNER

Les travaux de LANDIS sur les opérateurs elliptiques du second ordre conduisent à des résultats d'unicité moins intéressants, semble-t-il, que ceux de CALDERÓN en ce qui concerne l'unicité usuelle et ceux de CORDES ([3]) et ARONSZAJN ([1]) en ce qui concerne l'unicité forte. Par contre LANDIS passe au cas des équations paraboliques et, pour les opérateurs elliptiques, obtient des sous-produits intéressants : principe de Phragmèn-Lindelöf, limitations de décroissance, rapport entre croissance et nombre des changements de signe. Un inconvénient majeur est que ses résultats sont publiés dans deux notes aux Doklady ([5] et [6]) avec des démonstrations très schématiques. Seul le cas de deux variables a fait l'objet d'une publication détaillée ([7]). J'ai été incapable de tout éclaircir dans le cas de plusieurs variables.

Dans ce premier exposé, après avoir rappelé le principe du maximum, qui sera d'un usage constant, nous étudierons l'essentiel d'un article de SERRIN ([9]) utilisé par LANDIS dans [7].

Premières conventions.

n est le nombre des variables indépendantes. On applique la convention de sommation.

Principe du maximum (HOPF, [4]).

Soit L_0 l'opérateur, défini sur un domaine G de R^n :

$$u \longrightarrow a^{ij}\, \partial_{ij}\, u + b^i\, \partial_i\, u \qquad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}) \quad .$$

On suppose que les a^{ij} et les b^i sont des fonctions bornées et qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $(\xi_1 , \ldots , \xi_n) \in R^n$:

$$a^{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \lambda \sum_i \xi_i^2 \qquad \text{(ellipticité uniforme)} \quad .$$

Soit u une fonction deux fois continûment différentiable sur G et qui y vérifie :

$$L_0\, u \geqslant 0 \quad .$$

Si alors u atteint un maximum relatif en un point de G, elle est constante.

DÉMONSTRATION. - Elle se fait par l'absurde. Le principe en consiste, admettant que u atteigne un maximum, à construire une fonction non constante v, qui admette également un maximum et qui vérifie l'inégalité stricte. Cela fait, soit y_0 un point où v atteigne son maximum sans être constante au voisinage de y_0. On a :

$$a^{ij}(y_0)\,\partial_{ij}\,v(y_0) > 0$$

donc sur un voisinage de y_0 :

$$a^{ij}(y_0)\,\partial_{ij}\,v(x) \geqslant 0$$

ce qui contredit la théorie des fonctions surharmoniques ordinaires.

Il existe une sphère S_0 portant un point x_1 de G où u atteigne son maximum M et limitant une boule ouverte B_0 contenue dans G sur laquelle $u < M$. Soit S une sphère de rayon r tangente intérieurement en x_1 à S_0, B sera la boule ouverte limitée par S (dans la suite, nous emploierons cette notation systématiquement). Enfin soit S_1 une sphère de centre x_1 et de rayon $< r$, telle que $\overline{B_1}$ soit contenue dans G. Nous poserons :

$$S_i = S_1 \cap \bar{B}\ ; \qquad S_1 = S_i \cup S_e\ ; \qquad S_i \cap S_e = \emptyset$$

et, prenant le centre de S comme origine des coordonnées :

$$h(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r^2}$$

où α est une constante choisie assez grande pour que :

$$L_0\,h > 0 \qquad \text{dans } \overline{B_1} \qquad ,$$

ce qui est possible grâce à l'ellipticité uniforme.

Comme $u < M$ sur le compact S_i, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u \leq M - \varepsilon$ sur S_i. Si alors η est assez petit pour que, toujours sur S_i, $\eta h < \varepsilon$, en posant :

$$v = u + \eta h$$

on vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} &L_0\,v > 0 && \text{dans } B_1 \\ &v < M && \text{sur } S_1 \\ &v(x_1) = M && . \end{aligned}$$

v a donc un maximum dans B_1, c'est la fonction cherchée.

COROLLAIRE. - Si c est une fonction non positive et u vérifie :

$$L_0 u + cu = 0 \quad ,$$

u ne peut avoir sans être constante ni maximum positif, ni minimum négatif.

REMARQUE. - Le raisonnement ci-dessus a été légèrement généralisé par CALABI ([2]) et appliqué par NIRENBERG ([8]) aux opérateurs paraboliques.

Nouvelles conventions.

