L. Schwartz

Cas des espaces normés. Produit tensoriel d'applications linéaires

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 2, p. 3-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A3_0>

25 novembre 1953

Exposé n° 2

PROPOSITION 1 -

Si U (resp. V) *est un voisinage convexe équilibré fermé de* 0 *de* E (resp. F) , *de jauge* p (resp. q) , *la jauge de* $\Gamma(U \otimes V)$ *est donnée par*

(1) $$p \otimes q\ (u) = \begin{cases} \inf. \sum_{\nu} p(\xi_{\nu})\, q(\eta_{\nu}) , \text{ pour} \\ u = \sum_{\nu} \xi_{\nu} \otimes \eta_{\nu} \end{cases}$$

Lorsque p(resp. q) *parcourt un système fondamental de semi-normes continues de* E (resp. F) , *les* $p \otimes q$ *forment un système fondamental de semi-normes continues sur* $E \otimes F$. *On a*

(2) $$p \otimes q\ (\xi \otimes \eta) = p(\xi)\ q\ (\eta) .$$

DÉMONSTRATION.

Montrons que $\Gamma(U \otimes V)$ a précisément pour jauge $r = p \otimes q$. Cette jauge est en effet définie par

(3) $$r(u) = \inf_{\substack{u \in \lambda \Gamma(U \otimes V) \\ \lambda > 0}} (\lambda)$$

Mais $u \in \lambda \Gamma(U \otimes V)$ équivaut à $u = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu \, x_\nu \otimes y_\nu$, $p(x_\nu) \leqslant 1$, $q(y_\nu) \leqslant 1$, $\sum |t_\nu| \leqslant \lambda$. Ceci entraine $u = \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{N} p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu) \leqslant \lambda$, en prenant $\xi_\nu = t_\nu x_\nu$; $\eta_\nu = y_\nu$.

Réciproquement soit $u = \sum_{\nu=1}^{N} \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, avec $\sum p(\xi_\nu) q(\eta_\nu) \leqslant \lambda$. En posant $x_\nu = \frac{\xi_\nu}{p(\xi_\nu)}$, $y_\nu = \frac{\eta_\nu}{p(\eta_\nu)}$, $t_\nu = p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu)$ pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu) \neq 0$; $x_\nu = N \frac{\xi_\nu \, q(\eta_\nu)}{\varepsilon}$, $y_\nu = \frac{\eta_\nu}{q(\eta_\nu)}$, $t_\nu = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu) = 0$, $q(\eta_\nu) \neq 0$; $x_\nu = \frac{\xi_\nu}{p(\xi_\nu)}$, $y_\nu = N \frac{\eta_\nu \, p(\xi_\nu)}{\varepsilon}$, $t_\nu = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu) \neq 0$, $q(\eta_\nu) = 0$ $x_\nu = N \frac{\xi_\nu}{\varepsilon}$, $y_\nu = \eta_\nu$, $t_\nu = \frac{\varepsilon}{N}$, pour les valeurs de ν pour lesquelles $p(\xi_\nu) = q(\eta_\nu) = 0$; on obtient toujours une décomposition $u = \sum_{\nu=1}^{N} t_\nu \, x_\nu \otimes y_\nu$, $p(x_\nu) \leqslant 1$, $q(y_\nu) \leqslant 1$, $\sum_{\nu=1}^{N} |t_\nu| \leqslant \lambda + \varepsilon$.

Comme ε est aussi petit qu'on veut, $r(u)$ défini par (3) est bien égal à $p \otimes q(u)$ défini par (1).

Montrons maintenant (2).

(1) donne $(p \otimes q)(\xi \otimes \eta) \leqslant p(\xi)\, q(\eta)$.

Il suffit donc de montrer l'inégalité inverse ; comme elle est évidente si $p(\xi)\, q(\eta) = 0$, nous pouvons supposer $p(\xi)\, q(\eta) \neq 0$.

D'après Hahn-Banach, il existe $X' \in E'$ tel que

(4) $$\begin{aligned} |\langle X', X \rangle| &\leqslant p(X) \\ \langle X', \xi \rangle &= p(\xi) \end{aligned}$$

De même il existe $Y' \in F'$ tel que

$$(5) \qquad |\langle Y', Y\rangle| \leqslant q(Y)$$
$$\langle Y', \eta\rangle = q(\eta)$$

Alors si $u = \xi \otimes \eta = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \eta_\nu$, on a

$$(6) \qquad |\langle X' \otimes Y' , u\rangle| \leqslant \sum_\nu p(\xi_\nu)\, q(\eta_\nu)$$

donc

$$\leqslant (p \otimes q)\ (u)$$

mais aussi

$$(7) \qquad \langle X' \otimes Y' , u\rangle = \langle X', \xi\rangle \langle Y', \eta\rangle = p(\xi)\, q(\eta) \quad \text{d'où}$$
$$p(\xi)\, q(\eta) \leqslant p \otimes q\ (u) ,$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2 .

Si E et F sont normés, de normes resp. p et q , il existe sur $E \otimes F$ topologique, une norme et une seule, à savoir $p \otimes q$, ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace normé G , l'isomorphisme canonique entre applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G et applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G conserve les normes de ces applications. L'application bilinéaire canonique de $(E)_p \times (F)_q$ dans $(E \otimes F)_{p \otimes q}$ est de norme 1 . La norme $p \otimes q$ est appelée norme projective.

