

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Le produit tensoriel $E \hat{\otimes} F$ comme espace d'applications linéaire

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 8, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A9_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 8LE PRODUIT TENSORIEL $E \hat{\otimes} F$ COMME ESPACE D'APPLICATIONS LINÉAIRE.

L'ESPACE $\mathcal{L}_E(F'_\tau; E)$.

On sait qu'il y a un isomorphisme algébrique entre l'espace $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$ des formes bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, et l'espace $\mathcal{L}(F'_\sigma; E_\sigma)$ des applications linéaires faiblement continues de F' dans E (cet isomorphisme met en correspondance la forme bilinéaire $(x', y') \rightarrow \langle x', \bar{\Phi}(y') \rangle$ et l'application linéaire $\bar{\Phi}$ de F' dans E). Toute application linéaire continue de F'_σ dans E_σ est continue de F'_τ dans E_τ , donc a fortiori de F'_τ dans E muni de sa topologie initiale, moins fine que τ ; réciproquement toute application linéaire continue de F'_τ dans E est continue pour les topologies affaiblies, donc de F'_σ dans E_σ . On peut donc remplacer $\mathcal{L}(F'_\sigma; E_\sigma)$ par $\mathcal{L}(F'_\tau; E)$.

La correspondance établie entre $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$ et $\mathcal{L}(F'_\tau; E)$ transpose la topologie $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$ de la convergence uniforme sur les produits $A' \times B'$ de $E' \times F'$, A' (resp. B') partie équicontinue de E' (resp. F'), sur la topologie $\mathcal{L}_E(F'_\tau; E)$ de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F' (parce que la topologie de E n'est autre que la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'). Le fait que la topologie $\mathcal{E}$ soit une topologie d'espace vectoriel sur

$\mathcal{L}(F'_\tau; E)$ vient de ce que toute partie équicontinue de F' est fortement bornée donc τ -bornée (sur un dual F' , la topologie forte est plus fine que τ). Donc :

PROPOSITION 1.

$$\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma) \approx \mathcal{L}_E(F'_\tau; E) \approx \mathcal{L}_E(E'_\tau; F).$$

PROPOSITION 2.

Les espaces précédents sont complets si E et F sont complets.

Soit en effet $\mathcal{F}'$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$. Pour $x' \in E'$, $y' \in F'$ fixés, il donne un filtre de Cauchy sur le corps des scalaires, donc convergent vers un scalaire, soit $B_0(x', y')$. B_0 est évidemment une forme

bilinéaire sur $E' \times F'$. Montrons qu'elle est séparément faiblement continue. Fixons y' , il faut montrer que $x' \rightarrow B_0(x', y')$ est faiblement continue. Mais pour $B \in \mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$, on a $B(x', y') = \langle x', \bar{\Phi}(y') \rangle$, $\bar{\Phi} \in \mathcal{L}(F'_\sigma; E_\sigma)$. Pour y' fixé, l'image de $\mathcal{F}$ par $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi}(y')$ est un filtre de Cauchy dans E , donc, E étant complet, $\bar{\Phi}(y')$ converge suivant $\mathcal{F}$ vers $\bar{\Phi}_0(y') \in E$. Alors $B_0(x', y') = \langle x', \bar{\Phi}_0(y') \rangle$ donc B_0 est bien faiblement continue en x' , pour y' fixé. Le même raisonnement appliqué à ${}^t\bar{\Phi}$, utilisant le fait que F est complet, montre la continuité séparée en y' ; donc $B_0 \in \mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$. Comme enfin B converge vers B_0 uniformément sur tout produit de parties équicontinues de E' et F' , $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$ est bien complet.

PROPOSITION 3.

Si E et F sont complets, $E \hat{\otimes} F$ est un sous-espace vectoriel topologique des espaces isomorphes de la proposition 1.

Nous avons vu (exposé n° 7) que $E \otimes_\varepsilon F$ est un sous-espace de $\mathcal{L}_E(E'_\sigma, F'_\sigma)$. Son interprétation comme sous-espace de $\mathcal{L}_E(F'_\sigma; E)$ est la suivante: à tout élément $\sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu$ de $E \otimes F$, on fait correspondre l'application linéaire $\bar{\Phi} : y' \rightarrow \sum_\nu \langle y', y_\nu \rangle x_\nu$ de F' dans E . Cette application est faiblement continue (et même continue de F'_σ dans E muni de sa topologie initiale) et de rang fini. Réciproquement, soit $\bar{\Phi}$ une application linéaire faiblement continue de rang fini de F' dans E . $\bar{\Phi}(F')$ a une dimension finie, soit (x_ν) une base de ce sous-espace; on a $\bar{\Phi}(y') = \sum_\nu \bar{\Phi}_\nu(y') x_\nu$, avec $\bar{\Phi}_\nu(y') = \langle x'_\nu, \bar{\Phi}(y') \rangle$, (x'_ν) étant un système biorthogonal au système (x_ν) ; comme $\bar{\Phi}$ est faiblement continue, $\bar{\Phi}_\nu$ est une forme linéaire faiblement continue sur F' , donc il existe $y_\nu = {}^t\bar{\Phi}(x'_\nu) \in F$ tel que $\bar{\Phi}_\nu(y') = \langle y_\nu, y' \rangle$, alors $\bar{\Phi}$ est définie par $\sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu \in E \otimes F$.