Nous allons étudier un opérateur L défini par :

$$L = a^{ij}\, \partial_{ij} + b^i\, \partial_i + c \quad ,$$

et satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a. Tous les coefficients sont des fonctions bornées.

b. Il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout ξ :

$$\lambda^{-1} \sum \xi_i^2 \geqslant a^{ij}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant \lambda \sum \xi_i^2 \quad .$$

c. Les coefficients a^{ij} des termes du second ordre satisfont à une condition de Dini :

$$|a^{ij}(x) - a^{ij}(y)| \leq \varphi(|x - y|)$$

où φ est une fonction croissante et continue telle que $\frac{\varphi(s)}{s}$ soit sommable au voisinage de $s = 0$. (Le cas le plus courant en étant bien entendu celui d'une condition de Hölder).

d. $c \leqslant 0$.

Par la suite, un nombre aura droit au titre de constante s'il ne dépend pas d'autre chose que de la dimension n, de λ, de la borne supérieure des modules des coefficients de L et de $\int_0^b \frac{\varphi(s)}{s}\, ds$, b étant un nombre positif fixé une fois pour toutes, mais au demeurant arbitraire.

THÉORÈME (SERRIN). - Soit a un nombre compris entre 0 et 1. Appelons S une sphère de rayon a et de centre x_0, $d\sigma$ son élément de surface, B la boule ouverte qu'elle limite. Il existe deux fonctions $K_+(x, y)$, $K_-(x, y)$ définies sur $B \times S$, deux fois continûment différentiables en x et continues en y satisfaisant aux conditions suivantes :

i. $L_x K_+ \geqslant 0$, $\quad L_x K_- \leqslant 0$.

ii. Pour toute fonction ψ continue sur S et tout $y \in S$:

$$\int_S K_{\pm}(x, z)\, \psi(z)\, d\sigma(z) \xrightarrow[x \to y]{} \psi(y)$$

(uniformément en y).

iii. Il existe deux constantes strictement positives α , β telles que si $|x - x_0| \leq a/2$:

$$K_+(x , y) \geq \alpha a^{1-n} , \qquad K_-(x , y) \leq \beta a^{1-n} .$$

DÉMONSTRATION.

a. Nous construirons K_+ en l'appelant plus simplement K . La construction de K_- est tout à fait analogue. De plus, nous nous placerons dans le cas $a = 1$ auquel on peut se ramener par une homothétie sans changer les a^{ij} et en diminuant les autres coefficients (un contre-exemple relatif au prochain exposé nous montrera qu'il est indispensable de fixer une borne supérieure à a). Bien entendu, le coefficient a^{1-n} de (iii) est éliminé en remplaçant $d\sigma$ par la mesure invariante de masse totale 1 sur S .

b. Nous construisons maintenant une fonction $k(x , y)$ qui tende vers zéro quand x s'approche d'un point de S différent de y et qui au voisinage de y soit équivalente au noyau de Poisson relatif au Laplacien défini par les $a^{ij}(y)$ (considérés comme des coefficients constants).

A cet effet, appelons a_{ij} les coefficients de la matrice contragrédiente à celle des a^{ij} . Remarquons en passant que la nouvelle matrice satisfait encore à l'inégalité (b) des conventions. Posons :

$$r^2 = a_{ij}(y)(x^i - y^i)(x^j - y^j)$$

$$U_1 = 2(x_0 - y|x - y)\ r^{-n} .$$

Par la suite y sera considéré comme fixé : toutes les dérivations s'entendent par rapport à x . Pour $n > 2$, on peut écrire :

$$U_1 = \alpha^i(y)\ \partial_i(r^{2-n})$$

d'où

(1) $$a^{ij}(y)\ \partial_{ij}\ U_1 = 0$$

égalité qui se vérifie également pour $n = 2$.

U_1 a les propriétés de croissance voulues près de y mais ne tend pas vers zéro quand x s'approche d'un autre point de S . On pose donc encore :

$$U_2 = |x - y|^2\ r^{-n}$$

$$k = U_1 - U_2 .$$

Si alors f est une fonction continue de la variable réelle vérifiant :

$$(2) \qquad f(0) = 0 \ , \qquad \frac{f(s)}{s} \xrightarrow[s \to \infty]{} 1$$

on pourra trouver une fonction continue positive sur S , $\rho(y)$ telle que :

$$F = \rho(y)\, f(k)$$

vérifie (ii).

c. Il s'agit maintenant de vérifier (i). On trouve en tenant compte de $f(0) = 0$:

$$[\rho(y)]^{-1}\, LF = f''(k)\, a^{ij}\, \partial_i k\, \partial_j\, k - c \int_0^k sf''(s)\, ds + f'(k)\, Lk \quad .$$

Les deux premières expressions sont positives si f'' reste positive. Nous allons donc majorer par une fonction de k seul l'expression :

$$A = (a^{ij}\, \partial_i k\, \partial_j\, k)^{-1}\, Lk \quad .$$

Il vient sans difficulté :