Montrons d'abord l'unicité d'une telle norme. Si s et s' sont deux telles normes, comme l'application identique de $(E \otimes F)_s$ dans $(E \otimes F)_s$ est de norme 1 , l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1 , (ce qui démontrera la dernière assertion du théorème quand on saura que $s = p \otimes q$) ; alors l'application identique de $(E \otimes F)_{s'}$ dans $(E \otimes F)_s$ sera de norme 1 , donc $s \leqslant s'$; de même $s' \leqslant s$, donc $s = s'$.

Il suffit donc de voir que $s = p \otimes q$ répond à la question. D'abord c'est une norme, puisque, d'après la prop. 3 elle définit la topologie, et celle-ci est séparée d'après la prop. 2 . Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G . Pour simplifier, notons toujours par $\|v\|$ la norme de v dans E , F , $E \otimes F$, relativement aux normes p , q , $p \otimes q$. Pour toute décomposition $u = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \eta_\nu$ de $u \in E \otimes F$, on a

$$(8) \qquad \|\tilde{B}(u)\| = \|\sum_\nu B(\xi_\nu, \eta_\nu)\| \leqslant \|B\| \sum_\nu \|\xi_\nu\|\, \|\eta_\nu\|$$

donc $\quad \| \breve{B}(u) \| \leqslant \| B \| \quad \| u \|$

et par suite $\quad \| \tilde{B} \| \leqslant \| B \|$.

Par ailleurs

(9) $\quad \| B(\xi, \eta) \| = \| \tilde{B}(\xi \otimes \eta) \|$

$\leqslant \| \tilde{B} \| \; \| \xi \otimes \eta \| \leqslant \| \tilde{B} \| \, \| \xi \| \, \| \eta \|$
(et même =)

Donc $\quad \| B \| \leqslant \| \tilde{B} \|$

et par suite $\quad \| B \| = \| \tilde{B} \|$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3 .

Si E_i , F_i $(i = 1, 2)$ sont des espaces localement convexes , u_i $(i = 1, 2)$ des applications linéaires continues de E_i dans F_i , l'application $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ est π-continue, et si E_i , F_i $(i = 1, 2)$ sont normés,

(10) $\quad \| u_1 \otimes u_2 \| = \| u_1 \| \; \| u_2 \|$.

Considérons en effet l'application bilinéaire B de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$ définie par

(11) $\quad B(x_1, x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$.

Il lui correspond une application linéaire $\tilde{B}$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, qu'on appelle $u_1 \otimes u_2$, la seule à vérifier

(12) $\quad u_1 \otimes u_2 \, (x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$

Comme B est continue (et de norme $= \| u_1 \| \; \| u_2 \|$ si les E_i, F_i sont normés)*, il en est de même de $u_1 \otimes u_2$ d'après l'exposé n° 1 , quand on munit $E_i \otimes F_i$ $(i = 1, 2)$ de la topologie π .

COROLLAIRE - $u_1 \otimes u_2$ se prolonge canoniquement en une application linéaire continue $u_1 \hat{\otimes} u_2$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

PROPOSITION 4 - Si u_i est un épimorphisme de E_i sur F_i , $u_1 \otimes u_2$ est un épimorphisme de $E_1 \otimes E_2$ sur $F_1 \otimes F_2$.

D'abord on sait que $u_1 \otimes u_2$ est épijective. Soit alors $\Gamma(U_1 \otimes U_2)$ un voisinage de 0 dans $E_1 \otimes E_2$. Son image par $u_1 \otimes u_2$ est $\Gamma(V_1 \otimes V_2)$, où $V_i = u_i(U_i)$ est un voisinage de 0 dans F_i , puisque u_i est un épimorphisme ; donc $u_1 \otimes u_2$ est bien un épimorphisme.

---

* A cause de (2)

Mais $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ est seulement un homomorphisme de $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ sur un sous-espace dense de $F_1 \widehat{\otimes} F_2$, et non nécessairement sur $F_1 \widehat{\otimes} F_2$. Si les E_i sont métrisables (auquel cas les F_i le sont comme quotients de E_i), $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ est un épimorphisme, car, dans le cas d'un espace métrisable $G = E_1 \otimes E_2$, le complété d'un quotient de G par un sous-espace fermé V est le quotient du complété $\widehat{G}$ par le sous-espace $\widehat{V}$: $(G/V)^{\wedge} \approx \widehat{G}/\widehat{V}$.

D'autre part il faudrait se garder de croire que, si u_i est un monomorphisme de E_i dans F_i, $u_1 \otimes u_2$ soit un monomorphisme. Si E_i est un sous-espace topologique de F_i, $E_1 \otimes E_2$ a en général une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $F_1 \otimes F_2$.

Produit tensoriel de plusieurs espaces localement convexes.

Définition directe par les applications multilinéaires.

PROPOSITION 7 - L'isomorphisme (algébrique) canonique de $(E \otimes F) \otimes G$ sur $E \otimes F \otimes G$ est un isomorphisme topologique (resp. un isomorphisme d'espaces normés si E, F, G sont normés).

Il suffit de remarquer que si U (resp. V, W) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans E (resp. F, G), un système fondamental de voisinages de 0 dans les 2 espaces en litige est formé par les $\Gamma(\Gamma(U \otimes V), W)$ et $\Gamma(U \otimes V \otimes W)$, ce qui est la même chose. Si U (resp. V, W) est l'indicateur de la semi-norme p (resp. q, r) alors on voit que $p \otimes q \otimes r = (p \otimes q) \otimes r$, d'où la propriété relative aux espaces normés.