Donc $E \otimes_\varepsilon F$ est le sous-espace topologique de $\mathcal{L}_E(F'_\sigma; E)$ constitué par les applications linéaires faiblement continues de rang fini; comme $\mathcal{L}_E(F'_\sigma; E)$ est complet si E et F sont complets, $E \hat{\otimes} F$ est bien un sous-espace de $\mathcal{L}_E(F'_\sigma; E)$.

UN NOUVEL ESPACE D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

PROPOSITION 4.

Soit $\bar{\Phi}$ une application linéaire faiblement continue de F' dans E , ${}^t\bar{\Phi}$ sa transposée, application linéaire faiblement continue de E' dans F .

Les 8 propriétés suivantes sont équivalentes :

-a) L'image par $\bar{\Phi}$ de toute partie équicontinue de F' est relativement

compacte dans E ;

-a') L'image par ${}^t\bar{\Phi}$ de toute partie équicontinue de E' est relativement compacte dans F ;

-b) Restreinte à une partie équicontinue de F' , $\bar{\Phi}$ est continue pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E ;

-b') Restreinte à une partie équicontinue de E' , ${}^t\bar{\Phi}$ est continue pour la topologie faible de E' et la topologie initiale de F ;

-c) $\bar{\Phi}$ est continue de F'_0 (F' muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de F) dans E ;

-c') ${}^t\bar{\Phi}$ est continue de E'_0 dans F ;

-d) La forme bilinéaire $B : (x', y') \rightarrow \langle x', \bar{\Phi}(y') \rangle = \langle {}^t\bar{\Phi}(x'), y' \rangle$ est continue sur tout produit de parties équicontinues de E' et F' muni du produit des topologies faibles ;

-e) La forme bilinéaire précédente est hypocontinue sur $E'_0 \times F'_0$, relativement aux parties équicontinues de E' et F' .

DÉMONSTRATION.

Sur une partie relativement compacte de E , topologie initiale et topologie faible sont identiques ; donc si l'image par $\bar{\Phi}$ d'une partie de F' est relativement compacte dans E , comme $\bar{\Phi}$ est faiblement continue, elle est continue sur la partie considérée de F' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E ; donc $a \rightarrow b$. Réciproquement, si $\bar{\Phi}$ est continue sur toute partie équicontinue de F' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E , l'image par $\bar{\Phi}$ de toute partie équicontinue faiblement compacte de F' est compacte dans E ; comme l'adhérence faible de toute partie équicontinue de F' est faiblement compacte, l'image par $\bar{\Phi}$ de toute partie équicontinue de F' est relativement compacte dans E , et $b \rightarrow a$. Donc $a \leftrightarrow b$, et, par raison de symétrie, $a' \leftrightarrow b'$.

Supposons b) . Cela veut dire que, pour x' fixé, la forme bilinéaire B est faiblement continue en y' , pour $y' \in B'$, partie équicontinue de F' , et uniformément lorsque x' parcourt une partie équicontinue A' de E' ; mais elle est aussi, pour y' fixé, faiblement continue en x' , elle est donc continue sur $A' \times B'$ muni du produit des topologies faibles, et $b \rightarrow d$. Réciproquement, supposons d) . Une fonction continue de 2 variables est séparément continue par rapport à chacune d'elles, uniformément lorsque l'autre décrit un compact ; comme on peut toujours, ainsi qu'il a été vu précédemment, supposer A' faiblement compacte, d) entraîne que B soit continue en y' sur B' muni de la topologie faible, uniformément lorsque x' parcourt A' ,

