

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

N° 1. Rappels sur les espaces L^p

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 3, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A4_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

N° 1 - RAPPELS SUR LES ESPACES L^p .

(Cfr. BOURBAKI, Livre VI, Chap. IV.)

§ 1 - CAS DES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

Pour toute mesure positive dx sur un espace localement compact X , on peut définir le prolongement de dx à l'ensemble des fonctions numériques positives définies dans X : la valeur du prolongement de dx pour une telle fonction est appelée intégrale supérieure de f et notée $\int^* f(x) dx$. Pour une fonction numérique quelconque f définie dans X , on pose

$$N_p(f) = \left(\int^* |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty) ;$$

$N_p(f)$ définit une semi-norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}^p$ des f telles que $N_p(f)$ soit finie. Désignons par C l'ensemble des fonctions numériques continues dans X et à support compact ; C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}^p$ pour tout p fini et supérieur ou égal à 1. On note $\mathcal{L}^p$ l'adhérence de C dans l'espace $\mathcal{F}^p$ muni de la topologie définie par la semi-norme N_p et on appelle fonction de puissance p -ème intégrale tout élément de $\mathcal{L}^p$. Cela signifie que $f \in \mathcal{L}^p$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g dans C telle que $N_p(f - g) \leq \varepsilon$. On désigne par L^p l'espace normé associé à $\mathcal{L}^p$: c'est le quotient de $\mathcal{L}^p$ par le sous-espace des fonctions presque partout nulles. Soulignons que L^p n'est pas un espace de fonctions, mais de classes de fonctions équivalentes modulo la relation $N_p(f - g) = 0$; nous noterons f la classe dont f est un élément.

Pour $p = 1$, rappelons que $\mathcal{L}^1$ est l'espace des fonctions intégrables ; on peut prolonger la mesure dx de C à $\mathcal{L}^1$. Sa valeur pour $f \in \mathcal{L}^1$ est l'intégrale de f proprement dite.

Soit maintenant f une fonction numérique définie dans X . Localement presque partout signifie presque partout sur tout compact et équivaut à presque partout lorsque X est dénombrable à l'infini. On appelle $N_\infty(f)$ la borne inférieure des nombres M tels que $|f(x)| \leq M$ localement presque partout ; et on appelle $\mathcal{L}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions telles que

$N_\infty(f) < +\infty$. $N_\infty(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty$ et ici encore on passe au quotient L^∞ de $\mathcal{L}^\infty$ par le sous-espace des fonctions localement presque partout nulles. L^∞ est un espace normé, dans lequel $\dot{C}$ n'est pas dense.

Pour tout p tel que $1 \leq p \leq \infty$, on démontre que $\mathcal{L}^p$ est complet ; les L^p sont donc des espaces de Banach. L'inégalité de Hölder

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g) \quad \text{pour } q = p/(p-1)$$

permet d'établir que L^q est le dual de L^p ; lorsque $p < \infty$, L^p est alors le dual de L^q . L^∞ est le dual de L^1 , mais la réciproque n'est pas vraie.

§ 2 - CAS DES FONCTIONS VECTORIELLES.

On étend tous les résultats qui précèdent au cas où les fonctions définies dans X sont à valeurs, non plus dans $\mathbb{R}$, mais dans un espace de Banach E . Au lieu de raisonner sur les valeurs absolues des fonctions envisagées, on raisonne sur leurs normes en tant que vecteurs de E .

Ainsi pose-t-on :

$$N_p(\vec{f}) = \left(\int^* \|\vec{f}(x)\|^p dx \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < +\infty)$$

On appelle $C(E)$, $\mathcal{L}^p(E)$ et $L^p(E)$ les espaces correspondants. $\mathcal{L}^\infty(E)$ est l'espace des fonctions mesurables dont la norme dans E est localement presque partout bornée. L'inégalité de Hölder est encore valable et on démontre que les $L^p(E)$ sont complets. Ce sont donc aussi des espaces de Banach.

On peut munir canoniquement le dual E' de E d'une structure d'espace de Banach et définir ensuite les espaces $L^p(E')$. Il est alors possible de définir un produit scalaire entre $L^p(E)$ et $L^q(E')$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Convenons de noter $\overleftarrow{e'}$ un élément générique de E' . Si $\vec{f} \in L^p(E)$ et si $\overleftarrow{g} \in L^q(E')$, on peut poser

$$\langle \vec{f}, \overleftarrow{g} \rangle = \int \langle \vec{f}(x), \overleftarrow{g}(x) \rangle dx,$$

où $\vec{f}$ et $\overleftarrow{g}$ sont deux éléments des classes $\vec{f}$ et $\overleftarrow{g}$ respectivement.

On voit que ceci définit une application de $L^q(E')$ dans $(L^p(E))'$. C'est même une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les normes. Cependant, dans le cas général, ce n'est pas un épimorphisme et $L^q(E')$ n'est pas le dual de $L^p(E)$. Ces considérations restent valables pour $p = 1$ et $q = \infty$.

N°2 - RELATIONS ENTRE $L^p(E)$ et $L^p \otimes E$

Soit E un espace de Banach.

