

SÉMINAIRE SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Effet d'une transformation de Laplace inverse sur G_{p^2}

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 3, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A3_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

11 mai 1956

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Exposé n° 3

Année 1955/56

-:-:-:-

EFFET D'UNE TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE SUR G_{p^2}

par Laurent SCHWARTZ

-:-:-:-

$p \longrightarrow G_{p^2}$ fonction holomorphe de la variable complexe p , pour $\Re_p > 0$; $G_{p^2} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)^{(1)}$, $\|G_{p^2}\| \leq A|p|$ pour $\Im = \Re_p \geq \varepsilon > 0$; G_{p^2} est la transformée de Laplace d'une distribution : $G(\hat{t})$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ (voir propriété de majoration), à support dans $(0, +\infty)$.

On a d'autre part, si J est l'injection canonique de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}'_1$, et si I (resp. I') est l'opérateur identique de $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}'_1$) :

$$1^\circ) \quad G_{p^2}(p^2 J - \Delta) = I$$

$$\begin{aligned} G_{p^2} & \text{ est à valeurs dans } \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1) \\ p^2 J - \Delta & \text{ est à valeurs dans } \mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1) \end{aligned}$$

d'où

$$G_{p^2}(p^2 J - \Delta) \text{ est à valeurs dans } \mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_1).$$

Effectuons une transformation de Laplace inverse ; elle transforme la multiplication en convolution ; il vient :

$$G(\hat{t}) \supset G_{p^2}$$

$$G(\hat{t}) * (J \otimes \delta''(\hat{t}) - \Delta \otimes \delta(\hat{t})) = I \otimes \delta(\hat{t})$$

où

$$\begin{aligned} G(\hat{t}) & \in \mathcal{D}'_t + (\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)) \\ \left\{ \begin{array}{l} J \text{ injection de } \mathcal{D}_1 \text{ dans } \mathcal{D}'_1 \\ J \otimes \delta''(\hat{t}) \in \mathcal{D}'_t + (\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)) \\ \Delta \otimes \delta(\hat{t}) \in \mathcal{D}'_t + (\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)) \\ I \text{ opérateur identique de } \mathcal{D}_1 \text{ dans } \mathcal{D}_1. \end{array} \right. \end{aligned}$$

(1) Nous abrégons : $\mathcal{D}_1$ veut dire $\mathcal{D}_{L^2}^1(\Omega)$, $\mathcal{D}'_1$ veut dire $\mathcal{D}_{L^2}^{'1}(\Omega)$.

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G \circ J - G \circ \Delta = I \times \delta(\hat{t})$$

Ce sont des distributions en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1; \mathcal{D}_1)$.

Cela revient à dire que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$,

$$G(\varphi'') \circ J - G(\varphi) \circ \Delta = \varphi(0) I,$$

relation entre opérateurs de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_1$ (avec $G(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_1'; \mathcal{D}_1)$, $G(\varphi'') \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_1'; \mathcal{D}_1)$).

$$2^\circ) \quad (p^2 J - \Delta) G_{p^2} = I$$

relation qui donne :

$$J \circ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta \circ G = I' \otimes \delta(t)$$

I' opérateur identique de $\mathcal{D}_1'$ dans $\mathcal{D}_1'$ ce qui signifie que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$:

$$J \circ G(\varphi'') - \Delta \circ G(\varphi) = I' \varphi(0).$$

On notera symboliquement : $\square = J \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$; c'est un opérateur

différentiel en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1; \mathcal{D}_1')$ puisque ses coefficients sont éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1; \mathcal{D}_1')$

on a donc :

$$\begin{cases} G \square = I \delta \\ \square G = I' \delta \end{cases}$$