donc $\bar{\Phi}$ est continue sur B' pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E , et $d \rightarrow b$. Finalement $a \leftrightarrow b \leftrightarrow d$, mais comme $d)$ est symétrique relativement à $\bar{\Phi}$ et ${}^t\bar{\Phi}$, $a' \leftrightarrow b' \leftrightarrow d$, et $a \leftrightarrow a' \leftrightarrow b \leftrightarrow b' \leftrightarrow d$. Montrons maintenant que $a \rightarrow c'$. Soient G, G', H, H' , 2 couples d'espace en dualité, $\bar{\Phi}$ une application linéaire faiblement continue de G dans H , ${}^t\bar{\Phi}$ sa transposée. Si Λ est une partie quelconque de G , on a $(\bar{\Phi}(\Lambda))^0 = {}^t\bar{\Phi}^{-1}(\Lambda^0)$; prenons $G = F'$, $H = E$, $\Lambda =$ partie équicontinue convexe faiblement compacte de F' . Alors Λ^0 est un voisinage de 0 convexe équilibré fermé arbitraire de F ; ${}^t\bar{\Phi}^{-1}(\Lambda^0)$ son image réciproque par ${}^t\bar{\Phi}$, dans E' . Si on a $a)$, $\bar{\Phi}(\Lambda)$ est partie convexe compacte de E , et $(\bar{\Phi}(\Lambda))^0$ un voisinage de 0 de E'_0 ; ainsi l'image réciproque par ${}^t\bar{\Phi}$ de tout voisinage de 0 de F est un voisinage de 0 de E'_0 , donc $a \rightarrow c'$. On en déduit naturellement que $a' \rightarrow c$, autrement dit les conditions équivalentes a, a', b, b', d entraînent c et c' .

Montrons alors que $c \rightarrow a$. Si $\bar{\Phi}$ est continue de F'_0 dans E , l'image par $\bar{\Phi}$ de toute partie compacte de F'_0 est compacte dans E . Mais d'après le théorème d'Ascoli toute partie équicontinue faiblement fermée de F' est compacte dans F'_0 ; donc son image est compacte dans E et $c \rightarrow a$. Alors $a \leftrightarrow c$, de même $a' \leftrightarrow c'$, et les 7 conditions a, a', b, b', c, c', d sont équivalentes.

La condition $e)$ exprime que d'une part si y' converge vers 0 dans F'_0 , $\langle x', \bar{\Phi}(y') \rangle$ converge vers 0 uniformément lorsque x' reste équicontinue, autrement dit $\bar{\Phi}(y')$ converge vers 0 dans E , c'est-à-dire que $\bar{\Phi}$ est continue de F'_0 dans E ; d'autre part que ${}^t\bar{\Phi}$ est continue de E'_0 dans F . La condition $e)$ n'est autre par conséquent que l'ensemble des conditions c et c' , donc e est encore équivalente aux 7 autres conditions précédentes.

REMARQUE.

Si $\bar{\Phi}$ est une application linéaire continue de F'_0 dans E , elle est continue pour les topologies affaiblies. Mais F'_0 a une topologie comprise entre F'_σ et F'_τ , donc le dual de F'_0 est F , et par suite la topologie affaiblie de F'_0 est F'_σ ; celle de E est E_σ , donc $\bar{\Phi}$ est faiblement continue, et les 8 conditions précédentes sont vérifiées. Les applications $\bar{\Phi}$ qui vérifient ces conditions constituent donc l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ isomorphe à $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_0; F)$.

PROPOSITION 5.

Si E et F sont complets, $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ est complet et $E \hat{\otimes} F$ est un

sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E) \subset \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$.

Comme $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$ est alors complet, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ est fermé dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$, propriété qui est vraie même si E et F ne sont pas complets. Si en effet $\bar{\Phi} \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ converge vers $\bar{\Phi}_0 \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$ les restrictions de $\bar{\Phi}$ aux parties équi continues de F' sont continues pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E (condition b); mais précisément les $\bar{\Phi}$ convergent vers $\bar{\Phi}_0$ uniformément sur les parties équi continues de F' , et, comme une limite uniforme de fonctions continues est continue, $\bar{\Phi}_0$ vérifie aussi b); comme elle est dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$ elle est faiblement continue, donc $\bar{\Phi}_0 \in \mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$, qui est donc bien fermé.

Par ailleurs si $\bar{\Phi} \in E \otimes F$, l'image par $\bar{\Phi}$ d'une partie équi continue de F' est bornée dans $\bar{\Phi}(F')$ qui est de dimension finie, donc relativement compacte, de sorte que $E \otimes F \subset \mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$. Alors si E et F sont complets $E \hat{\otimes} F$ est bien un sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$.

Pour que dans ce cas $E \hat{\otimes} F$ soit identique à $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$, il faut et il suffit que $E \otimes F$ soit dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$, condition qui ne suppose pas E et F complets, et qui est vérifiée dans tous les cas connus.

CAS DES ESPACES NORMÉS.