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} k \leqslant C_1 |x - y|^{1-n} \\ |k'| \leqslant C_1 |x - y|^{-n} \\ |\partial_{ij}\, U_1| \leqslant C_1 |x - y|^{-n-1} \\ |\partial_{ij}\, U_2| \leqslant C_1 |x - y|^{-n} \end{array}\right\} \quad .$$

Les termes les plus déplaisants sont donc les $\partial_{ij}\, U_1$, mais, d'après (1) :

$$a^{ij}(x)\, \partial_{ij}\, U_1 = [a^{ij}(x) - a^{ij}(y)]\, \partial_{ij}\, U_1$$

$$|a^{ij}\, \partial_{ij}\, U_1| \leqslant C_1\, n^2\, \varphi(|x - y|)\, |x - y|^{-n-1} \quad .$$

Il faut encore minorer $a^{ij}\, \partial_i k\, \partial_j\, k$ ou, ce qui revient au même $|k'|^2$. En dérivant parallèlement à $y - x$ puis $x_0 - x$ et comparant les résultats, on trouve :

$$|k'| \geqslant C_2 |x - y|^{-n}$$

d'ou l'on conclut :

$$|A| \leqslant C_3 [\varphi(|x - y|)\, |x - y|^{n-1} + |x - y|^n] \quad .$$

Il faut maintenant exprimer ce résultat en k . La première inégalité (3) invite à poser :

$$s = \left(\frac{C_1}{k}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

fonction qui majore $|x - y|$. Comme nous ne nous intéressons qu'à des points où $|x - y| < 2$, nous avons :

$$|A| \leq g(s)$$

en posant :

$$g(s) = C_3[\varphi(s)\ s^{n-1} + s^n] \qquad \text{pour} \quad s \leq 2$$
$$g(s) = C_3[\varphi(2)\ 2^{n-1} + 2^n] \qquad \text{pour} \quad s \geq 2 \quad .$$

d. Des raisonnements tout à fait élémentaires montrent qu'il existe une solution de l'équation :

$$f''(k) = g(s)\ f'(k)$$

vérifiant les conditions (1), que cette solution vérifie aussi $f''(k) \geq 0$ et enfin que K, tel qu'il a été construit à la fin de (b) vérifie la condition (iii) si on y prend pour f la dite solution.

REMARQUE. - Nous n'avons utilisé la condition de Dini qu'au voisinage de S.

COROLLAIRE. (Inégalité de Harnack). - Soit u une fonction positive, deux fois continuement différentiable sur B et continue sur $\bar{B}$ vérifiant sur B :

$$Lu = 0 \quad .$$

Il existe une constante positive C telle que pour $|x_1 - x_0| \leq a/2$ et $|x_2 - x_0| \leq a/2$:

$$u(x_1) \leq Cu(x_2) \quad .$$

La démonstration est calquée sur celle du cas classique, K_+ et K_- jouant à eux deux le rôle du noyau de Poisson.

Pour $n = 2$, SERRIN donne une démonstration directe qui ne fait pas intervenir de condition de continuité des coefficients, il suffit de les supposer bornés.

L'inégalité de Harnack entraîne à son tour une série de conséquences : on l'étend d'abord aux couples de points d'un compact contenu dans un domaine où u est positive. On en déduit alors le théorème de convergence de Harnack, un théorème de Liouville lorsque $b^i = c = 0$, etc. Enfin, dans un article faisant suite à [9], GILBARG et SERRIN l'emploient à l'étude des points singuliers isolés apparents ("removable").

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.). - A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 235-249.

[2] CALABI (Eugenio). - An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry, Duke math. J., t. 25, 1958, p. 45-56.

[3] CORDES (Heinz Otto). - Über die eindeutige Bestimtheit den Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, t. 11, 1956, p. 239-258.

[4] HOPF (H.). - Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischen Typus, Sitz. preuss. Akad. Wiss., t. 19, 1927, p. 147-152.

[5] LANDIS (E. M.). - O principe fragmena lindelöfa dlja rešeny elliptičeskikh uranenij, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 107, 1956, p. 508-511.

[6] LANDIS (E. M.). - O nekotorykh svojstvakh rešenij elliptićeskikh uranenij, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 107, 1956, p. 640-643.

[7] LANDIS (E. M.). - Nekotorye voprosy kačestvennoj teorii elliptičeskikh i paraboličeskikh uravnenij, Uspekhi Mat. Nauk, N. S., t. 14, 1959, p. 21-85.

[8] NIRENBERG (L.). - A strong maximum principle for parabolic equations, J. of Math. pure and appl., t. 6, 1953, p. 167-177.

[9] SERRIN (James). - On the Harnack inequality for linear elliptic equations, J. Anal. math. Jérusalem, t. 4, 1954-1956, p. 292-308.