LEMME - Quelle que soit la fonction $\vec{f}$, à valeurs dans E , continue et à support compact dans X , on peut approcher uniformément $\vec{f}$ par des fonctions de la forme $\sum_{\gamma} f_{\gamma} \vec{e}_{\gamma}$, où $\vec{e}_{\gamma} \in E$ et où les f_{γ} ont leur support contenu dans un voisinage arbitraire du support de $\vec{f}$ et sont continues dans X .

Nous nous bornerons à esquisser la démonstration (Pour la démonstration rigoureuse, voir Bourbaki, Livre VI, Chap. III, § 2, Lemme 2) . On construit une partition de l'unité $\{ g_{\gamma}(x) \}$ subordonnée à un recouvrement fini $\{ \Omega_{\gamma} \}$ du support K de $\vec{f}$, recouvrement par des ouverts relativement compacts choisis de telle sorte que l'oscillation de $\vec{f}$ dans chacun de ces ouverts n'excède pas $\varepsilon > 0$. Ceci est possible, car $\vec{f}$ est uniformément continue dans K . Soit alors x_{γ} un point quelconque de Ω_{γ} pour chaque γ . On a $\vec{f}(x) = \sum_{\gamma} \vec{f}(x) g_{\gamma}(x)$ et donc en posant $\vec{e}_{\gamma} = \vec{f}(x_{\gamma})$, $f_{\gamma} = g_{\gamma}$:

$$\| \vec{f}(x) - \sum_{\gamma} \vec{f}(x_{\gamma}) g_{\gamma}(x) \| \leq \sum_{\gamma} \| \vec{f}(x) - \vec{f}(x_{\gamma}) \| g_{\gamma}(x) \leq \varepsilon$$

PROPOSITION 1 - $L^p \otimes E$ est un sous-espace partout dense dans $L^p(E)$, pour $p > 1$ fini.

Il existe une application canonique (bilinéaire) de $L^p \times E$ dans $L^p(E)$; c'est l'application $(\vec{f}, \vec{e}) \rightarrow \vec{f} \vec{e}$. Elle est évidemment continue puisque $N_p(\vec{f} \vec{e}) = N_p(\vec{f}) \cdot \| \vec{e} \|$. Il lui correspond donc une application linéaire continue de $(L^p \otimes E)_{\pi}$ dans $L^p(E)$.

D'autre part, il est aisé de voir que cette application, qui n'est autre que :

$$\sum_{\gamma} \vec{f} \otimes \vec{e}_{\gamma} \rightarrow \sum_{\gamma} f_{\gamma} \vec{e}_{\gamma}, \text{ est biunivoque.}$$

Nous pouvons en effet prendre les $\vec{e}_{\gamma} \in E$ linéairement indépendants. Supposons alors $\sum_{\gamma} f_{\gamma} \vec{e}_{\gamma} = 0$ dans $L^p(E)$. Cela signifie que $\sum f_{\gamma}(x) \vec{e}_{\gamma}$, où $f_{\gamma} \in f_{\gamma}$, est presque partout nulle. Or, si cette fonction est nulle en $x \in X$, c'est que $f_{\gamma}(x) = 0$ pour tout γ , puisque les $\vec{e}_{\gamma}$ sont indépendants. Autrement dit, chacune des f_{γ} est presque partout nulle ; donc les classes f_{γ} sont nulles, et $\sum_{\gamma} f_{\gamma} \otimes \vec{e}_{\gamma} = 0$. On peut donc identifier (algébriquement, mais non topologiquement), $L^p \otimes E$ au sous-espace M de $L^p(E)$, formé des combinaisons linéaires finies $\sum_{\gamma} f_{\gamma} \vec{e}_{\gamma}$.

Pour prouver la proposition 1, il suffira donc d'établir que le sous-espace M est partout dense dans $L^p(E)$. Mais d'après le lemme, M

est partout dense dans $C(E)$ pour une topologie strictement plus fine que celle de la convergence en moyenne d'ordre p ; et enfin $C(E)$ est partout dense dans $L^p(E)$ pour $p \geq 1$ fini.

Interprétation géométrique du sous-espace $L^p \otimes E$ de $L^p(E)$. Les fonctions de toute classe $\vec{f} \in L^p \otimes E$, étant de la forme $\sum_j f_j(x) \vec{e}_j$, prennent leurs valeurs dans un sous-espace F de E de dimension finie, et la réciproque est évidente. $L^p \otimes E$ est donc la réunion des $L^p(F)$ lorsque F parcourt la famille des sous-espaces de E de dimension finie.

Comparaison des normes dans $L^p \otimes E$ et $L^p(E)$. Toute classe $\vec{f} \in L^p \otimes E$ possède deux normes. Sa norme $N_p(\vec{f})$ dans $L^p(E)$ et sa norme $\|\vec{f}\|_\pi$ pour la topologie tensorielle projective sur $L^p \otimes E$. Puisque la norme π est la plus grande des normes donnant la norme 1 à l'application canonique de $L^p \times E$ dans $L^p \otimes E$, nous savons déjà que $\|\vec{f}\|_\pi \geq N_p(\vec{f})$. En général pour $p \neq 1$ (à l'exception des cas triviaux) , $\|\vec{f}\|_\pi > N_p(\vec{f})$.