Soient E et F normés. Alors $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_\infty; E)$ est l'espace des applications linéaires faiblement continues de F' dans E , muni de la norme induite par $\mathcal{L}(F'; E)$. $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ (condition a)) est le sous espace des applications compactes ou complètement continues, c'est-à-dire telles que l'image de la boule unité de F' soit relativement compacte dans E (auquel cas, comme on l'a vu, elle est compacte à cause de la condition b), la boule unité de F' étant faiblement compacte). L'adhérence de $E \otimes_\varepsilon F$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$, qui est $E \hat{\otimes} F$ si E et F sont des espaces de Banach, est donc le sous-espace de $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$ constitué des applications limites, pour la topologie ε définie par la norme de $\mathcal{L}(F'; E)$, des applications linéaires faiblement continues de rang fini. Bien noter que n'interviennent dans tous les cas que des applications faiblement continues. Dans tous les cas connus, $E \otimes F$ est dense dans $\mathcal{L}_\varepsilon(F'_0; E)$, et l'hypothèse suivant laquelle c'est toujours vrai a été émise par Banach.

CAS OÙ E EST UN DUAL.

Nous laissons au lecteur (s'il y en a) le soin de vérifier ce qui suit :

- 1°) $G' \otimes F$ = espace des applications linéaires continues de rang fini de G dans F .

2°) - a) $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_c)'_\tau; F)$ = espace des applications linéaires continues de G_τ dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes convexes de G , donc $= \mathcal{L}_c(G_\tau; F)$; donc $= \mathcal{L}_c(G; F)$ si G a la topologie τ .

- b) $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_c)'_\tau; F)$ est le sous-espace du précédent formé des applications qui transforment toute partie compacte de G en une partie compacte de F ; si G a la topologie τ , $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_c)'_\tau; F) = \mathcal{L}_c(G; F)$.

- c) Si G est bornologique, il a la topologie τ et G'_c est complet. Si en outre F est complet, on a dans tous les cas connus $G'_c \hat{\otimes} F = \mathcal{L}_c(G; F)$.

3°) - a) $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_b)'_\tau; F)$ (en appelant G'_b le dual fort de G , c'est-à-dire muni de la topologie de la convergence bornée) = espace des applications linéaires continues de G'_τ dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de G . Si G ou F est réflexif, c'est donc $\mathcal{L}_b(G_\tau; F)$; si en outre G a la topologie τ , c'est $\mathcal{L}_b(G; F)$. si G et F sont des espaces normés, G ou F réflexif, $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_b)'_\tau; F) = \mathcal{L}(G; F)$ avec sa norme.

- b) $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_b)'_\tau; F)$ = espace de toutes les applications linéaires continues de G_τ dans F qui transforment les parties bornées de G en parties relativement compactes de F .

- c) Si G est bornologique, il a la topologie τ et G'_b est complet; si en outre F est complet, $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_b)'_\tau; F) = \mathcal{L}_b(G, F)$ est complet, $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_b)'_\tau; F)$ est le sous-espace des applications transformant les parties bornées en parties relativement compactes, et $G'_b \hat{\otimes} F$ est le sous-espace des limites d'applications linéaires continues de rang fini.

- d) Si G et F sont des Banach, $\mathcal{L}_\varepsilon((G'_c)'_\tau; F)$ est dans $\mathcal{L}(G; F)$ le sous-espace des applications compactes, ou complètement continues, transforment la boule unité de G en une partie relativement compacte de F (mais non nécessairement compacte; ces applications se prolongent en applications faiblement continues de G'' dans F , transformant la boule unité de G'' en une partie compacte de F); $G' \hat{\otimes} F$ est l'espace des applications linéaires continues quasi-dégénérées de G dans F , limites pour la norme d'applications linéaires continues de rang fini.

NOUVELLE INTERPRÉTATION DU PRODUIT TENSORIEL D'APPLICATIONS LINÉAIRES.

Soient $E_i, F_i, E_i \xrightarrow{v_i} F_i, i = 1, 2$.

Interprétons à nouveau $v_1 \otimes v_2$.

Un élément u de $E_1 \otimes E_2$ est une application linéaire faiblement continue de rang fini de E'_2 dans E_1 . Alors on peut poser

$$(v_1 \otimes v_2) \cdot u = v_1 \circ u \circ {}^t v_2,$$

qui est une application linéaire faiblement continue de rang fini de F'_2 dans F_1 , donc un élément de $F_1 \otimes F_2$. De plus si u converge vers 0 uniformément sur toute partie équicontinue de E'_2 , $(v_1 \otimes v_2) \cdot u$ converge vers 0 uniformément sur toute partie équicontinue de F'_2 , car l'image par ${}^t v_2$ de toute partie équicontinue de F'_2 est une partie équicontinue de E'_2 .

Ce procédé montre que $v_1 \otimes v_2$ est continue de $E_1 \otimes_\varepsilon E_2$ dans $F_1 \otimes_\varepsilon F_2$. Mais il montre de plus que $v_1 \otimes v_2$ applique continuellement $\mathcal{L}_\varepsilon((E'_2)_\gamma; E_1)$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon((F'_2)_\gamma; F_1)$ et $\mathcal{L}_\varepsilon((E'_2)_c; E_1)$ dans $\mathcal{L}_\varepsilon((F'_2)_c; F_1)$.
