SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. nº 1, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A2_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953/1954.
-:-:-:-

EXPOSES N°s 1 et 2

18 novembre 1953

Exposé n° 1

PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

Exposé de L. SCHWARTZ.

THÉORÈME. Si E et F sont deux espaces localement convexes, il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe et une seule ayant la propriété suivante : quel que soit l'espace localement convexe G, l'isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G et l'espace vectoriel des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G fait correspondre, à l'espace vectoriel $B(E, F ; G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G, l'espace vectoriel $L(E \otimes F ; G)$ des applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G. Cet isomorphisme fait alors correspondre les ensembles équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans G aux ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$ dans G. La topologie ainsi définie sur $E \otimes F$ est la topologie d'espace localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue.

DÉMONSTRATION.

Soit T une topologie répondant aux conditions de l'énoncé. L'application identique de $(E \otimes F)_T$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue, donc l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_T$ est continue. Si maintenant T' est une topologie localement convexe sur $E \otimes F$ telle que l'application canonique de $E \times F$ dans $(E \otimes F)_{T'}$ soit continue, alors l'application identique de $(E \otimes F)_T$ sur $(E \otimes F)_{T'}$ est continue, donc T est plus fine que T'. Nous avons bien montré que T, si elle existe, est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue ; et ceci démontre en même temps l'unicité de T.

Montrons maintenant l'existence.

Nous montrerons pour cela

PROPOSITION 1 - Lorsque U (resp. V) parcourt un système fondamental de voisinages de 0 de E(resp. F) , $\Gamma(U \otimes V)$, enveloppe convexe équilibrée de $U \otimes V$, parcourt un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie répondant aux conditions de l'énoncé du théorème.

Comme $\Gamma(U \otimes V)$ est convexe, équilibré, absorbant, et que ces ensembles forment une base de filtre, ils définissent bien un système fondamental de voisinages de 0 d'une topologie T localement convexe sur $E \otimes F$.

Soit H une partie équicontinue de $B(E , F ; G)$. Il existe alors, pour tout voisinage convexe équilibré W de 0 dans G , des voisinages U , V , de 0 dans E , F tels que, pour toute $B \in H$, on ait $B(U \times V) \subset W$. Si on appelle $\tilde{B}$ l'application linéaire de $E \otimes F$ dans G associée à B , on voit que l'on a, pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$, $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc, W étant convexe équilibré, $\tilde{B}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$; donc $\tilde{H}$ est une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T ; G)$.

Réciproquement, soit $\tilde{H}$ une partie équicontinue de $L((E \otimes F)_T ; G)$ Quel que soit le voisinage de 0 , W , dans G , il existe alors un voisinage de 0 de $(E \otimes F)_T$, que nous pouvons supposer de la forme $\Gamma(U \otimes V)$, tel que $\tilde{B}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$ pour toute $\tilde{B} \in \tilde{H}$. Alors a fortiori $\tilde{B}(U \otimes V) \subset W$, donc $B(U \times V) \subset W$, ce qui prouve que H est une partie équicontinue de $B(E , F ; G)$. C.Q.F.D.

DÉFINITION - La topologie de $E \otimes F$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème sera appelée produit tensoriel projectif des topologies de E et de F , ou topologie tensorielle projective sur $E \otimes F$, et notée $(E \otimes F)_\pi$.

$E \otimes F$ sera toujours, dans cet exposé, muni de cette topologie.

$E \hat{\otimes} F$ sera le complèté de $E \otimes F$ pour cette topologie. Si alors G est un espace vectoriel localement convexe complet, toute application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G définit canoniquement une application linéaire continue de $E \hat{\otimes} F$ dans G .

REMARQUE - Le dual de $E \otimes F$ s'identifie par l'application $\tilde{B} \longrightarrow B$ à l'espace $B(E , F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$; il en est de même du dual de $E \hat{\otimes} F$. Comme les parties équicontinues de $(E \otimes F)'$ sont alors identifiées aux parties équicontinues de $B(E , F)$, on voit qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) est constitué par les polaires des parties équicontinues de $B(E , F)$, dans la dualité séparante entre $E \otimes F$ (resp. $E \hat{\otimes} F$) et $B(E , F)$.

Ceci aurait pu également servir à montrer l'unicité de la topologie produit tensoriel, et d'ailleurs aussi son existence.

PROPOSITION 2 - Si E et F sont séparés (resp. métrisables), $E \otimes F$ est séparé (resp. métrisable).

Soit en effet $u \neq 0 \in E \otimes F$. Si E et F sont séparés, il existe une forme bilinéaire continue B sur $E \times F$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}$ sur $E \otimes F$ vérifie $\tilde{B}(u) \neq 0$ [Il existe en effet des sous-espaces de dimension finie E_1, F_1, tels que $u \in E_1 \otimes F_1$; soient E_2, F_2 des supplémentaires topologiques de E_1, F_1. Si B_1 est une forme bilinéaire sur $E_1 \otimes F_1$ telle que la forme linéaire associée $\tilde{B}_1$ vérifie $\tilde{B}_1(u) \neq 0$, on pourra prendre pour B la forme bilinéaire égale à B_1 sur $E_1 \times F_1$, à U sur $E_1 \times F_2$, $E_2 \times F_1$, $E_2 \times F_2$]. Comme $\tilde{B}$ doit être continue, cela prouve que u n'est pas adhérent à 0, donc que $E \otimes F$ est séparé.

Si E et F sont métrisables, on peut prendre un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans $E \otimes F$, les $\Gamma(U_\alpha \otimes V_\beta)$, où U_α (resp. V_β) parcourt un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans E (resp. F) ; donc $E \otimes F$ est métrisable, et $E \hat{\otimes} F$ est un espace de Fréchet.

-:-:-:-:-:-:-